THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

515
~~517~~
C126
v.6

MATHEMATICS

515
C126
v.6

25253
417
Lee

Ueber die Integration der m^{ten} Wurzel aus einer rationalen Function.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät der Albertus-Universität
zu Königsberg in Pr.

vorgelegt

und

am 21. März 1887, Mittags 12 Uhr,

nebst den beigefügten Thesen öffentlich vertheidigt

von

Felix Klitzkowski
aus Danzig.

Opponenten:

Herr **O. Mey,** Dr. phil.
Herr **J. Skolkowski,** cand. math.

Greifswald.
DRUCK VON F. W. KUNIKE.
—
1887.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

Herrn Professor Dr. Ferdinand Lindemann

hochachtungsvoll gewidmet

vom

Verfasser.

595520

Ueber die Integration der $m$ten Wurzel aus einer rationalen Function.

Briot und *Bouquet* haben in ihrer Abhandlung[1]) „Sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques" die allgemeinen Bedingungen dafür angegeben, dass die Differentialgleichung erster Ordnung und $m$ten Grades:

$$F\left(\frac{du}{dz},\ u\right) = 0, \tag{1}$$

in welcher F eine ganze Function der abhängigen Variablen u und des Differentialquotienten $\frac{du}{dz}$ bedeutet, ein eindeutiges Integral besitzt. Das letztere gehört, wie sie zeigen, einer der drei Formen an:

$$u = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\quad \frac{\varphi(\zeta)}{\psi(\zeta)},\quad \frac{\varphi(\wp(z),\ \wp'(z))}{\psi(\wp(z),\ \wp'(z))}, \tag{A}$$

wo φ, ψ ganze Functionen ihrer Argumente sind und

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\omega}.(z-z_1)}$$

gesetzt ist, indem z_1, ω Constante bezeichnen.

Insbesondere untersuchen die genannten Autoren die eindeutigen Integrale der trinomen Differentialgleichung:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u).\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_m(u) = 0 \tag{2}$$

1) Journal de l'école impériale polytechnique. Tome XXI. p. 212, 216, resp. „Théorie des fonctions elliptiques" par Briot et Bouquet. 2ième édit. p. 381, 387.

einschliesslich des Falles $f_1(u) = 0$, wobei sie unter f_i ganze Functi nen von u verstehen.

Im Folgenden werde ich nun versuchen, ihre Betrachtungen fi die Differentialgleichung (1) resp. die gleichbedeutende:

$$f_0 \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1 \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m = 0, \tag{3}$$

deren Integral nicht eindeutig ist, zu verallgemeinern unter der Ai nahme, dass das letztere entweder den Typus:

$$f(u, z) = 0 \quad \text{oder} \quad f(u, \zeta) = 0 \tag{B}$$

besitzt, resp.

$$f(u, \mathfrak{p}(z), \mathfrak{p}'(z)) = 0 \tag{B'}$$

lautet, indem f eine ganze Function der angegebenen Argument bedeutet.

Die so gewonnenen Resultate wende ich in dem ersten Fall auf die Lösung der binomischen Differentialgleichung:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = \frac{f_m(u)}{f_0(u)} \tag{4}$$

d. h. auf die Auswerthung des Integrales

$$z = \int du \cdot \sqrt[m]{\frac{f_0(u)}{f_m(u)}} \tag{C}$$

an, falls dasselbe einen algebraischen Werth besitzt.

Die Behandlung der periodischen Integrale der Differential gleichung (4) werde ich in einem zweiten Aufsatze folgen lasse jedoch am Schlusse des vorliegenden bereits eine Uebersicht übe die dort erhaltenen Resultate mittheilen und gleichzeitig angeben, wi die Betrachtung der Differentialgleichung:

$$f_0 \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + f_1 \cdot \frac{du}{dz} + f_2 = 0 \tag{5}$$

auf die der Gleichung (4) zurückgeführt werden kann.

Meine Untersuchung der einfach periodischen Integrale de Differentialgleichung (4) umfasst als Specialfall diejenige *Abels*[1]) übe das Integral:

---

1) Oeuvres complètes, I. pag. 104.

$$\int \frac{\varrho}{\sqrt{R}}\,du = \log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

wo ϱ, R, p, q ganze Functionen von u sind, und ferner die Resultate der Abhandlung von Herrn *Pick*[1]) „Ueber die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen".

Die bei diesen Untersuchungen angewandte Methode gestattet das directe Studium des Integrales (C); dieselbe gibt die nothwendigen und hinreichenden Criterien dafür an, dass das letztere einem der drei angeführten Typen [(B), (B')] angehört und bestimmt für die genannten Fälle ohne die, bei der gebräuchlichen Integration erforderlichen, umständlichen Rechnungen den Werth des vorgelegten Integrales.

Es sei mir schliesslich die Bemerkung gestattet, dass die hier behandelten Fragen Specialfälle der allgemeinen Untersuchungen über die algebraischen Integrale betreffen, welche auf ganz anderem Wege *Clebsch* und *Gordan*[2]) angestellt haben, und die Herr Professor *Weierstrass* in seinen Vorlesungen erörtert hat.

Theil I.

Allgemeine Betrachtungen über die Differentialgleichung

$$F\left(\frac{du}{dz},\ u\right) = 0.$$

§ 1.

Die algebraischen Integrale der Differentialgleichung:

1) $$f_0\cdot\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1\cdot\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m = 0,$$

n welcher die Grössen f_i ganze Functionen von u bedeuten, haben m Allgemeinen die Form:

$$f(u,\ z) = 0,$$

enn f eine ganze Function von u und z bezeichnet. Dieselbe ist,

---

1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. LXXXV. Band; II. Abth. 643.

2) Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen p. 1.

wie *Briot* und *Bouquet* zeigen, vom Grade m in z. Ihr Grad in u sei μ; derselbe ist nicht ohne Weiteres bekannt.

Da die genannte Differentialgleichung ungeändert bleibt, wenn man in ihr: $(z-z_1)$ statt z setzt, indem z_1 eine beliebige Constante, so lautet das obige Integral

(a) $$f(u,\ z-z_1) = 0,$$

wo nun z_1 die willkürliche Integrations-Constante ist.

Die einfach periodischen Integrale von (1) sind von der Gestalt

(b) $$f(u,\ \zeta) = 0,$$

wenn $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z-z_1)}$ und f eine ganze Function von u und ζ ist. Dieselbe ist in ζ vom Grade m; bezüglich u habe sie den Grad μ. Die Grösse z_1 ist die Integrations-Constante aus demselben Grunde wie vorher. ω ist die Periode der Function ζ.

Die doppeltperiodischen Integrale der Gleichung (1) lauten schliesslich:

(c) $$f(u,\ \lambda(z-z_1)) = 0,$$

indem f eine ganze Function $m$ten Grades von λ, μten Grades von u und die Function

$$\lambda(z) = \mathrm{sn}(z)$$

durch die Gleichung:

$$\lambda'^2 = \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = (1-\lambda^2).(1-\varkappa^2.\lambda^2)$$

definirt ist.

Während die vieldeutigen Integrale (a), (b) die Bedingung

$$\mu > 1$$

erfordern, ist für das vieldeutige Integral (c) die Annahme

$$\mu > 2,$$

wie bekannt, nothwendig. Das letztere kann auch in der Form:

$$f(u,\ \lambda,\ \lambda') = 0 \quad \text{oder} \quad f(u,\ \wp,\ \wp') = 0$$

dargestellt werden.

§ 2.

Die Methode, welche *Briot* und *Bouquet* bei der Untersuchung der eindeutigen Integrale der Differentialgleichung (1), § 1 anwenden, ist bekanntlich die folgende.

Man entwickelt die Integralfunction u, wenn sie algebraisch ist nach z, sobald sie einfach periodisch, nach ζ und, falls sie doppeltperiodisch ist, nach z, nachdem man für $\wp$, $\wp'$ [resp. λ, λ'] die betreffenden Reihen in z eingesetzt hat, und untersucht dann dieselbe an gewissen Ausnahmepunkten ihrer Variablen, welche sich unmittelbar aus den Integralgleichungen ablesen lassen.

Da in den letzteren u vom ersten Grade vorkommt, haben z. B. die Entwickelungen der algebraischen und doppeltperiodischen Integrale u die Form:

$$u - u_1 = a_0 . z'^p + a_1 z'^{p+1} + \ldots,$$

wo $z' = z - z_1$ gesetzt ist und z_1, u_1 Constante, die der Bedingung $f(u_1, z_1) = 0$ genügen, bedeuten.

Wenn aber die Constante $z_1 = \infty$, dann hat man die Reihe:

$$u - u_1 = a_0 t^p + a_1 t^{p+1} + \ldots,$$

indem

$$t = \frac{1}{z}.$$

Aus diesen Entwickelungen findet man leicht die zugehörigen von $\frac{du}{dz}$ nach $(u - u_1)$.

Die letzteren, welche andererseits direct aus der gegebenen Differentialgleichung entnommen werden können, zeigen dann umgekehrt an, *wie beschaffen die zugehörigen Entwickelungen des Integrales sind, welche Beschaffenheit also das Integral selbst besitzt.*

Wir schliessen im Folgenden die eindeutigen Integrale dadurch aus, dass wir für die algebraischen und einfach periodischen Integrale $\mu > 1$, für die doppeltperiodischen $\mu > 2$ annehmen.

Die angegebene Methode von *Briot* und *Bouquet* haben wir nun für die Untersuchung der Integrale (a), (b), (c) der Differentialgleichung (1) zu erweitern. Wir werden zuerst alle möglichen Entwickelungen von u nach z' und dann die nach ζ aufzustellen haben.

Die Entwickelungen der Integralfunction an singulären Stellen.

§ 3.

Es sei fortan

$$\frac{du}{dz} = U, \quad z' = z - z_1, \quad u' = u - u_1,$$

und das Werthepaar u_1, z_1 möge die zur Differentialgleichung (1) § 1, gehörige Integralgleichung erfüllen.

Die Constante u_1 braucht nicht immer endlich zu sein, sobald man die Stelle $u = u_1 = \infty$ betrachtet, hat man die Function $v = \frac{1}{u}$ nach z' resp. ζ zu entwickeln. Die so erhaltene Reihe ergibt dann für den Differentialquotienten $\frac{dv}{dz}$ eine nach Potenzen von v fortschreitende Entwickelung. Die letztere wird aber andererseits durch die sogenannte „transformirte Differentialgleichung" oder „Transformirte", die aus (1) durch die Substitution

$$u = \frac{1}{v}$$

entsteht, unmittelbar angegeben.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{dv}{dz} = V.$$

Der Grad der eindeutigen Integralfunction war bei *Briot* und *Bouquet* in den Entwickelungen nach z' oder ζ der erste. Jetzt ist dieser Grad von u aber, gleich μ. Deshalb hat man zunächst dementsprechend die Reihen des § 2. zu verallgemeinern, worauf auch *Briot* und *Bouquet* [1]) bereits eingehen.

I. Die Entwickelungen von u' an der Stelle $z' = 0$.

1. z_1 ist endlich.

Das Integral unserer Differentialgleichung liefert in diesem Falle die Reihe:

$$u' = a_0 . z'^{\frac{p}{q}} + a_1 z'^{\frac{p+1}{q}} + \dots , \tag{1}$$

aus welcher

$$z' = b_0 . u'^{\frac{q}{p}} + b_1 u'^{\frac{q+1}{p}} + \dots , \tag{2}$$

also:

$$\frac{dz}{du} = b_0' . u'^{\frac{q}{p}-1} + b_1' . u'^{\frac{q+1}{p}-1} + \dots$$

folgt.

Wenn a) $p > q$, erhalten wir somit:

---

1) „Théorie des fonctions-elliptiques". 2ième édit. pag. 173, 378.

$$(3)\quad U = A_0 . u'^{\frac{p-q}{p}} + A_1 u'^{\frac{p-q+1}{p}} + A_2 u'^{\frac{p-q+2}{p}} + \dots,$$

indem

$$A_0 = \frac{p}{q} . a_0^{\frac{q}{p}}, \quad b_0 = \frac{1}{a_0^{q/p}}, \quad b_0' = \frac{p}{q} . \frac{1}{a_0^{q/p}}.$$

Hier bedeuten die Grössen p, q ganze positive Zahlen, die a_i complexe Constante.

Sobald b) $p < q$, ist:

$$(4)\quad U = \frac{A_0 + A_1 u'^{\frac{1}{p}} + A_2 u'^{\frac{2}{p}} + \dots}{u'^{\frac{q-p}{p}}}$$

Da diese Entwickelung in anderer Schreibweise

$$U^p = \frac{A_0' + A_1' . u'^{\frac{1}{p}} + \dots}{u'^{q-p}}$$

lautet, *so kann dieselbe andererseits aus der gegebenen Differentialgleichung* (1) § 1. *nur dann entnommen werden, wenn u' ein $(q-p)$-facher Factor von f_0 ist*, d, h. nur die nach den Potenzen der Factoren von f_0 fortschreitenden Entwickelungen des Differentialquotienten U gehören dem vorliegenden Falle an.

Wenn c) $p = q$, dann folgt:

$$(5)\quad U = A_0 + A_1 u'^{\frac{1}{p}} + A_2 u'^{\frac{2}{p}} + \dots$$

Da diese Reihe für U rechts mit einer Constanten beginnt, kann die Variable u', nach der sie fortschreitet, nicht ein Factor irgend einer der Functionen f_i sein, welche durch die Differentialgleichung gegeben werden. Wir schliessen hieraus:

In der Entwickelung

$$u - u_1 = a_0 . z'^{\frac{p}{p}} + a_1 z'^{\frac{p+1}{p}} + \dots$$

ist u_1 nicht Wurzel irgend einer der Gleichungen

$$f_i = 0. \quad [i = 0, 1, \dots m].$$

Alle für die Entwickelungen von u' und U geltenden Auseinande
setzungen haben stets auch für die von v und V Gültigkeit, wie ic
hier ein für allemal bemerke.

2. z_1 ist unendlich gross.

Wir setzen $t = \frac{1}{z}$ und nehmen an, dass z nicht logarithmisch u
endlich, sondern nur algebraisch unendlich werden könne. Al
dann lässt sich die Reihe

$$u' = a_0 . t^{\frac{p}{q}} + a_1 t^{\frac{p+1}{q}} + \ldots \tag{6}$$

in die Form bringen:

$$z = \frac{b_0}{u'^{\frac{q}{p}}} + \frac{b_1}{u'^{\frac{q-1}{p}}} + \ldots + \frac{b_{q-1}}{u'^{\frac{1}{p}}} + b_q + b_{q+1} u'^{\frac{1}{p}} + b_{q+2} u'^{\frac{2}{p}} + \ldots, \tag{7}$$

welche unmittelbar den Ausdruck:

$$U = A_0 . u'^{\frac{p+q}{p}} + A_1 u'^{\frac{p+q+1}{p}} + \ldots + A_{q-1} . u'^{\frac{p+2q-1}{p}} + A_{q+1} u'^{\frac{p+2q+1}{p}} + \ldots \tag{8}$$

ergibt. Hier ist

$$A = -\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{a_0^{\frac{q}{p}}}, \qquad b_0 = a_0^{\frac{q}{p}}.$$

*Damit die Entwickelung von U keine logarithmische Unendlichke
für die Function z liefert, muss hiernach*

$$A_q = 0$$

sein (s. § 4.).

Wie ersichtlich, ist es hier gleichgültig, ob p grösser, gleich ode
kleiner q ist.

II. Die Entwickelungen von u' an den Stellen $\zeta = 0$ und $\frac{1}{\zeta} = 0$.

1.

Es kommen jetzt nur die Entwickelungen der Integralfunction u' an den Stellen $\zeta = 0, \infty$ in Betracht. An der ersteren, $\zeta = 0$, gilt nunmehr die Reihe:

$$u' = a_0 . \zeta^{\frac{p}{q}} + a_1 . \zeta^{\frac{p+1}{q}} + \dots , \tag{9}$$

aus welcher

$$\zeta = b_0 . u'^{\frac{q}{p}} + b_1 u'^{\frac{q+1}{p}} + \dots , \tag{10}$$

also

$$U = A_0 . u'^{\frac{p}{p}} + A_1 . u'^{\frac{p+1}{p}} + A_2 . u'^{\frac{p+2}{p}} + \dots \tag{11}$$

folgt, wo nun

$$A_0 = \frac{p}{q} . \frac{2\pi i}{\omega}, \qquad b_0 = \frac{1}{a_0^{\frac{q}{p}}}$$

und ω die Periode der einfach periodischen Function

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z'}$$

bedeutet.

Daher ist der hier gültige Werth von U in den Exponenten der Integralfunction u' unabhängig von der Grösse q. Aus der Constanten A_0 berechnet sich der Ausdruck $q . \omega$, da p unmittelbar durch (11) *gegeben ist.*

2.

Betrachten wir nun die Entwickelung:

$$u' = a_0 . \xi^{\frac{p}{q}} + a_1 \xi^{\frac{p+1}{q}} + \dots , \tag{12}$$

wo

$$\xi = \frac{1}{\zeta},$$

so bemerken wir, dass dieselbe aus derjenigen in 1. dadurch entsteht, dass in der letzteren $-\omega$ statt ω gesetzt wird. Diese Substitution ergibt daher, auf den Ausdruck von U in 1. angewandt:

$$(13) \qquad U = A . u'^{\frac{p}{p}} + A_1 u'^{\frac{p+1}{p}} + \ldots,$$

indem jetzt

$$A_0 = -\frac{p}{q} \cdot \frac{2\pi i}{\omega}.$$

§ 4.

Es ist augenscheinlich, dass die bisher angegebenen Entwickelungen der Integralfunction nach der Variablen z' resp. ζ die einzigen sind, welche die Integralgleichungen (a), (b), (c) (§ 1.) zulassen.

Die zugehörigen Reihen von U, welche nach gebrochenen Potenzen von u' fortschreiten, kann man unter dem Typus:

$$(1) \qquad U = A_0 . u'^{\frac{n}{p}} + A_1 . u'^{\frac{n+1}{p}} + \ldots$$

zusammenfassen.

Hier kann

$$n \leqq p$$

sein, ohne dass eine Bedingung für die Constanten A_i besteht.

Sobald jedoch

$$n > p,$$

fanden wir als Bedingung des Ausschlusses logarithmischer Unendlichkeit, dass der Coefficient von

$$u'^{\frac{p+2q}{p}},$$

den wir A_q nannten, verschwinden müsse.

Falls diese Anforderung nicht durch die Entwickelung von U erfüllt wird, kann daher zu der letzteren nicht eine der von uns aufgestellten Reihen für u gehören; alsdann muss eine complicirtere Beziehung zwischen u' und z' obwalten. In der That finden *Briot* und *Bouquet* als entsprechende Relation zwischen u' und z':

$$Z_0 + Z_1 v' + Z_2 v'^2 + \ldots = 0,$$

wo die Zeichen Z_i convergente Reihen bedeuten, welche nach ganzen

wachsenden Potenzen von z'' geordnet sind, und die als Coefficient von z''^q den Ausdruck:

$$\text{Const}\,[\log z'' + \log(v_0 + v')]$$

besitzen.

Hier ist:

$$z' = z''^{-q}, \qquad u' = u''^{\,p}, \quad u'' = (v_0 + v'')z''$$

gesetzt, indem

$$v_0 = \left(-\frac{p}{q}\,\frac{1}{A_0}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Folgerungen aus den angestellten Entwickelungen.

§. 5.

Die auf das erste Glied beschränkte Entwickelung

$$x = c\,.\,y^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

wollen wir, wie üblich, eine „Gruppe“ nennen und, wenn es auf den Werth der Constanten c nicht ankommt durch das Zeichen:

$$x^\alpha = 0 \;\mid\; y^\beta = 0$$

andeuten. Was rechts vom Verticalstriche steht, heisse „rechte Seite“, was links von derselben, „linke Seite“ der Gruppe; α, β sind positive, ganze Zahlen.

Die letztere Form der Gruppe sagt direct aus, dass der α-fache Werth x den β-fachen Werth y bedingt, indem der Verticalstrich anzeigen soll, dass für $x^\alpha = 0$, $y^\beta = 0$ eintrete.

Sobald α, β relative Primzahlen sind, ist die Gruppe

$$x^\alpha = 0 \;\mid\; y^\beta = 0$$

irreductibel, d. h. nicht in Untergruppen zerlegbar.

Wenn α und β nicht relativ prim sind, sondern einen Factor, der keine Primzahl zu sein braucht, gemeinsam haben, wenn z. B.

$$\alpha = r\,.\,a, \qquad \beta = r\,.\,b$$

ist, die Gruppe also

$$x^{ar} = 0 \;\mid\; y^{br} = 0$$

lautet, dann zerfällt dieselbe in r verschiedene Gruppen, deren jede die Form hat:

$$x^a = 0 \quad | \quad y^b = 0,$$

jedoch immer eine andere Constante c besitzt. Und zwar haben wir genauer jetzt die folgenden r Gruppen:

$$x = c \cdot e^{\frac{2h\pi i}{ar}} \cdot y^{\frac{b}{a}}, \quad (h = 0, 1 \ldots r-1)$$

Wenden wir nun die bisherigen Ueberlegungen auf die Differentialgleichung:

(1) $$F(U, u) = 0$$

an [(1), § 1.].

Nennen wir einen Factor von f_m, welcher auch den Functionen

$$f_{m-1}, \quad f_{m-2}, \quad \ldots \quad f_{m-p+1}$$

angehöre,

$$u'^n,$$

dann erhalten wir die Gruppe:

(2) $$U^p = 0 \quad | \quad u'^n = 0.$$

Dies bedeutet: der n-fachen Wurzel u_1 von f_m entspricht die p-fache Wurzel $U = 0$ der betrachteten Differentialgleichung.

Nehmen wir an, p und n seien relative Primzahlen. *Wenn* $p > n$, also $n = p - q$ ist, dann folgt als zugehörige Gruppe der Integralgleichung [nach § 3., (1)]

(3) $$u'^{p-n} = 0 \quad | \quad z'^p = 0$$

d. h. *die gegebene Differentialgleichung* (1), *welche den Werth* u_1 *direct ergibt, sagt aus, dass*:

$u = u_1$ eine $(p-n)$-fache Wurzel des Integrales ist und dass derselben eine p-fache Wurzel $z = z_1$ zugehört.

Sobald $p < n$, $n = p + q$ ist und sich

$$A_{n-p} = 0$$

ergibt, dann erhält man als Gruppe der Integralgleichung:

(4) $$u'^{n-p} = 0 \quad | \quad t^p = 0 \quad \text{(nach § 3., (6))}$$

d. h. u_1 *ist eine* $(n-p)$*-fache Wurzel der letzteren, welche die* p*-fache Wurzel* $z=\infty$ *bestimmt.*

Unter der Annahme

$$p = r.p', \quad n = r.n'$$

zerfällt jedoch die Gruppe (2) in die r verschiedenen Gruppen:

$$U = c.e^{\frac{2h\pi i}{p'.r}}.u'^{\frac{n'}{p'}}. \quad (h = 0, 1 \ldots (r-1)) \tag{5}$$

Wenn nun $n' < p'$, $n' = p' - q'$, dann sind die zugehörigen r Gruppen des Integrales:

$$u' = a_0.(z - z_{h+1})^{\frac{p'}{p'-n'}} \quad (h = 0, 1 \ldots (r-1)), \tag{6}$$

wo

$$a_0 = \left[\frac{p'-n'}{p'}.e^{\frac{2h\pi i}{p'.r}}.c\right]^{\frac{p'}{p'-n'}}.$$

Die letzteren unterscheiden sich von einander durch die r Werthe von a_0, ausserdem aber auch häufig durch die Werthe

$$z_1, z_2 \ldots z_r,$$

welche von einander verschieden sein können. Ich bemerke hier nur, *lass die Gruppen* (6), *wenn sie aus der Integralgleichung* (a) [§ 1] *ntnommen werden, allein dann, wie die Form der Constanten* a_0 *zeigt, erschiedene* z_i *enthalten können, sobald die erstere die specielle Form:*

$$z'' = f(u), \quad (p = r, \; p' = 1) \tag{a'}$$

esitzt, jedoch lauter einander gleiche z_i *aufweisen müssen, wenn die etztere Bedingung nicht besteht.*

Liefert also die Differentialgleichung (1), welche das Integral (a), as nicht die Gestalt (a') hat, definirt, die Gruppe (2), *dann bestimmt ie* $(p-n)$*-fache Wurzel* u_1 *des ersteren die* p*-fache Wurzel* $z = z_1$, *owohl, wenn* p *und* n *relativ prim sind als auch, wenn dies nicht der Fall ist.*

Für die Gleichung (1) mit dem Integrale (a') gibt die Gruppe (5) unächst an, *dass entweder zur* $(p-n)$*-fachen Wurzel* u_1 *ein* p*-faches* $_1$ *oder zum* $(p'-n')$*-fachen* u_1, r *verschiedene* z_i *gekören.* Ob beide Fälle eintreten, wird später entschieden werden.

Sobald

$$n' > p', \quad n' = p' + q',$$

uten die r, der Gruppe (5) entsprechenden, Gruppen der Integral-leichung:

$$u' = a_0 . t^{\frac{p'}{n'-p'}}. \tag{7}$$

Da dieselben sich jetzt nur durch die r verschiedenen Constanten a_0 unterscheiden, können wir sie durch die eine einzige:

$$u'^{r(n'-p')} = 0 \mid t^{r.p'} = 0$$

ersetzen. Wir schliessen demnach:

Wenn $n > p$ und n und p nicht relativ prim sind, dann lautet die zu (2) gehörige Gruppe des Integrales:

$$u'^{n-p} = 0 \mid t^p = 0, \tag{8}$$

also ebenso wie die Gruppe (4). Daher folgern wir:

Die $(n-p)$-fache Wurzel u_1 der Integralgleichung liefert, sobald $n > p$, die p-fache Wurzel $z = \infty$ $(t = 0)$, gleichgültig, ob n und p zu einander relativ prim sind oder nicht.

Es erübrigt der Fall:

$$n' = 1, \quad p' = 1, \quad \text{d. h.} \quad n = p.$$

Die Gruppe

$$U^p = 0 \mid u'^p = 0 \tag{9}$$

zerfällt in die p verschiedenen Gruppen:

$$U = c . e^{\frac{2h\pi i}{p}} . u' \quad [h = 0, 1 \ldots (p-1)], \tag{10}$$

deren jede den Typus des im § 3 (11) hergeleiteten Ausdruckes für U darstellt. Den letzteren entsprechen entweder die p verschiedenen Gruppen

$$u'^{q_h} = 0 \mid \zeta = 0$$

oder die Gruppen

$$u'^{q_h} = 0 \mid \xi = 0. \quad (h = 0, 1 \ldots (p-1))$$

In Bezug auf die weiteren Ueberlegungen, die sich an (9) knüpfen, verweise ich auf § 26.

Ich bemerke hier jedoch, dass die Entwickelung (11) des § 3 nicht ausschliesslich durch die Gruppe (9) angezeigt wird.

In anderer Schreibweise lautet nämlich die erstere:

$$(11) \qquad (U - A_0 u')^p = u'^{p+1} \cdot (A_1 + A_2 u'^{\frac{1}{p}} + \ldots)^p.$$

Es folgt demnach, dass die Differentialgleichung auch die Entwickelung (11) dann ergibt, *wenn in der ersteren die Potenzen*

$$u', u'^2, \ldots u'^p \quad \text{mit} \quad U, U^2, \ldots U^p$$

sich zu einer p ten Potenz vereinigen lassen, welche gleich dem Ausdrucke:

$$u'^{p+1} \cdot (A_0' + A_1' \cdot u'^{\frac{1}{p}} + \ldots)$$

ist.

Im Speciellen können die gebrochenen Potenzen fehlen; dann ist:

$$A_1' = A_2' = \ldots = 0.$$

§ 6.

Ausser der bisher betrachteten Gruppe:

$$U^p = 0 \mid u'^n = 0$$

kann unsere Differentialgleichung nur noch die Form:

$$(1) \qquad U^{-p} = 0 \mid u'^n = 0$$

bestimmen, in welcher u' ein n-facher Factor der Function f_0 ist, der gleichzeitig den Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_{p-1}$$

angehört.

In welchem Grössenverhältnisse p und n jetzt auch stehen mögen, es folgt stets, vorausgesetzt, dass p und n theilerfremd sind (nach § 3, (4)):

$$(2) \qquad u'^{p+n} = 0 \mid z'^p = 0,$$

d. h. *die $(p+n)$-fache Wurzel u_1 des Integrales bedingt die p-fache Wurzel $z = z_1$.*

Wenn aber

$$p = r \cdot p', \quad n = r \cdot n',$$

dann zerfällt (1) in die r verschiedenen Untergruppen:

$$(3) \qquad U^{-p'} = 0 \mid u'^{n'} = 0,$$

welche die r Gruppen:

(4) $$u'^{n'+p'} = 0 \mid (z - z_{h+1})^{p'} = 0 \quad (h = 0, 1 \ldots (r-1)$$

der Integralgleichung zur Folge haben, und es gilt hier nun das in § 5 über die Gruppen (5), (6) Gesagte, wenn dort nur $-n$ statt n und $-n'$ für n' gesetzt gedacht wird.

§ 7.

Wenden wir unsere Betrachtungen nun auf die Differentialgleichung:

(A) $$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = \frac{f_m(u)}{f_0(u)}$$

an. Dieselbe entsteht aus der allgemeinen (1) § 5, wenn in dieser

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_{m-1} = 0$$

ist.

Wie ersichtlich, muss jetzt die Gruppe:

$$U^p = 0 \mid u'^n = 0$$

genauer die Form

$$U^m = 0 \mid u'^n = 0$$

haben; d. h. es muss

$$p = m$$

sein. Die andere noch mögliche Form der Gruppe ist:

$$U^{-m} = 0 \mid u'^n = 0.$$

Es ist evident, dass sämmtliche Erwägungen (§ 5, § 6) unmittelbar auf die obige Differentialgleichung übertragbar sind, wenn man dort nur $p = m$ setzt.

Das Integral der letzteren ebenso wie das von (1) kann im Allgemeinen sich aus ganz verschiedenartigen Functionen zusammensetzen. Es kann algebraische, doppeltperiodische Functionen u. s. w. gleichzeitig enthalten.

Um also z. B. diejenigen Differentialgleichungen, welche rein algebraische Integrale $f(u, z) = 0$ haben, zu erhalten, wird man verhindern müssen, dass z logarithmisch unendlich wird; um einfach periodische Integrale zu bekommen, hat man jede algebraische Unendlichkeit auszuschliessen u. s. f.

Diese Betrachtungen haben wir im Einzelnen bei den zu untersuchenden Integralen anzustellen.

Wir wollen im Folgenden diejenige Form von (A), welche die lgebraischen Integrale (a) bedingt, *algebraisch*, die, welche die einach periodischen Integrale (b) bestimmt, *einfach periodisch* und die Form, welche die Integrale (c) [§ 1] liefert, *doppeltperiodisch* nennen.

Theil II.

Die algebraischen Integrale der Differentialgleichung

$$U^m = \frac{f_m(u)}{f_0(u)}.$$

§ 8.

Nehmen wir an, dass in der Differentialgleichung:

A) $$U^m = \frac{f_m(u)}{f_0(u)}$$

e Function f_m vom Grade ν_m, f_0 vom Grade ν_0 in u und dass

$$f_m = A.(u-k_1)^{\sigma_1}\ldots(u-k_\varkappa)^{\sigma_\varkappa}$$

$$f_0 = (u-l_1)^{\tau_1}\ldots(u-l_\lambda)^{\tau_\lambda}$$

i, wo nun

$$\sigma_1+\ldots+\sigma_\varkappa = \nu_m, \qquad \tau_1+\ldots+\tau_\lambda = \nu_0.$$

mit das Integral rein algebraisch d. h. von der Form:

) $$f(u, z) = 0 \quad [\S\ 1.]$$

, müssen wir alle diejenigen aus (A) entnehmbaren Gruppen ausliessen, welche logarithmische Unendlichkeit ergeben.

Ferner müssen jetzt aber stets solche Gruppen, sei es durch gegebene Differentialgleichung oder durch die Transformirte (§ 3), stimmt werden, welche algebraische Unendlichkeit anzeigen, da die eichung (B) verlangt, dass für gewisse Werthe u, z unendlich gross d.

Welche Gruppen können nun logarithmische Unendlichkeit ergen?

Zunächst wissen wir, dass die Gruppe

$$U^m = 0 \mid u'^m = 0,$$

che sich auf die m von einander verschiedenen Gruppen von der Form:

$$U = 0 \mid u' = 0,$$

reducirt, logarithmische Unendlichkeit angibt.

Denn aus der Gruppe:

$$U = c \,.\, u'$$

folgt

$$\log u' = c \,.\, (z - z_1)$$

d. h. der Werth $u' = 0$ lässt die Variable z logarithmisch unendlic werden.

Ausserdem ist aber nur noch die Gruppe:

$$U^m = 0 \mid u'^n = 0,$$

in der

$$n > m, \quad \mid A \mid_{n-m} \gtrless 0,$$

(nach § 4) im Stande, logarithmische Unendlichkeit anzugeben.

Die algebraische Unendlichkeit wird allein durch:

$$U^m = 0 \mid u'^n = 0,$$

wo

$$n > m \quad \text{und} \quad A_{n-m} = 0,$$

hervorgebracht.

Wie bereits erwähnt, haben wir die transformirte Differentia gleichung stets denselben Betrachtungen wie die gegebene selbst unterziehen. Die erstere lautet:

$$(A') \qquad V^m = (-1)^m \,.\, A \,.\, v^{2m+\nu_0-\nu_m} \frac{(1-k_1 v)^{\sigma_1} \ldots (1-k_\varkappa v)^{\sigma_\varkappa}}{(1-l_1 v)^{\tau_1} \ldots (1-l_\lambda v)^{\tau_\lambda}},$$

indem

$$V = \frac{dv}{dz}.$$

Nach dem Obigen darf jetzt also die Gleichung (A) nicht liefe die Gruppen:

$$U^m = 0 \mid u'^m = 0,$$

$$U^m = 0 \mid u'^{m+q} = 0,$$

falls

$$\mid A_q \mid \gtrless 0.$$

Die Gleichung (A') darf daher ebenso nicht die Gruppen:

$$V^m = 0 \mid v^m = 0,$$

$$V^m = 0 \mid v^{m+q} = 0,$$

wenn

$$| C_q | \gtrless 0,$$

ergeben, indem wir die, den Constanten A_i des § 3 hier entsprechenden Grössen mit C_i bezeichnen.

Es muss jedoch entweder mindestens *eine* Gruppe des Typus:

$$U^m = 0 \mid u'^{m+q} = 0 \text{ mit } A_q = 0$$

resp.

$$V^m = 0 \mid v^{m+q} = 0 \text{ mit } C_q = 0$$

auftreten; es können aber auch diese beiden Arten Gruppen gleichzeitig vorkommen.

Ausserdem können die Differentialgleichungen (A), (A') nur noch die Formen

$$U^m = 0 \mid u'^n = 0, \quad (n < m)$$

und

$$U^{-m} = 0 \mid u'^n = 0, \quad \left(n \gtrless m\right)$$

zulassen.

Hieraus schliessen wir, *dass der Exponent* σ_i *in* f_m *entweder* $< m$, *oder* $> m$, *falls gleichzeitig* $A_q = 0$, *sein muss.*

Der Exponent τ_i in f_0 kann dagegen

$$\gtrless m$$

sein.

§ 9.

Bezüglich der Transformirten (A') haben wir zunächst zu beachten, dass (nach § 8) nicht der Exponent von v, $= m$ sein darf.

Daher ist:

$$m + \nu_0 - \nu_m \gtrless 0.$$

Ausserdem sollte, wenn die Gruppe:

$$V^m = 0 \mid v^{m+q} = 0$$

existirt, $C_q = 0$ sein.

Nach der Gleichung (A') besteht aber die Entwickelung:

$$V = -\sqrt[m]{A} \cdot v^{\frac{2m+\nu_0-\nu_m}{m}} \cdot (1 + C_m v + C_{2m} v^2 + C_{3m} v^3 + \ldots),$$

wobei die Bezeichnung der Constanten C_i nach der der A_i [§ 3, (8)] gewählt ist.

Jetzt ist

$$q = m + \nu_0 - \nu_m,$$

also

$$C_q = C_{m+\nu_0-\nu_m}.$$

In der soeben angegebenen Reihe treten aber nur Constanten von der Form $C_{\varrho.m}$ auf.

Wenn also $\nu_0 > \nu_m$ und die Differenz $(\nu_0 - \nu_m)$ kein ganzes Vielfache von m ist, *dann ist von selbst* $C_q = 0$.

Sobald $\nu_m > \nu_0$ und $m - (\nu_m - \nu_0) > 0$, ist ebenfalls

$$C_q = 0;$$

wenn $m - (\nu_m - \nu_0) < 0$, so kommt der Werth von C_q überhaupt nicht in Frage [vergl. § 14, § 20].

Ist jedoch

$$\nu_0 > \nu_m \quad \text{und} \quad \nu_0 - \nu_m = (\varrho - 1).m,$$

dann muss, damit keine logarithmische Unendlichkeit eintrete, nothwendig die Beziehung:

$$C_{\varrho m} = 0$$

sich aus der Differentialgleichung (A') ergeben.

Die letztere liefert ausserdem nur noch die Gruppe:

$$V^m = 0 \mid v^{2m+\nu_0-\nu_m} = 0,$$

wo

$$m + \nu_0 - \nu_m < 0,$$

d. h.

$$v^{\nu_m-\nu_0-m} = 0 \mid (z - z_1)^m = 0,$$

und ausserdem die Form:

$$V^{-m} = 0 \mid v^{\nu_m-\nu_0-2m} = 0,$$

in der

$$\nu_m > \nu_0 + 2m.$$

Zu der letzteren gehört die Gruppe:

$$v^{\nu_m-\nu_0-m} = 0 \mid (z - z_1)^m = 0.$$

Besteht die Relation:

$$2m + \nu_0 - \nu_m = 0,$$

dann liegt der Fall § 3, (5) vor.

In demselben zeigt die Differentialgleichung also an, dass $z = \infty$

nur für endliche Werthe von u eintritt, denn die Transformirte gibt jetzt die Gruppe:

$$v^m = 0 \mid (z - z_1)^m = 0.$$

Die Betrachtung der Integralgleichung $f(u, z) = 0$.

§ 10.

Erfüllt die gegebene Differentialgleichung (A) sowie die Transformirte (A') die hergeleiteten Bedingungen, dann wird die Function z sicher nicht logarithmisch unendlich, dagegen für eine endliche Anzahl von Werthen u algebraisch unendlich. Weiteres wissen wir noch nicht über das Integral; dasselbe kann, wenn auch die Differentialgleichung jenen Bedingungen genügt, ausser algebraischen Functionen noch doppeltperiodische Functionen, elliptische Integrale erster und zweiter Gattung u. s. w., jedoch nicht einfach periodische resp. logarithmische Functionen enthalten.

Daher müssen wir jetzt das Integral (B) selbst betrachten. Dasselbe hat die Form:

$$\sum_0^u{}_i Z_i . u^i = 0,$$

wo

$$Z_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} z + \ldots + a_m^{(i)} . z^m.$$

Der Grad von z, der gleich m, ist direct durch den Grad der vorgelegten Differentialgleichung bestimmt. Es fragt sich nun, welchen Werth die Zahl μ besitzt.

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall:

$$m + \nu_0 - \nu_m > 0,$$

in welchem die gegebene Gleichung (A) keine algebraische Unendlichkeit bestimmen möge ($\sigma_i < m$).

Alsdann gibt die, durch die Gruppe der Transformirten bedingte, Form:

$$v^{m+\nu_0-\nu_m} = 0 \mid t^m = 0$$

an, *dass dem m-fachen Werthe* $z = \infty\,(t = 0)$ *die* $(m + \nu_0 - \nu_m)$*-fache Wurzel* $u = \infty$ *entspricht.*

Aus der Integralgleichung ersehen wir, dass zu einem Werthe μ Werthe u gehören. Die übrigen für $z = \infty$ eintretenden $\mu - m + \nu_0 - \nu_m$) Wurzeln u können aber weder unendlich noch endlich sein. Denn die unendlich grossen Werthe von u, welche allein durch die Transformirte bestimmt werden, sind bereits erschöpft, und die endlichen jener Wurzeln u, welche durch die Gruppe:

$$u'^q = 0 \mid t^m = 0 \quad \left(q \gtreqless m\right)$$

angegeben werden, sind durch unsere Annahme ausgeschlossen. Daher folgt in diesem Falle:

$$\mu = m + \nu_0 - \nu_m.$$

Wir können somit allgemein sagen:

Da die zu dem Werthe $z = \infty$ gehörigen μ Wurzeln u in (B) *durch die Differentialgleichung* (A) *resp.* (A′) *geliefert werden müssen, kennt man ihre Anzahl d. h. μ.*

In den folgenden Betrachtungen werden wir, noch einfacher, auf den Werth von μ ganz unmittelbar geführt werden.

§ 11.

Es kommt nun weiter darauf an, zu entscheiden, ob das Integral $f = 0$ die angegebene ganz allgemeine Form besitzt oder nicht. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Differentialgleichung. Dieselbe enthält z nur in dem Differential $(dz)^m$, also:

Die Differentialgleichung bleibt ungeändert, wenn man in ihr:

$$(z - z_1) \cdot e^{\frac{2h\pi i}{m}} \text{ statt } z \quad (h = 0, 1 \ldots \overline{m-1})$$

setzt.

Oder, mit anderen Worten:

Die gegebene Differentialgleichung (A) *sagt von der Integralfunction u die Eigenschaft aus, dass dieselbe ungeändert bleibt, wenn die Variable*

$$z \text{ durch } z' \cdot e^{\frac{2h\pi i}{m}}$$

ersetzt wird d. h. dass diejenige Gleichung, welche u definirt, bei eben derselben Substitution ungeändert bleibt.

Diejenige Gleichung, welche direct u als Function von z bestimmt, ist aber in unserem Falle die Integralgleichung:

$$f(u, z) = 0.$$

Dieselbe unterliegt daher den m Bedingungen:

$$f(u, z') = f\left(u, z' \cdot e^{\frac{2h\pi i}{m}}\right) \quad [h = 0, 1 \ldots \overline{m-1}].$$

Diesen Beziehungen wird aber nur dann Genüge geleistet, wenn die Integralgleichung

$$f(u, z) = 0$$

*ezüglich z allein die m*te *Potenz enthält.*

Statt z kann man, wie ersichtlich, ohne Weiteres z' schreiben, ndem dann z_1 die Integrationsconstante bezeichnet.

Der soeben gemachte Schluss verwandelt nun die Gleichung (B) ınmittelbar in:

$$f(u, z) = 0 = \sum_{0}^{\mu} i v^i . (a_0^{(i)} + a_m^{(i)} . z'^m)$$

der:

$$z'^m = \frac{P_0}{P_m},$$

B)

enn P_0, P_m ganze Functionen von u sind, P_0 den Grad μ_0, P_m den rad μ_m hat.

Die grössere von den beiden Zahlen μ_0, μ_m ist $= \mu$. Wir kenen somit die Form der algebraischen Integrale, welche die Differentialgleichung (A) liefern kann. Die zu denselben gehörige Form er letzteren könnte man durch Differentiation von (B) und Verbinung des Differentiations-Resultates mit der Integralgleichung finden. in solches Verfahren wäre jedoch unzweckmässig, da es nicht den meren Zusammenhang, der zwischen der Differentialgleichung und rem Integral besteht, erkennen lässt.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Ordnung der letzren, $m > 1$ ist und lassen dann die Behandlung der Differentialeichung (A) für $m = 1$ folgen.

Herleitung der algebraischen Form der Differentialgleichung (*A*), $m > 1$.

§ 12.

Das Integral (B) verlangt zunächst, dass die Gruppe:

$$u^{(0)^{n_0}} = 0 \quad | \quad z'^m = 0$$

steht, wo $u^{(0)}$ ein n_0-facher Factor von P_0 und

$$u^{(0)} = u - u_0$$

Die Grösse u_0 bezeichnet eine Constante.

Während die linke Seite jener Gruppe bezüglich u_0 und n_0 ve änderlich ist, ist ihre rechte Seite constant, nämlich:

$$(z-z_1)^m.$$

Sobald $n_0 = m$, ist in der Gruppe:

(1) $$u^{(0)m} = 0 \mid z'^m = 0,$$

die Grösse $u^{(0)}$ weder ein Factor von f_m noch von f_0 (§ 3. (5)).

Die m-fachen Factoren $u^{(0)}$ von P_0 sind also besonders ausg zeichnet.

Die für $n_0 = m-p$ bestehende Gruppe:

(2) $$u^{(0)m-p} = 0 \mid z'^m = 0$$

hat die Form:

(2′) $$U^m = 0 \mid u^{(0)p} = 0 \quad (\S\ 3,\ (3))$$

zur Folge, in welcher daher $u^{(0)p}$:

(a) *Factoren vvn f_m*

repräsentirt. Ob umgekehrt aus der Gruppe (2′) stets (2) folg haben wir nachher zu untersuchen.

Wenn $n_0 = m+p$, ist:

(3) $$u^{(0)m+p} = 0 \mid z'^m = 0,$$

also

(3′) $$U^{-m} = 0 \mid u^{(0)p} = 0 \quad (\S\ 3,\ (4)),$$

wo nun $u^{(0)p}$:

(b) *Factoren von f_0*

darstellt.

Ist $u^{(m)}$ ein n_m-facher Factor von P_m, dann folgt:

(4) $$u^{(m)n_m} = 0 \mid t^m = 0, \quad \left[t = \frac{1}{z}, \quad u^{(m)} = u - u_m\right].$$

Die linke Seite dieser Gruppe ist bez. u_m und n_m veränderlich, di rechte constant. Man erhält nunmehr die Form:

(4′) $$U^m = 0 \mid u^{(m)^{m+n_m}} = 0,$$

deren rechte Seite

(a′) *Factoren von* f_m

angibt. Zur Gruppe (4′) gehört immer nur die eine Gruppe (4), sei es, dass m, q_i relative Primzahlen sind oder nicht [§ 5., (8)].

Somit haben wir zu setzen (nach (1), (2), (3); (4))

(I) $$\begin{cases} P_0 = a(u-a_1)^{m-p_1} \ldots (u-a_\sigma)^{m-p_\sigma}.(u-a_{\sigma+1})^{m+p_{\sigma+1}} \ldots \\ \qquad \times (u-a_\alpha)^{m+p_\alpha}.(u-c_1)^m \ldots (u-c_\gamma)^m \\ P_m = (u-b_1)^{q_1-m} \ldots (u-b_\beta)^{q_\beta-m}, \end{cases}$$

wo die Grössen a, a_i, b_i, c_i complexe Zahlen, die p_i, q_i ganze positive Zahlen bedeuten.

Wie ersichtlich, bestehen zunächst die Ungleichungen:

$$m > p_i > 0, \quad (i = 1,2 \ \ldots \ \sigma); \quad p_i > 0, \quad (i = \sigma+1, \ \ldots \ \alpha);$$
$$q_i > m, \quad (i = 1,2 \ \ldots \ \beta).$$

Nachdem wir bisher die durch P_0 und P_m gelieferten Wurzeln u der ntegralgleichung (B) betrachtet haben, wenden wir uns nun zu der Untersuchung der übrigen ausgezeichneten Werthe von u und z.

Es existirt in (B) nur die eine mehrfache endliche Wurzel $z = z_1$, nd zwar ist dieselbe m-fach. Alle anderen endlichen Wurzeln z, welche zu einem Werthe u gehören, der nicht Wurzel von $P_0 = 0$ oder $P_m = 0$ ist, sind in der Anzahl m vorhanden und von einander erschieden, wie die Form von (B) zeigt. Ausserdem existirt nur och die m-fache Wurzel $z = \infty$.

Hieraus schliessen wir: wenn in der Gruppe (2′) die Zahlen m nd p den Factor r gemeinsam haben, der nothwendigerweise nur leiner als m sein kann, dann können zur Wurzel $u = u_0$ nicht r erschiedene z gehören, sondern nur der m-fache Werth $z = z_1$, d. h. er Gruppe (2′) *entspricht stets allein die Form* (2). *Ebenso gehört zu* 3′) *allein die Gruppe* (3), *wenn* m *und* p *einen gemeinsamen Factor* r *nthalten, der kleiner als* m *ist.* Ist der letztere aber gleich m, was n diesem Falle möglich ist, so können aus (3′) nach § 5. ((5), (6)) uch die m Gruppen:

$$u^{(0)^{p'}} = 0 \mid (z-z^{(h)}) = 0 \quad [p = m.p', \ h = 1, 2 \ \ldots \ m]$$

gefolgert werden, wo nun $u^{(0)}$ weder ein Factor von P_0 noch von P_m ist.

Die Gruppe (3′) hat hingegen allein die Form (3) zur Folge, wenn m und p theilerfremd sind § 6. (2)].

Die sämmtlichen vielfachen Wurzeln u der Integralgleichung (B) werden gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

d. h. durch:

$$P_m P_0' - P_0 P_m' = 0,$$

wenn

$$P_0' = \frac{dP_0}{du}, \quad P_m' = \frac{dP_m}{du}.$$

Dieser Ausdruck ist daher von der Form:

$$P_m P_0' - P_0 P_m' = C \cdot \prod_{i=1}^{\gamma} (u-c_i) \cdot (u-a_1)^{m-1} \ldots (u-a_\sigma)^{m-p_1-1} \ldots (u-a_\sigma)^{m-p_\sigma-1}$$

$$\times (u-a_{\sigma+1})^{m+p_{\sigma+1}-1} \ldots (u-a_\alpha)^{m+p_\alpha-1} \cdot (u-b_1)^{q_1-m-1} \ldots$$

$$\times (u-b_\beta)^{q_\beta-m-1} \cdot (u-a_{\alpha+1})^{p_{\alpha+1}} \ldots (u-a_\tau)^{p_\tau}.$$

Derselbe enthält ausser den Factoren von P_0 und P_m im Allgemeinen noch neue Factoren:

$$(u-a_{\alpha+1})^{p_{\alpha+1}}, \quad \ldots \quad (u-a_\tau)^{p_\tau},$$

welche jedoch, wie leicht ersichtlich, nicht nothwendig existiren. Die Grösse C ist eine Constante.

Die Wurzeln

$$u = a_{\alpha+1}, \ \ldots \ a_\tau$$

können, in (B) eingesetzt, nicht $z^m = 0$ zur Folge haben, wenn wir annehmen, dass alle $n.m$-fachen [n eine positive ganze Zahl] Wurzeln von $P_0 = 0$ unter den $a_{\sigma+1}, \ldots a_\alpha$ enthalten sind. Bei dieser Annahme bestehen daher nach dem Obigen die Gruppen:

$$(5) \quad (u-a_i)^{p_i+1} = 0 \mid (z-z_i^{(k)}) = 0 \quad [i = \alpha+1, \ \ldots \ \tau; \ k = 1,2 \ldots m]$$

aus welchen:

$$(5') \quad U^{-m} = 0 \mid (u-a_i)^{p_i . m} = 0$$

olgt. Die letzteren Gruppen haben aber dieselbe Gestalt, wie die urch die $n.m$-fachen [n eine positive ganze Zahl] Wurzeln von $_0 = 0$ erzeugten Gruppen. Diese Wurzeln sind also $(n-1)m$-fache, ie Werthe $a_{\alpha+1} \ldots a_\tau$, $p_i.m$-fache

$_0')$ *Wurzeln von* f_0,

eshalb die Grössen $a_{\alpha+1}, \ldots a_\tau$ *und die* $n.m$*-fachen Wurzeln von* $_0 = 0$ *in* f_0 *unterschiedslos vorkommen.* Die letzteren sind also ebenso nbekannt wie die Grössen c_i. Daher ist es zweckmässig, anzunehen, dass keiner der Exponenten $p_{\sigma+1}, \ldots p_\alpha$ ein ganzes Vielfache von ist, indem dann die $n.m$-fachen Wurzeln von $P_0 = 0$ unter den , von denen gewisse unter sich identisch werden können, enthalten nd. Alsdann bilden die Grössen $a_{\alpha+1}, \ldots a_\tau$ ausser Gruppen von r Form (5) noch andere von der Gestalt:

$$(u-a)^{m(p+1)} = 0 \mid z'^m = 0,$$

raus wiederum

$$U^{-m} = 0 \mid (u \quad a)^{p.m} = 0$$

lgt, indem die zuletzt characterisirten Grössen der $a_{\alpha+1}, \ldots a_\tau$ nn identisch mit den $n.m$-fachen c_i, jedoch nicht bekannt sind, il sie sich von den übrigen, durch (5′) gegebenen, nicht unterheiden lassen. Die Grösse γ gibt die Anzahl aller m-fachen Wurln c_i von $P_0 = 0$ an, indem man die $n.m$-fachen c_i als n einzelne fache c_i zu rechnen hat.

Setzen wir zur Abkürzung

$$m-p_i = \pi_i, \ (i = 1, 2 \ldots, \sigma); \quad m+p_i = \pi_i, \ (i = \sigma+1, \ldots \alpha)$$
$$p_i = \pi_i, \ (i = \alpha+1, \ldots \tau); \quad q_i - m = \varkappa_i,$$

ist auch:

$$) \quad P_m P_0' - P_0 P_m'$$

$$C.\prod_1^\alpha{}_i (u-a_i)^{\pi_i-1}.\prod_{\alpha+1}^\tau{}_i (u-a_i)^{\pi_i}.\prod_1^\beta{}_i (u-b_i)^{\varkappa_i-1}.\prod_1^\gamma{}_i (u-c_i)^{m-1}.$$

ese Ueberlegungen ergeben nunmehr unmittelbar [aus (a), (a′); (b),)]:

$$\text{I)} \quad \begin{cases} f_m = c.\prod_1^\sigma{}_i (u-a_i)^{p_i}.\prod_1^\beta{}_i (u-b_i)^{q_i} \\ f_0 = \prod_{\sigma+1}^\alpha{}_i (u-a_i)^{p_i}.\left[\prod_{\alpha+1}^\tau{}_i (u-a_i)^{p_i}\right]^m. \end{cases}$$

Die algebraische Form unserer Differentialgleichung lautet daher:

$$(\text{IV})\quad U^m = c.\frac{(u-a_1)^{p_1}\ldots(u-a_\sigma)^{p_\sigma}.(u-b_1)^{q_1}\ldots(u-b_\beta)^{q_\beta}}{(u-a_{\sigma+1})^{p_{\sigma+1}}\ldots(u-a_\alpha)^{p_\alpha}.[(u-a_{\alpha+1})^{p_{\alpha+1}}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}]^n}$$

indem nun aber zwischen den Constanten derselben Relationen b stehen müssen. Die Grösse c ist constant und aus einer gegeben Differentialgleichung immer direct zu entnehmen. Ferner ist na dem Früheren:

$$p_i < m,\ (i = 1,\ 2\ \ldots\ \sigma);\quad q_i > m,\ (i = 1, 2\ \ldots\ \beta).$$

Haben die Exponenten

$$p_i(i = 1, 2\ \ldots\ \sigma,\ \sigma+1\ \ldots\ \alpha),\quad q_i(i = 1,\ \ldots\ \beta)$$

einen und denselben Theiler mit m gemeinsam, so ist die Gleichur (IV) reductibel und ihr irreductibler Factor ist in diesem Falle d Gegenstand der Untersuchung [1]).

§ 13.

Wir gehen nunmehr zur näheren Betrachtung der Differentia gleichung (IV) über.

Zunächst bemerken wir, dass die Constante c, welche die Variab z nur um einen constanten Factor ändert, unwesentlich ist und dah gleich eins angenommen werden kann.

Das Integral (B), welches lautet:

---

1) Nach dem Abschlusse dieser Arbeit wurde wir eine Abhandlung v *Liouville* [Journal de l'école polytechnique t. XIV. p. 131] bekannt, in welch er bereits das aus meinen Untersuchungen unmittelbar folgende Theore dass das algebraische Integral:

$$\int du \sqrt[m]{R(u)} = \text{Const} + R_1(u)\sqrt[m]{R(u)},$$

[R, R_1 rationale Functionen von u]

ist, in anderer Weise herleitet. Diesen Satz kann er nach seiner Metho jedoch nur dazu verwerthen, die Berechnung des angegebenen Integral auf die Auflösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen erst Ordnung (ibid. p. 190.) zurückzuführen, während es mir hier darauf a kommt, das erstere *direct* auszuwerthen.

$$3) \qquad z'^m = a \cdot \frac{\prod_1^\alpha (u-a_i)^{\pi_i} \cdot \prod_1^\gamma (u-c_i)^m}{\prod_1^\beta (u-b_i)^{\varkappa_i}}, \quad [\S\ 11,\ \S\ 12\ (I)]$$

athält die Constanten:

$$a_1, \ \ldots\ a_\sigma, \ \ldots\ a_\alpha; \quad b_1, \ \ldots\ b_\beta; \quad p_i (\text{resp. } \pi_i); \quad q_i (\text{resp. } \varkappa_i),$$

elche direct durch die Differentialgleichung angegeben werden, ausser-
em aber die Grössen:

$$c_1, \ \ldots\ c_\gamma,$$

elche existiren *können*, sobald

$$\mu_0 \geqq m,$$

e aber nicht vorhanden sind, wenn

$$\mu_0 < m.$$

Tragen wir nun in der Gleichung (II), die Ausdrücke (I) ein, dem wir beachten, dass

$$P_0 . P_m . \frac{d \log \frac{P_0}{P_m}}{du} = P_m P_0' - P_0 P_m',$$

nn folgt sofort die Relation:

$$:) \qquad M . T = \Gamma . (AB - B . A) + \Gamma' . AB,$$

dem wir die Abkürzungen anwenden:

$$(u-a_i)^{\pi_i} = \overline{A}; \quad \prod_1^\beta (u-b_i)^{\varkappa_i} = \overline{B}; \quad M = \frac{C}{a};$$

$$\frac{d\overline{A}}{du} = \prod_1^\alpha (u-a_i)^{\pi_i - 1} . A; \quad \frac{d\overline{B}}{du} = \prod_1^\beta (u-b_i)^{\varkappa_i - 1} . B;$$

$$A = A . \sum_1^\alpha \frac{\pi i}{u-a_i}; \quad B = B . \sum_1^\beta \frac{\varkappa_i}{u-b_i};$$

$$= \prod_1^\alpha (u-a_i); \quad B = \prod_1^\beta (u-b_i); \quad \Gamma = \prod_1^\gamma (u-c_i);$$

$$T = \prod_{\alpha+1}^\tau (u-a_i)^{p_i}; \quad \Gamma' = m \Gamma . \sum_1^\gamma \frac{1}{u-c_i}.$$

Hier sind die Ausdrücke A, B, A, B, T direct durch die Diffe-

rentialgleichung (IV) *bekannt, und es kommt nun darauf an, aus* [illegible] *die Werthe Γ, M zu finden.* Es ist $\Gamma' = \frac{d\Gamma}{du}$.

Das letztere könnte geschehen, indem man die Gleichung (C) nach Potenzen von u entwickelt und deren Coefficienten gleich Null setzt, wodurch man nicht allein die gesuchten Grössen, sondern auch die weiteren zwischen den Constanten von (IV) bestehenden Beziehungen erhielte. Dieses Verfahren würde jedoch in vielen Fällen einen zu grossen Rechnungsaufwand erfordern.

Der Grad der linken Seite von (C) in u ist

$$= \sum_{\alpha+1}^{\tau} p_i,$$

der der rechten Seite:

$$= \alpha + \beta + \gamma - 1,$$

falls der Coefficient des höchsten Gliedes (in u) der letzteren, welcher (für $u = \infty$ zu erhalten) lautet:

$$\sum_1^{\alpha} \pi_i - \sum_1^{\beta} \varkappa_i + m \cdot \gamma,$$

von Null verschieden ist.

Das Nähere über den Grad und die Behandlung der aufgestellten Relation (C) werden wir in den nun zu behandelnden Fällen:

$$\begin{aligned} &I. && \mu_0 = \mu_m = \mu, \\ &II. && \mu_0 > \mu_m, \quad \mu_0 = \mu, \\ &III. && \mu_m > \mu_0, \quad \mu_m = \mu \end{aligned}$$

auseinandersetzen. Hier ist μ_0 der Grad von P_0, μ_m der von P_m [§ 11, (B)].

Der Fall I. $(\mu_0 = \mu_m = \mu)$.

§ 14.

In diesem Falle, für welchen der Grad von P_0 gleich dem von P_m ist, kann, wie die Integralgleichung (B) zeigt, für

$$u = \infty \quad \text{nur} \quad z'^m = \text{Const.}$$

eintreten d. h. zu dem Werthe $u = \infty$ ein System von m verschiedenen endlichen Werthen z gehören.

Es bestehen also die Gruppen:

$$v^{\nu} = 0 \mid (z - z^{(h)}) = 0 \qquad (h = 1, 2 \ldots m),$$

wo ν eine ganze positive Zahl ist.

Wenn $\nu > 1$ ist, dann muss:

$$(1)\qquad \begin{cases} P_0 = \pi_0^{(0)} + \pi_1^{(0)}.u + \ldots + \pi^{(0)}_{\mu-\nu}.u^{\mu-\nu} + \pi^{(0)}_{\mu}.u^{\mu} \\ P_m = \pi_0^{(m)} + \pi_1^{(m)}.u + \ldots + \pi^{(m)}_{\mu-\nu'}.u^{\mu-\nu'} + \pi^{(m)}_{\mu}.u^{\mu} \end{cases}$$

sein, wo

$$\nu' \geqq \nu.$$

Wie ersichtlich kann, ohne Aenderung der angegebenen Gruppen, auch in P_0, ν' statt ν und dann in P_m, ν für ν' gesetzt werden.

Den letzteren ist aber die Gruppe:

$$V^{-m} = 0 \mid v^{m(\nu-1)} = 0$$

zugeordnet (§ 5, (5), (6)), welche daher durch die Transformirte bestimmt werden muss, d. h. es ist [n. § 8 (A′)]:

$$2m + \nu_0 - \nu_m + m(\nu-1) = 0$$

oder

$$(\alpha)\qquad \nu_m - \nu_0 = m(\nu+1).$$

Diese Gleichung bestimmt den Werth von ν, indem ν_m, ν_0 bekannt. [§ 8, (A)], und ergibt ausserdem die Bedingung

$$\nu_m > \nu_0.$$

Da nach § 9 *nicht*:

$$m + \nu_0 - \nu_m = 0$$

sein darf, so ist stets

$$\nu > 0.$$

Aus den Werthen (I), [§ 5] schliessen wir nun unmittelbar:

1) $$\mu = \sum_1^{n} \pi_i + \gamma.m$$

2) $$\mu = \sum_1^{\beta} \varkappa_i.$$

Die Gleichung 2) *gibt ohne Weiteres den Werth* μ *an, da aus der gegebenen Differentialgleichung* (IV), m, q_i, β *bekannt.*

Die Bedeutung der Grössen π_i, $\varkappa_i$ wurde § 12, (II) angegeben. Es folgt nun:

a) $$\gamma.m = \sum_1^{\beta} \varkappa_i - \sum_1^{\alpha} \pi_i$$

also das unbekannte γ: die Anzahl der Grössen c_i.

Aus der Relation (II) [§ 12] lesen wir die folgende ab:

3) $$2\mu - \nu - 1 = \sum_1^{\tau} \pi_i + \sum_1^{\beta} \varkappa_i - (\alpha+\beta) + \gamma.(m-1).$$

Subtrahirt man die Summe der Gleichungen 1), 2) von der letzteren, so folgt:

b) $$\nu = \alpha + \beta + \gamma - 1 - \sum_{\alpha+1}^{\tau} \varepsilon_i p_i.$$

Statt der Gleichungen 1), 2), 3) betrachten wir nun die ihnen äquivalenten:

2), a), b),

von denen die letzte den Werth ν ergibt und daher den oben für den letzteren erhaltenen Ausdruck (α) repräsentirt.

Die Relation a) verlangt, *dass der Ausdruck*

$$\sum_{1}^{\beta} \varepsilon_i \varkappa_i - \sum_{1}^{\alpha} \varepsilon_i \pi_i$$

entweder Null oder ein Vielfaches von m ist.

§ 15.

Die rechte Seite unserer Relation (C) ist jetzt in u vom Grade

$$\alpha + \beta + \gamma - 2,$$

da die Bedingung a) besteht. [s. § 13, am Ende.]

Die linke Seite hat den Grad [nach b)]:

(1) $$\sum_{\alpha+1}^{\tau} \varepsilon_i p_i = \alpha + \beta + \gamma - \nu - 1,$$

welcher für $\nu = 1$ mit dem ersteren übereinstimmt.

Denken wir uns die Gleichung (C) nach Potenzen von u geordnet, so lautet hiernach der Exponent der höchsten:

$$\alpha + \beta + \gamma - 2,$$

und das Verschwinden der Coefficienten dieser Entwickelung bestimmt daher

$$\alpha + \beta + \gamma - 1$$

Bedingungen, welche zwischen den Constanten der Differential- und Integralgleichung bestehen müssen.

Da die Berechnung der γ Constanten c_i und der Grösse M, $(\gamma+1)$ Gleichungen erfordert, *bleiben*

$$\alpha + \beta - 2$$

Relationen zwischen den Constanten der gegebenen Differentialgleichung übrig, welche die letztere erfüllen muss, um ein algebraisches Integral zu besitzen.

Wie beschaffen muss nun die Differentialgleichung (A) *sein, wenn ihr Integral algebraisch ist, und keine Beziehung zwischen ihren Constanten herrscht?*

Die Bedingung hierfür ist nach dem Gesagten:

$$\alpha+\beta=2.$$

)ieselbe wird befriedigt:

. durch die Werthe $\alpha=1,\ \beta=1,$

. - - - $\alpha=0,\ \beta=2,$

nd - - - $\alpha=2,\ \beta=0.$

)as letzte Werthepaar widerspricht jedoch unserer Annahme, dass $_m$ den Grad μ habe, dass also $\beta>0$ sei.

Es existiren somit zwei Classen der Differentialgleichung (A), elche algebraische Form besitzen, ohne dass eine Beziehung wischen ihren Constanten besteht.

$\alpha=1,\ \beta=1$. Die Differentialgleichung hat die Gestalt:

, *indem* $\sigma=0$:

$$U^m=\frac{(u-b)^q}{(u-a_1)^{p_1}.[(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}]^m},\qquad \left(q>m,\ p_1\gtrless m\right)$$

, *indem* $\sigma=1$:

$$U^m=\frac{(u-a_1)^{p_1}(u-b)^q}{[(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}]^m},\qquad (p_1<m,\ q>m).$$

)bald jetzt die Coustante $|\,b\,|\gtrless 0$, folgt

$$P_m=(u-b)^{q-m},$$

)raus ersichtlich, dass dann

$$\nu=1$$

in muss. Wenn jedoch $b=0$ eintritt, so ist der Werth von ν iner Bedingung unterworfen. Alsdann gilt in den Fällen *a.*, *b.* nach .4 [b)] die Gleichung:

$$\nu=\gamma+1-\sum_2^\tau{}_i p_i.$$

eselbe lautet aber in den letzteren, falls $|\,b\,|\gtrless 0$:

$$\gamma=\sum_2^\tau{}_i p_i.$$

Unabhängig von dem Werthe von b, bestehen hingegen die aus .4 [2), a)] entnehmbaren Gleichungen:

$$\mu=q-m;\quad \gamma.m=q\pm p_1-2m,$$

sich das untere Vorzeichen auf den Fall *a.*, das obere auf *b.* be- ht. Demnach hat das Integral:

a. $$z' = \int du \,.(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}\,.\sqrt[m]{\frac{(u-a_1)^{p_1}}{(u-b)^q}}$$

die Lösung

$$z' = \sqrt[m]{a}(u-a_1)(u-b)(u-c_1)\ldots(u-c_\gamma).\sqrt[m]{\frac{(u-a_1)^{p_1}}{(u-b)^q}}$$

b. Das Integral:

$$z' = \int du.\frac{(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}}{\sqrt[m]{(u-a_1)^{p_1}.(u-b)^q}}$$

besitzt den Werth:

$$z' = \sqrt[m]{a}\,.\frac{(u-a_1)(u-b)(u-c_1)\ldots(u-c_\gamma)}{\sqrt[m]{(u-a_1)^{p_1}.(u-b)^q}},$$

welcher übrigens aus *a.* zu erhalten ist, wenn man dort $-p_1$ fü
setzt. Die Constanten c_i werden in *a.*, *b.* gegeben durch die G
chung (C), die jetzt von der Form ist:

(5) $$MT = \Gamma.[(m \pm p_1)(u-b)-(q-m)(u-a_1)]+m\,.\,\Gamma'.(u-a_1)(u-$$

Es ist zweckmässig, statt der c_i die Coefficienten der Potenzre

(6) $$\Gamma = g_0+g_1u+\ldots+g_\gamma.u^\gamma, \qquad [g_\gamma = 1]$$

zu suchen. Dies geschieht entweder durch das Nullsetzen der Co
cienten in der Potenzentwickelung von (5), was hier wenig Schwie
keiten bietet, oder durch γ-malige Differentiation der Gleichung
nach u für den Werth $u = 0$, wodurch man unmittelbar die Grös

$$M,\ \Gamma(0),\ \Gamma'(0),\ \ldots\ \Gamma^{(\gamma-1)}(0),$$

d. h. die Werthe von

$$M,\ g_0,\ g_1\ \ldots\ g_{\gamma-1}$$

findet.

2. $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Die Differentialgleichung lautet:

$$U^m = \frac{(u-b_1)^{q_1}.(u-b_2)^{q_2}}{\{(u-a_1)^{p_1}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}\}^m}, \qquad (q_1 > m,\ q_2 > m)$$

und es gelten nach § 14 [2), a), b)] die Relationen:

(7) $$\mu = q_1 + q_2 - 2m$$

(8) $$\gamma . m = \mu$$

(9) $$\nu = \gamma + 1 - \sum_1^\tau p_i .$$

Da für $\gamma = 0$, $\mu = 0$ eintreten würde, kann γ hier nie den Werth Null annehmen.

Das Integral:

$$z' = \int du . \frac{(u-a_1)^{p_1} \ldots (u-a_\tau)^{p_\tau}}{\sqrt[m]{(u-b_1)^{q_1} . (u-b_2)^{q_2}}}$$

hat somit den Werth:

$$z' = \sqrt[m]{a} . \frac{(u-b_1)(u-b_2)(u-c_1)\ldots(u-c_\gamma)}{\sqrt[m]{(u-b_1)^{q_1} . (u-b_2)^{q_2}}} .$$

Die Auffindung der c_i geschieht hier ganz analog wie vorher.

§ 16.

Ich wende mich nun zu dem allgemeinen Falle:

$$\alpha + \beta > 2.$$

Um die $(\alpha + \beta - 2)$ Bedingungen, welche die Constanten unserer Differentialgleichung erfüllen müssen, zu erhalten, haben wir die Grössen M, Γ, Γ' aus der Gleichung (C) zu eliminiren. Die letztere bringen wir zu diesem Zwecke auf die Form:

(C') $$M . M = \Gamma + N . \Gamma',$$

wo also

$$M = \frac{T}{AB - BA}, \qquad N = \frac{m . A . B}{AB - BA}.$$

Da die Function Γ vom Grade γ, so ist:

$$\frac{d^\gamma \Gamma}{du^\gamma} = \Gamma^{(\gamma)} = \gamma!$$

und

$$\Gamma^{(\gamma + r)} = 0, \quad (r > 0).$$

Differenziren wir daher die Gleichung (C'), $(\gamma + 1)$-mal, so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$
(1)\quad
\begin{cases}
M.M' = (1+N')\Gamma' + N\Gamma'' \\
M.M'' = N''\Gamma' + (1+2N')\Gamma'' + N\Gamma''' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M.M^{(s)} = N^{(s)}.\Gamma' + s_1.N^{(s-1)}.\Gamma'' + s_2 N^{(s-2)}.\Gamma''' + \ldots \\
\quad \ldots + s_{s-2} N''\Gamma^{(s-1)} + (1+s_{s-1}N')\Gamma^{(s)} + N.\Gamma^{(s+1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M.M^{(\gamma-1)} = N^{(\gamma-1)}\Gamma' + (\gamma-1)_1 N^{(\gamma-2)}.\Gamma'' + \\
\quad + (\gamma-1)_2 N^{(\gamma-3)}.\Gamma''' + \ldots + (\gamma-1)_{\gamma-3} N''\Gamma^{(\gamma-2)} + \\
\quad + (1+(\gamma-1)_1 N')\Gamma^{(\gamma-1)} + N.\gamma! \\
M.M^{(\gamma)} = N^{(\gamma)}\Gamma' + \gamma_1 N^{(\gamma-1)}.\Gamma'' + \gamma_2 N^{(\gamma-2)}.\Gamma''' + \ldots \\
\quad \ldots + \gamma_{\gamma-3}.N'''.\Gamma^{(\gamma-2)} + \gamma_{\gamma-2}.N''\Gamma^{(\gamma-1)} + (1+\gamma_1.N').\gamma! \\
M.M^{(\gamma+1)} = N^{(\gamma+1)}.\Gamma' + (\gamma+1)_1.N^{(\gamma)}.\Gamma'' + \\
\quad + (\gamma+1)_2.N^{(\gamma-1)}\Gamma''' + \ldots + (\gamma+1)_{\gamma-3}N''''.\Gamma^{(\gamma-2)} + \\
\quad + (\gamma+1)_{\gamma-2}.N'''.\Gamma^{(\gamma-1)} + (\gamma+1)_{\gamma-1}N''.\gamma!
\end{cases}
$$

indem hier die Striche Differentialquotienten nach u, die Grösse s_i, $(\gamma+k)_i$ die bekannten Binomialcoefficienten bezeichnen mögen.

Die hieraus folgende Determinante, D, gleich Null gesetzt, is nun eine Bedingung, welche nicht die c_i und M, sondern die Variabl u und die übrigen Constanten enthält. Würde man diese Deter minante ausführen und die Coefficienten ihrer Potenzentwickelung gleich Null setzen, so müsste man $(\alpha+\beta-2)$ Bedingungen finden Wir verfahren indessen anders, um die letzteren zu erhalten.

Ertheilen wir nämlich der Variablen u die Werthe

$$a_i\,[i = 1, 2 \ldots (\alpha-1)],$$

so ist:

$$A = 0 \quad \text{d. h.} \quad N = 0$$

und die Gleichung:

$$(D)_{u=\alpha_i} = 0, \quad [i = 1, 2 \ldots (\alpha-1)]$$

repräsentirt $(\alpha-1)$ der gesuchten Bedingungen.

Setzt man

$$u = b_i, \quad [i = 1, 2 \ldots (\beta-1)],$$

so wird

$$B = 0 \quad \text{also} \quad N = 0,$$

und man erhält die übrigen $(\beta-1)$ Bedingungen aus:

$$(D)_{u=b_i} = 0, \quad [i = 1, 2 \ldots (\beta-1)].$$

In dieser Weise haben wir die

$$\alpha+\beta-2$$

Bedingungen, welchen die Constanten unserer Differentialgleichung genügen müssen, gefunden [1]).

Dieselben sind, in Verbindung mit den früher [§§ 8, 9, 12, 14] *hergeleiteten, nothwendig und hinreichend für die algebraische Form der Differentialgleichung* (A).

Erfüllt die letztere alle diese Anforderungen, dann berechnet man aus der Gleichung (C′) und den γ ersten Gleichungen des Systems 1), die $(\gamma+1)$ Unbekannten M, $T(0)$, $T'(0)$, ... $T^{(\gamma-1)}(0)$, wodurch das Integral (B) [§ 13.] vollkommen bestimmt ist. Denn, wie ich § 21. zeige, folgt aus dem Werthe M sofort der von a nach der Formel:

$$a = \left(\frac{m}{M}\right)^m \cdot \frac{1}{c},$$

wo c durch die Differentialgleichung gegeben ist. [§ 12., (IV)].

Oft ist es zweckmässig, die Gleichung (C) selbst anstatt der soeben aufgestellten Bedingungen zu untersuchen; insbesondere, wenn, was sehr oft der Fall ist, manche der letzteren a priori bekannt sind.

Sobald $\nu \geqslant 1$ ist, kennen wir ferner nach § 14., (1), stets a priori die $(\nu-1)$ Relationen:

$$\pi_i^{(0)} = 0 \quad [i = (\mu-\nu+1), \ \ldots \ (\mu-1)],$$

welche zwischen den Constanten $a_1 \ \ldots \ a_\alpha$, $c_1 \ \ldots \ c_\gamma$ obwalten und daher in den γ Gleichungen der c_i enthalten sein müssen.

Wenn die Zahl der sämmtlichen, a priori bekannten, Bedingungen mit derjenigen der durch (C) gegebenen identisch ist, dann ist das Verfahren ein besonders einfaches.

§ 17.

Wir gehen nun über zur Betrachtung des Falles

$$\gamma = 0.$$

Die Gleichungen 2), a), b) des § 14. lauten nunmehr:

---

1) Wie leicht ersichtlich, sind unter diesen Bedingungen die, durch die Existenz der Gruppen $U^m = 0 \mid (u-b_i)^{q_i}$ erforderten enthalten [$A_q=0$, § 8.].

$$(1) \qquad \mu = \sum_{1}^{\beta} \varkappa_i$$

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\beta} i\,\varkappa_i = \sum_{1}^{\alpha} \pi_i$$

$$(3) \qquad \nu = \alpha + \beta - 1 - \sum_{\alpha+1}^{\tau} i\, p_i .$$

Die Bedingung (2) besagt, dass $\gamma = 0$. Da jetzt

$$\Gamma = 1, \quad \Gamma' = 0,$$

hat die Gleichung (C) die Form:

$$(D) \qquad M.T = AB - B.A.$$

Dieselbe liefert $(\alpha+\beta-1)$ Bedingungen [nach § 15.], welche d Constante M und $(\alpha+\beta-2)$ Beziehungen zwischen den Constant der Differentialgleichung bestimmen.

Ansatt (D) nach u zu ordnen und die Coefficienten der Potenz von u gleich Null zu setzen, verfahren wir folgendermassen.

Erinnern wir uns, dass [nach § 13., (C)]:

$$A = \sum_{1}^{\alpha} i\,\pi_i (u-a_1)(u-a_2)\ \ldots\ (u-a_{i-1})(u-a_{i+1})\ \ldots\ (u-a_\alpha)$$

$$B = \sum_{1}^{\beta} i\,\varkappa_i (u-b_1)(u-b_2)\ \ldots\ (u-b_{i-1})(u-b_{i+1})\ \ldots\ (u-b_\beta),$$

so bemerken wir, dass es zweckmässig ist, die Grössen:

$$\pi_1,\ \pi_2\ \ldots\ \pi_{\alpha-1};\quad \varkappa_1,\ \varkappa_2\ \ldots\ \varkappa_{\beta-1},$$

welche *linear* in (D) vorkommen, durch die übrigen Constanten a zudrücken.

Da nun die Gleichung (D) für jeden Werth von u erfüllt ist, können wir setzen:

$$u = a_1,\ a_2\ \ldots\ a_{\alpha-1},\ a_\alpha \quad \text{d. h.} \quad A = 0$$
$$u = b_1, b_2\ \ldots\ b_{\beta-1},\ b_\beta \quad \text{d. h.} \quad B = 0.$$

Wir erhalten somit:

$$M.(T)_{u=a_i} = \pi_i .\ (a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_\alpha)\,.\prod_{h=1}^{\beta}(a_i-b_h$$

$$i = 1,\ 2\ \ldots\ \alpha$$

$$f.\,(T)_{u=b_i} = \varkappa_i \,.\,(b_i - b_1)\ldots(b_i - b_{i-1})(b_i - b_{i+1})\ldots(b_i - b_\beta)\,.\,\prod_{h}^{\alpha}(a_h - b_i)$$

$$i = 1,\ 2\ \ldots\ \beta$$

nd daher:

$$_i = \pi_\alpha \cdot \frac{(a_\alpha - a_1)(a_\alpha - a_2)\ldots(a_\alpha - a_{\alpha-1})\,.\,(T)_{u=a_i}\prod_{h}^{\beta}(a_\alpha - b_h)}{(a_i - a_1)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_\alpha)\,.\,(T)_{u=a_\alpha}\,.\prod_{h}^{\beta}(a_i - b_h)}$$

$$(i = 1,\ 2\ \ldots\ \alpha - 1)$$

$$_i = \varkappa_\beta \,.\, \frac{(b_\beta - b_1)\,.\,(b_\beta - b_2)\ldots(b_\beta - b_{\beta-1})\,.\,(T)_{u=b_i}\prod_{h}^{\alpha}(b_\beta - a_h)}{(b_i - b_1)\ldots(b_i - b^{i}{}_{-1})(b_i - b_{i+1})\ldots(b_i - b_\beta)\,.\,(T)_{u=b_\beta}\prod_{h}^{\alpha}(b_i - a_h)}$$

$$(i = 1,\ 2\ \ldots\ \beta - 1)$$

)ies sind die $(\alpha + \beta - 2)$ Relationen, welche zwischen den Constanten er Differentialgleichung bestehen. Man hat ausserdem zu beachten, ass die gefundenen Ausdrücke für die Grössen π_i, $\varkappa_i$ ganze Zahlen ein müssen, welche den Bedingungen § 12. (IV) unterliegen.

Die Constanten a_i, b_i, π_α, $\varkappa_\beta$ sind unmittelbar durch die Differentialgleichung gegeben; *dieselben müssen nach den obigen Formeln* olche *Werthe* $\pi_1, \ldots \pi_{\alpha-1}; \varkappa_1, \ldots \varkappa_{\beta-1}$ *bestimmen, welche mit den aus* 1) *entnehmbaren identisch sind.*

Der Fall $\gamma = 0$ kann eintreten, wenn

$$\mu > m \quad \text{d. h.} \quad \sum_{1}^{\beta} i\varkappa_i > m.$$

obald

$$\sum_{1}^{\beta} i\varkappa_i = m,$$

ann nur

$$\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = 1$$

ntreten. Wenn aber

$$\mu < m \quad \text{d. h.} \quad \sum_{1}^{\beta} i\varkappa_i < m,$$

nn ist stets

$$\gamma = 0.$$

Der Fall II. $(\mu_0 > \mu_m)$.

§ 18.

Jetzt ist

$$\mu = \mu_0.$$

Sei

$$\mu_m = \mu - \delta,$$

indem δ eine ganze positive Zahl bedeute.

Das Integral (B):

$$z'^m = \frac{P_0}{P_m}$$

liefert jetzt also die Gruppe:

$$v^\delta = 0 \mid t^m = 0,$$

welche ihrerseits die Form:

$$V^m = 0 \mid v^{m+\delta} = 0$$

bedingt [§ 5, (8)]. Daher ist

$$(\beta) \qquad \delta = m + \nu_0 - \nu_m,$$

und folglich

$$\mu \geq \delta > 0. \quad [\S\ 9.].$$

Nach den Auseinandersetzungen des § 5., (8), brauchen die Grösse δ und m nicht theilerfremd zu sein.

Die Ausdrücke P_0, P_m (I) [§ 12.] haben nun die Beziehungen

1) $$\mu = \sum_1^\alpha i\pi_i + \gamma . m$$

2) $$\mu = \delta + \sum_1^\beta i\varkappa_i$$

zur Folge. Aus (II) [§ 12.] entnehmen wir:

3) $$2\mu - 1 - \delta = \sum_1^\tau i\pi_i + \sum_1^\beta \varkappa_i - (\alpha+\beta) + \gamma . (m-1).$$

Subtrahirt man die Summe der Gleichungen 1), 2) von 3), so ist:

a) $$\gamma = \sum_{\alpha+1}^\tau i\ p_i + 1 - (\alpha+\beta)$$

und damit γ bekannt.

Die Differenz von 1), 2) liefert schliesslich:

b) $$\delta = \sum_1^{\alpha} i\,\pi_i - \sum_1^{\tau} i\,\varkappa_i + \gamma\,.\,m,$$

welche Gleichung die Relation (β) ersetzt.

Der Werth von μ wird hiernach unmittelbar durch 2) *gegeben.* Die Grösse δ verhält sich, wie ersichtlich, ebenso wie die $\varkappa_i$.

Der Grad der rechten Seite unserer Identität (C), § 13., ist jetzt:

$$\alpha+\beta+\gamma-1,$$

da nach b):

$$\sum_1^{\alpha} i\,\pi_i - \sum_1^{\beta} i\,\varkappa_i + m.\gamma = \delta \quad [\S\ 13., \text{ am Ende}].$$

Der Grad der linken Seite ist:

$$\sum_{\alpha+1}^{\tau} i\,p_i = \alpha+\beta+\gamma-1, \quad \text{(nach a))}$$

weshalb jetzt immer der Grad beider Seiten derselbe ist.

Es existiren daher

$$\alpha+\beta+\gamma$$

Gleichungen zur Bestimmung der $(\gamma+1)$ Grössen M, c_i und als Beziehungen zwischen den Constanten der Differentialgleichung.

Die Constante M erhält man jetzt aus (C) für

$$u = \infty,$$

nämlich:

$$M = \sum_1^{\alpha} i\,\pi_i - \sum_1^{\beta} i\,\varkappa_i + m\gamma = \delta.$$

Die Gleichung (C) wird nun für $\gamma \gtreqless 0$ ebenso wie in I. (§ 16.) behandelt, weshalb ich hier nicht näher darauf eingehe. Ich bemerke nur, dass in (C) jetzt die Werthe

$$u = a_1, \quad \ldots\ a_{\alpha-1}; \quad b_1, \ldots\ b_\beta$$

einzuführen sind, um die gewünschte Anzahl Relationen zu bekommen [1]).

Bezüglich der Existenz von γ gelten hier ähnliche Erwägungen, wie in § 17. (am Ende).

---

1) Unter diesen Beziehungen befindet sich ausser $A_q = 0$ (§ 8.) auch $C_q = 0$ (§ 9.)).

§ 19.

Sobald

$$\alpha+\beta+\gamma=\gamma+1$$

d. h. $\alpha+\beta=1$,

haben die zugehörigen Differentialgleichungen (A) ohne Constante Beziehungen algebraische Integrale.

Wenn $\gamma>0$, dann kann $\alpha=0$ eintreten; wenn $\gamma=0$, mu $\alpha>0$ sein. Es ist $\beta=0$, falls $\delta=\mu$, welche Bedingung gesta tet ist.

Die Gleichung

$$\alpha+\beta=1$$

wird befriedigt durch die beiden Werthepaare:

1. $\alpha=1,\ \beta=0.$
2. $\alpha=0,\ \beta=1.$

1. $\alpha=1,\ \beta=0.$ Die Differentialgleichung lautet:

a., *indem* $\sigma=0$:

$$U^m=\frac{1}{(u-a_1)^{p_1}.[(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}]^m}.$$

b., *indem* $\sigma=1$:

$$U^m=\frac{(u-a_1)^{p_1}}{[(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}]^m}.$$

Damit diese Formen irreductibel sind, müssen die Zahlen p_1, m r lativ prim sein.

Jetzt folgt [n. § 18. 2), a), b)]:

(1) $\mu=\delta$

(2) $\gamma=\sum_2^\tau i p_i$

(3) $\mu=\gamma.m+m\pm p_1,$

indem das obere Vorzeichen in (3) sich auf den Fall *a.*, das unter auf b. bezieht.

Hiernach hat das Integral:

a. $$z'=\int du.(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}.\sqrt[m]{(u-a_1)^{p_1}}$$

den Werth

$$z' = \sqrt[m]{a} \cdot (u - a_1)(u - c_1) \ldots (u - c_\gamma) \sqrt[m]{(u - a_1)^{p_1}}.$$

b. Das Integral:

$$z' = \int du \cdot \frac{(u - a_2)^{p_2} \ldots (u - a_\tau)^{p_\tau}}{\sqrt[m]{(u - a_1)^{p_1}}}$$

hat die Lösung:

$$z' = \sqrt[m]{a} \cdot \frac{(u - a_1)(u - c_1) \ldots (u - c_\gamma)}{\sqrt[m]{(u - a_1)^{p_1}}}$$

Die c_i werden gegeben durch die Gleichung (C), welche lautet:

$$M \cdot T = \Gamma \cdot \pi_1 + m \Gamma' \cdot (u - a_1).$$

Das Weitere, wie in § 15.

2. $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Die Differentialgleichung ist von der Form:

$$U^m = \frac{(u - b)^q}{[(u - a_1)^{p_1} \ldots (u - a_\tau)^{p_\tau}]^m}.$$

Es ist nun [n. § 18.]

(4) $\mu - \delta = \varkappa_1$

(5) $\gamma = \sum_1^\tau i p_i$

(6) $\delta = \gamma \cdot m - \varkappa_1$

und, wie ersichtlich, darf hier nicht $\gamma = 0$ sein, weil sonst δ negativ ist.

Das Integral:

$$z' = \int du \cdot \frac{(u - a_1)^{p_1} \ldots (u - a_\tau)^{p_\tau}}{\sqrt[m]{(u - b)^q}}$$

hat der Werth

$$z' = \sqrt[m]{a} \cdot \frac{(u - b)(u - c_1) \ldots (u - c_\gamma)}{\sqrt[m]{(u - b)^q}}$$

Die Constanten c_i finden sich wie vorher.

Der Fall III. $(\mu_m > \mu_0)$.

§ 20.

Nun ist

$$\mu_m = \mu.$$

Es sei

$$\mu_0 = \mu - \delta.$$

Aus dem Integrale folgt die Gruppe:

$$v^{\delta} = 0 \mid z'^{m} = 0,$$

Daher ist, wenn $m > \delta$:

$$V^{m} = 0 \mid v^{m-\delta} = 0,$$

und, wenn $m < \delta$:

$$V^{-m} = 0 \mid v^{\delta-m} = 0.$$

Es findet sich somit der Werth von δ aus der Gleichung:

$$(\gamma) \qquad \delta = \nu_m - \nu_0 - m,$$

in der

$$\nu_m > \nu_0 + m \quad \text{d. h.} \quad \delta > 0.$$

Aehnlich, wie in II, schliessen wir:

$$(1) \qquad \mu - \delta = \sum_1^{\alpha} \pi_i + \gamma . m$$

$$(2) \qquad \mu = \sum_1^{\beta} \varkappa_i,$$

wodurch μ bekannt.

Ferner ist [(II), § 12]:

$$(3) \qquad 2\mu - 1 - \delta = \sum_1^{\tau} \pi_i + \sum_1^{\beta} \varkappa_i - (\alpha + \beta) + \gamma(m-1)$$

und folglich:

$$a) \qquad \gamma = \sum_{\alpha+1}^{\tau} p_i + 1 - (\alpha + \beta)$$

$$b) \qquad -\delta = \sum_1^{\alpha} \pi_i - \sum_1^{\beta} \varkappa_i + \gamma . m.$$

Die letztere Gleichung ersetzt die Relation (γ).

Da jetzt, wie direct aus II exsichtlich,

$$M = -\delta,$$

gelten hier die weiteren Betrachtungen des Falles II. Man hat dort nur $-\delta$ statt δ, $\mu - \delta$ für μ einzuführen.

Wenn jetzt $\delta = \mu$, ist $P_0 = 1$.

Es ist nun jedoch immer $\beta > 0$, da $\mu > 1$, und es existirt daher nur der Fall

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1,$$

in welchem die Differentialgleichung ohne Constanten-Relationen algebraische Form hat. Derselbe ist identisch mit 2. (§ 19), wenn dort die oben erwähnte Substitution ausgeführt wird.

Jetzt kann γ nur dann vorhanden sein, wenn

$$\mu > \delta + m \quad \text{d. h.} \quad \sum_1^\beta \varkappa_i > \delta + m.$$

Sobald

$$\sum_1^\beta \varkappa_i < \delta + m,$$

ist von selbst

$$\gamma = 0.$$

§ 21.

Um die Constante a der Integralgleichung (B) [§ 13] zu berechnen, gehen wir von der, § 11, angegebenen Form der letzteren aus. Durch Differentiation erhalten wir aus dieser [s. § 11 am Ende] die Gleichung:

$$U^m = m^m \cdot \frac{P_0^{m-1} \cdot P_m^{m+1}}{(P_m \cdot P_0' - P_0 P_m')^m},$$

welche wir nach Einführung der Werthe P_0, P_m [(I), (II), § 12] mit (V) [§ 12] vergleichen.

Hierdurch ergibt sich sofort:

$$a = \left(\frac{m}{M}\right)^m \cdot \frac{1}{c},$$

wo $M = \frac{C}{a}$ [(II), § 12], c aus (IV) zu entnehmen ist.

Da die Constante M in jedem der Fälle I, II, III bestimmt wurde, ist hiermit a bekannt.

Wir können den Werth von a auch durch die Betrachtung der transformirten finden, z. B. im Falle III. in folgender Weise:

In demselben besteht die Gruppe:

$$v^\delta = \frac{1}{a} \cdot z'^m.$$

Ferner ist:

$$V^m = (-1)^m . c . v^{m-\delta} \quad \text{[nach § 9]}.$$

Nach § 3, (3) folgt nun, indem dort:

$$p = m, \quad q = \delta, \quad a_0{}^{\delta} = \frac{1}{a}$$

zu setzen ist, unmittelbar:

$$(2) \qquad a = (-1)^m \cdot \left(\frac{m}{\delta}\right)^m \cdot \frac{1}{c},$$

welche Gleichung in der That für $M = -\delta$ mit (1) übereinstim

Um die für den Fall II. gültige Formel für a zu finden, hat n in (2), nur $-\delta$ für δ zu setzen:

Im Falle I. ist M eine Function der Constanten $c_1, \ldots c_\gamma$, t ähnlich wie in den vorigen Fällen erhält man den Werth von a.

§ 22.

Ueberblick über die Criterien für die algebraische Form von (

Um zu untersuchen, ob eine Differentialgleichung der Form das algebraische Integral (B) besitzt, hat man zuerst zu ermitt ob die § 8, 9 aufgestellten Bedingungen erfüllt sind. Sobald e dieser Bedingungen, welche logarithmische Unendlichkeit im Inte ausschliessen, verletzt ist, kann das Integral nicht algebraisch s Sind diese Anforderungen jedoch befriedigt, dann entnimmt man der Differentialgleichung (IV, § 12) die Werthe der p_i, q_i u. s. Alsdann prüft man, welchem der Fälle I., II., III. die gegeb Differentialgleichung zuzuweisen ist.

Die letzteren sind characterisirt durch die Bedingungen:

$$(\alpha) \qquad m + \nu_0 - \nu_m = -\nu . m \quad [\S\ 14]$$

$$(\beta) \qquad m + \nu_0 - \nu_m = +\delta \quad [\S\ 18]$$

$$(\gamma) \qquad m + \nu_0 - \nu_m = -\delta \quad [\S\ 20].$$

Da die Grössen ν, δ ganze positive Zahlen sind, ist die Relat (β) von den beiden anderen (α), (γ) gänzlich verschieden. Wen kein Vielfaches von m ist, dann sind die Bedingungen (α), (γ) wes lich verschieden; wenn aber δ ein Vielfaches von m ist, dann s die letzteren nicht zu unterscheiden, und man hat dann stets Fall I. zu betrachten, welcher den Fall III. umschliesst, indem beachten, dass die Constanten c_i theilweise unendlich gross und gleichzeitig $a = 0$ d. h. $M = \infty$ [§ 21, (1)] werden können.

Nachdem der Fall, zu welchem die gegebene Differentialgleicht gehört, festgestellt ist, berechnet man nach der Formel a) desselt den Werth von γ nnd untersucht dann, ob die durch (C) geliefer

Bedingungen sämmtlich erfüllt sind. Wenn dieses der Fall ist, so entnimmt man die Constanten c_i, M den angegebenen Formeln.

Da man die Grössen a_i, b_i aus der Differentialgleichung selbst abliest, kennt man nunmehr das Integral derselben. Wenn $\gamma = 0$ ist, die Constanten c_i also nicht existiren, dann kann man das letztere einfach aus der Differentialgleichung abschreiben.

§ 23.

Beispiele.

Zur Berechnung der von uns betrachteten Integrale ist die folgende, nach der im § 11 angewandten Schlussweise, evidente Bemerkung nicht ohne Wichtigkeit:

Bleibt die gegebene Differentialgleichung (A) *ungeändert, wenn man in ihr*

$$u \,.\, e^{\frac{2h\pi i}{n}} \quad \text{statt } u \qquad [h = 0,\ 1 \ldots (n-1)]$$

setzt, dann ist das Integral bezüglich der Variablen u eine Function von u^n.

1. Um das einfache Integral:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{12}} \int du \,.\, \frac{u}{\sqrt{u-1}}$$

in der üblichen Weise auszuführen, muss man entweder für u eine neue Variable einführen oder partiell integriren. Wir verfahren systematischer und einfacher.

Da das gegebene Integral, welches die Bedingung

$$m + \nu_0 - \nu_m = 3 = \delta$$

angibt, in die Categorie der Integrale des Falles II. 1. b. [§ 19] gehört und nach a) [§ 19], $\gamma = 1$ folgt, besitzt es die Lösung:

$$z' = \sqrt{a} \,.\, (u - c_1) \,.\, \sqrt{u-1}.$$

Da jetzt

$$M = \delta = 3, \quad \Gamma = (u - c_1), \quad \Gamma' = 1, \quad T = u, \quad \pi_1 = 1, \quad a_1 = 1$$

ist, lautet die Gleichung (C) [s. § 11.]

$$3 \,.\, u = (u - c) + 2\,(u - 1).$$

Daher folgt für $u = 0$:

$$c_1 = -2.$$

Ferner ist nach § 21 (1):

$$a = \frac{1}{27},$$

indem $c = 12$.

Demnach erhält man:

$$\int du \cdot \sqrt{\frac{u}{u-1}} = \frac{2}{3} \cdot (u+2)\sqrt{u-1}.$$

2. Statt des Integrales:

$$z' = 2 \cdot \int du \cdot \frac{u \cdot (4u^2-1)}{\sqrt{(u^4-1)^3}}$$

betrachten wir die Differentialgleichung:

$$U^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(u^4-1)^3}{u^2(4u^2-1)^2}.$$

Dieselbe befriedigt die Bedingungen, welche logarithmische Unendlichkeit ausschliessen.

Da

$$\alpha = 0, \quad \beta = 4, \quad \tau = 3,$$

so ist, indem die Relation

$$m + \nu_0 - \nu_m = -4 = -2 \cdot \nu$$

die gegebene Differentialgleichung dem Falle I. zuweist:

$$\gamma = 2. \qquad [\S\ 14,\ a)].$$

Ferner ist:

$$A = 1,\ A = 0; \quad B = u^4 - 1,\ B = 4u^3; \quad T = u(u^2 - \tfrac{1}{4}),$$

also nach (C) [§ 13]:

$$M \cdot u(u^2 - \tfrac{1}{4}) = -4 \cdot (u - c_1)(u - c_2)u^3 + 4u \cdot (u^4 - 1).$$

Berücksichtigen wir nun, dass die Differentialgleichung ungeändert bleibt, wenn man in ihr $-u$ statt u setzt, so ist, weil $\alpha = 0$:

$$P_0 = a(u^4 + g_2 u^2 + g_0) = a(u^2 - c_1)^2.$$

Wir wissen jetzt also *a priori*, dass

$$c_1 + c_2 = 0$$

ist. Da nun, wie leicht ersichtlich aus (C): $M = 16$, $c_1 = 4$ sich ergibt, hat unser Integral den Werth:

$$z' = \frac{(u^2-4)}{\sqrt{u^4-1}}. \qquad [\S\ 13,\ (B)]$$

3. Mittelst unseres Verfahrens lassen sich auch die Bedingungen angeben, unter welchen eine Differentialgleichung, die keine logarithmische Unendlichkeit zulässt, algebraische Form besitzt. Nehmen wir als ein Beispiel die Differentialgleichung:

$$U^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(u-a_1)}{(u-a_2)(u-a_3)^2},$$

elche dem Falle II. ($\gamma = 0$) zuzuertheilen ist.

Die Gleichung (C) lautet jetzt, da

$$M = \delta = 4:$$

$$4(u-a_3) = \pi_1.(u-a_2) + \pi_2(u-a_1),$$

ıs der die Bedingung:

$$a_3 = \frac{3a_1+a_2}{4}$$

lgt. Es ist $\pi_1 = m - p_1 = 1$, $\pi_2 = m + p_2 = 3$.

Daher erhalten wir die Relation:

$$2\int du.\left(u-\frac{3a_1+a_2}{4}\right)\sqrt{\frac{u-a_2}{u-a_1}} = \sqrt{(u-a_1)(u-a_2)^3}.$$

Die algebraische Form der Differentialgleichung (A), $m = 1$.

§ 24.

Sobald die Ordnung der Differentialgleichung (IV) [§ 12] gleich s ist, hat die letztere die Gestalt:

$$U = c.\frac{(u-b_1)^{q_1}\ldots(u-b_\beta)^{q_\beta}}{(u-a_1)^{p_1}\ldots(u-a_\alpha)^{p_\alpha}.(u-a_{\alpha+1})^{p_{\alpha+1}}\ldots(u-a_\tau)^{p_\tau}},$$

lem jetzt nach (I), § 12, $\sigma = 0$.

In diesem Falle sind also die Consanten

$$a_1, \ldots a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots a_\tau$$

der Differentialgleichung vollkommen gleichberechtigt.

Da jetzt die Gleichung [nach (II), § 12]:

$$P_1.P_0' - P_0.P_1' = C.\prod_1^\tau{}_i(u-a_i)^{p_i}\prod_1^\beta{}_i(u-b_i)^{q_i-2}$$

teht, deren rechte Seite unmittelbar durch (A) gegeben ist, können den Ausdruck P_0 aus derselben leicht finden, wenn der Grad letzteren bekannt ist. Gleichzeitig liefert diese Relation, ähnlich, im allgemeinen Falle die Gleichung (C), die zwischen den Con- ten der Differentialgleichung herrschenden Beziehungen. Durch ähnliche Betrachtung, wie im § 21, findet sich:

$$C = \frac{1}{c}.$$

Die Integralgleichung ist jetzt von der Form:

$$(B) \qquad z - z_1 = \frac{P_0}{P_1},$$

wo P_0 den Grad μ_0, P_1 den Grad μ_1 besitze.

Der Fall $\mu_0 = \mu_1 = \mu$ kann, wie ersichtlich, in Folge der Wil kürlichkeit der Integrationsconstante z_1 stets auf den Fall $\mu_0 < \mu$ $\mu_1 = \mu$ zurückgeführt werden. Denn man kann (B) die Gesta geben:

$$z - z_1' = \frac{P_0 + z_1'' . P_1}{P_1} = \frac{\overline{P_0}}{P_1},$$

indem $z_1 = z_1' + z_1''$ und $\overline{P_0}$ von einem Grade ist, der mittel der willkürlichen Grösse z_1'' kleiner als μ gemacht werden kan Daher haben wir nur die Fälle:

$$I. \quad \mu_0 > \mu_1; \quad \mu_0 = \mu$$
$$II. \quad \mu_1 > \mu_0; \quad \mu_1 = \mu$$

zu betrachten.

§ 25.

Der Fall I. $(\mu_0 > \mu_1)$.

Unter Anwendung der Bezeichnungen des allgemeinen Falle entnehmen wir aus demselben die Formeln (§ 18, (β), 2)):

$$(1) \qquad \delta = \nu_0 - \nu_1 + 1$$

$$(2) \qquad \mu = \delta + \sum_1^{\beta} \varkappa_i,$$

womit μ bekannt ist.

Aus der Gleichung (C) ergibt sich die folgende:

$$(3) \qquad 2\mu - \delta - 1 = \sum_1^{\tau} p_i + \sum_1^{\beta} (q_i - 2),$$

welche in Verbindung mit (2), (1) repräsentirt.

Der Werth von γ interessirt uns hier nicht, da wir den ganzen Ausdruck P_0 aus (C) erhalten. Die Identität (C) bestimmt hiernach

$$2\mu - \delta$$

Bedingungen, von denen

$$\mu + 1$$

die Constanten des Ausdrucks P_0 angeben. Die Constante a de letzteren findet man für $u = \infty$ sofort, nämlich $a = \frac{1}{\delta . c}$. Die übri gen $(\mu - \delta - 1)$ Bedingungen stellen die Constanten-Relationen vo (A) dar. Die letzteren findet man, ganz ebenso wie die des allge

einen Falles, durch die Elimination der Grössen P_0, P_0' welche
n derselben Weise wie in § 16 vorzunehmen ist.

Da der Wert von P_m aus der Differentialgleichung ohne Weiteres
olgt, ist nun das Integral (B) gefunden.

Wenn $\mu = \delta + 1$, also (nach (2)) $\beta = 1$ und $q_1 = 2$, dann hat
ie Gleichung (A) *ohne dass eine besondere Beziehung zwischen ihren*
onstanten besteht, algebraische Form.

Der Fall II. $(\mu_m > \mu_0)$.

Nach § 20. [(γ), (2)] bestehen jetzt die Identitäten:

$$\delta = \nu_1 - \nu_0 - 1$$

$$\mu = \sum_1^{\beta} i\varkappa_i$$

Da, ebenso wie in I., die Beziehung:

$$2\mu - \delta - 1 = \sum_1^{\tau} i p_i + \sum_1^{\beta} i(q_i - 2)$$

lt, erhält man aus (C):

$$2\mu - \delta$$

edingungen, von welchen

$$\mu - \delta + 1$$

e Constanten in P_0 bestimmen, so dass jetzt $\mu - 1$ Relationen
wischen den Constanten von (A) herrschen.

Die Gleichung (C) wird ebenso, wie in I. angegeben wurde, be-
ndelt. Die Constante der Integralgleichung hat (nach (C)) den
erth:

$$a = -\frac{1}{\delta . c}.$$

Schliesslich erwähne ich, dass die von Briot und Bouquet auf-
stellten Differentialgleichungen der Form (A), welche eindeutige
gebraische Integrale definiren, aus unseren Entwickelungen sich
mittelbar für den Werth

$$\mu = 1$$

geben.

Schlussbemerkung.

In einer folgenden Abhandlung gedenke ich, die einfach perio schen und doppeltperiodischen Integrale der Differentialgleichung:

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^m = \frac{f_m(u)}{f_0(u)}$$

zu betrachten und gestatte mir hier, nur einen Ueberblick über d Resultate dieser Untersuchung anzugeben.

Gruppen-Betrachtungen, welche ähnlich wie die früheren anz stellen sind, zeigen unmittelbar, *dass die Gleichung* (A) *nur da eine einfach periodische Form besitzen kann, wenn* $m = 2$ *oder* $= 1$ *i*

Dieses Resultat lässt sich auch mit Hülfe der in § 11. ang wandten Schlussweise herleiten.

Falls $m = 2$ *ist, lautet das einfach periodische Integral:*

$$\text{(B)} \qquad \zeta + \zeta^{-1} = f(u),$$

wo f eine rationale Function von u bedeutet.

Aus der Gleichung (B) ergiebt sich durch Ueberlegungen, welch den im zweiten Theile geführten analog sind, *die einfach periodisch Form von* (A).

Gleichzeitig erkennt man hierdurch den Zusammenhan zwischen den Nullpunkten der Functionen f_0, f_m und den Null- un Unendlichkeitspunkten der Function f, wodurch die Methode zu einfachen Integration von (A) unmittelbar gegeben ist. *Diese Me thode wende ich auf das Integral:*

$$\sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{i}{\pi} \int du \, \frac{(u-1)^2 \cdot (u^2 + \frac{2}{7}u + \frac{3}{7})}{u(u^2+1)\sqrt{(u^4 - \frac{5}{2}u^2 + 4u - \frac{3}{2})(u^2 - \frac{8}{7}u + \frac{3}{7})}}$$

an und finde die Lösung:

$$\zeta + \zeta^{-1} = \frac{2(u+3)(u-1)^3}{u^2(u^2+1)}.$$

Im Falle $m = 1$ lautet das einfach periodische Integral:

$$\zeta = f(u).$$

Man findet, *dass jetzt die Null- und Unendlichkeitspunkte von f die sämmtlichen Nullpunkte von f_m bilden und dass sie, von einander durch die Gruppen unterschieden, aus diesen nebst ihren Multiplicitäten rect erhalten werden.*

Die Untersuchung der doppeltperiodischen Integrale von (A) giebt, ebenfalls unter Anwendung des Schlusses, § 11., welcher eichzeitig deren Form bestimmt, *dass die Gleichung* (A) *eine doppelt-riodische Form nur für*

$$m = 2,\ 3,\ 4,\ 6$$

mehmen kann, ein Ergebniss, welches Briot und Bouquet für die ndeutigen doppeltperiodischen Integrale von (A) erhalten haben.

Allgemein schliessen wir, *dass nur alle diejenigen Differential-ichungen von der Form:*

$$F(U, u) = 0,$$

ren Grad die Existenz eindeutiger Integrale gestattet, eine der Func-nen:

$$f(u, z) = 0,\quad f(u, \zeta) = 0,\quad f(u, \lambda(z)) = 0$$

Integral besitzen können.

Denn in den letzteren ist der Werth $\mu > 1$ bez. > 2. Wenn n $\mu = 1$ resp. bei den doppeltperiodischen Integralen, $= 2$ wird, m ändert sich der Grad m der Differentialgleichung nicht, und n muss nun die in der Einleitung, (A), angegebenen eindeutigen egrale erhalten. Dass dies nur möglich ist, wenn man von der ferentialgleichung, die eines der angeführten nicht eindeutigen egrale besitzt, ausgeht, ist evident.

Wie ich glaube, werden unsere Principien die Integration *aller* men der Differentialgleichung

$$U^m = \frac{f_m(u)}{f_0(u)}$$

öglichen.

Zum Schlusse bemerke ich noch, *dass unsere allgemeine Dif rentialgleichung* (1), § 1, *falls* $m = 2$ *ist, durch die Substitution*

$$z = \xi + \varphi(u)$$

übergeht in die beiden Differentialgleichungen von der Form (A):

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{2f_2}{f_1}, \quad \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = \frac{4f_2^2}{f_1^2 - 4f_0f_2},$$

von denen die eine die Function φ, die andere ξ bestimmt, wodur z als Function von u gefunden, das Integral der gegebenen Differe tialgleichung also bekannt ist.

Thesen.

I.

Vor allen, bisher über die Dispersion des Lichtes aufgestellten Theorien ist der zuletzt von Herrn Ketteler entwickelten der Vorzug zu geben.

II.

Helmholtz' Einwand gegen die Kant'sche Lehre von der Priorität der Axiome der Geometrie, welcher sich auf die Vorstellbarkeit der dreifach ausgedehnten Räume gründet, ist nicht zutreffend.

Lebenslauf.

Am 19. März 1865 wurde ich, Theodor Felix Klitzkowsk evangelischer Confession, zu Danzig geboren, woselbst ich das Re gymnasium zu St. Petri und Pauli vom Jahre 1874 bis 1883 b suchte.

Sieben Semester hindurch studierte ich alsdann auf der Un versität zu Königsberg hauptsächlich Mathematik und Physik, b stand am 13. December 1886 das Examen rigorosum und im Janu 1887 das Examen pro fac. doc.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Professoren

Hurwitz, Lindemann, Pape, Rosenhain, Saa schütz, Thiele, Volkmann, Walter, Zöppritz (†

fühle ich mich zu grossem Danke verpflichtet, besonders aber Her Professor Lindemann.

Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VI.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale.

Von **Adolf Kneser** in Dorpat.

Es sei $f(x, y, y')$ eine analytische Function, die sich in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär verhält; $\mathfrak{C}$ sei, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten, eine reelle analytische Curve, AB ein reguläres Stück derselben, längs dessen x von a bis b wächst und y als eindeutige Function von x bestimmt ist; jedes Element des Bogens AB ergebe ein dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehöriges Wertsystem

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx} = y'.$$

Wenn dann beim Fortgang längs der Curve $\mathfrak{C}$ die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

gilt; wenn ferner die Function δy für $x = a$ und $x = b$ verschwindet, übrigens aber nebst ihrer Ableitung $\delta y'$ in dem Intervall von a bis b stetig ist, so kann man setzen:

$$\Delta = \int_a^b f(x,\ y + \delta y,\ y' + \delta y')\,dx - \int_a^b f(x,\ y,\ y')\,dx$$

$$= \int_a^b dx\,(\varphi(\delta y,\ \delta y') + R);$$

dabei ist

$$\varphi(\delta y,\ \delta y')$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \beta\right)\delta y\,\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y'^2\right\},$$

β bedeutet eine beliebige, nebst ihrer Ableitung in dem Intervall von a bis b stetige Function, und R eine Potenzreihe der Argumente δy und $\delta y'$, deren Glieder von mindestens dritter Dimension sind.

Nach Legendre bestimmt man nun β durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \beta\right)^2 = 0; \tag{1}$$

dann ist φ das Quadrat eines in δy und $\delta y'$ linearen Ausdrucks und positiv, wenn längs des Bogens AB die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0 \tag{2}$$

besteht. Man kann aber, wie Scheeffer bemerkt hat, aus den positiven Zeichen der Gröfse φ noch nicht mit Sicherheit schliefsen, dafs Δ positiv ist, auch wenn $|\delta y|$ und $|\delta y'|$ beliebig klein sind und β sich im Intervall von a bis b regulär verhält; denn in einer reellen Potenzreihe von n Argumenten können die Glieder dritter und höherer Dimension nur dann unbedingt gegen diejenigen der zweiten Dimension vernachlässigt werden, wenn diese eine definite quadratische Form der n Argumente bilden, deren Determinante nicht verschwindet. Dafs trotzdem unter den obigen Voraussetzungen und bei hinreichend kleinen Werten von $|\delta y|$ und $|\delta y'|$ die Gröfse Δ positiv ist, hat Scheeffer im XXVI. Bande der Math. Annalen auf eine höchst eigentümliche Weise gezeigt; seine Betrachtungen scheinen aber nicht auf den Fall mehrerer unbekannter Functionen ausgedehnt werden zu können. Eine andere Argumentation, welche zu dem von Scheeffer erreichten Ziele führt und aufserdem verallgemeinert werden kann, beruht auf folgendem Ge-

danken, dessen Keim sich in Lagrange's Theorie der analytischen Functionen findet.

Man betrachte statt der Gleichung (1) die folgende:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \beta\right)^2 = c^2, \tag{3}$$

in welcher c eine reelle Constante bedeutet. Die Gleichung (1) hat nun nach Jacobi ein im Intervall von a bis b reguläres Integral, wenn die Annahme (2) festgehalten wird und der Bogen AB kein Paar conjugirter Punkte enthält. Sind auch A und B nicht conjugirt, so kann man noch ein etwas gröfseres Intervall von a bis b_1 angeben, in welchem ebenfalls ein reguläres Integral der Gleichung (1) existirt. Alsdann lehrt eine einfache functionentheoretische Erwägung, dafs die Gleichung (3) ein reguläres Integral besitzt in einem Intervall von a bis b_0, dessen obere Grenze von b_1 beliebig wenig verschieden ist, sobald die Gröfse $|c|$ hinreichend klein genommen wird. Bei passender Wahl von c hat man daher

$$b < b_0 < b_1,$$

und die Gleichung (3) besitzt auch ein von a bis b reguläres Integral. Dabei ist jetzt die Form φ ordinär, da ihre Determinante den Wert c^2 hat; hieraus aber schliefst man leicht, dafs R gegen φ zu vernachlässigen, mithin Δ eine positive Gröfse ist, sobald $|\delta y|$ und $|\delta y'|$ in dem ganzen Intervall von a bis b unterhalb einer gewissen Grenze verbleiben.

Will man ähnliche Betrachtungen für das Integral

$$\int_a^b f(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\,dx$$

durchführen, in welchem die Functionen y den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2'}\right) = 0$$

genügen, so setze man, indem man für μ und ν die Werte 1 und 2 nimmt,

$$a_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\mu' \partial y_\nu'}, \quad a_{2+\mu,\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\mu \partial y_\nu'} - \beta_{\mu\nu} = a_{\nu,2+\mu},$$

$$a_{2+\mu,2+\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \frac{d\beta_{\mu\nu}}{dx}, \quad \beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu},$$

$$D = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44},$$

$$d_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,2+\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,2+\nu} \\ a_{2+\mu,1} & a_{2+\mu,2} & a_{2+\mu,2+\nu} \end{vmatrix}.$$

Dann weifs man nach Clebsch und Mayer, dafs die Gleichunge

$$d_{11} = 0, \quad d_{12} = 0, \quad d_{22} = 0 \tag{4}$$

ein von a bis b reguläres Integralsystem besitzen, sobald die Curve längs deren man integrirt hat, kein Paar conjugirter Punkte enthält Dasselbe gilt, wie man leicht sieht, von den Gleichungen

$$d_{11} = h, \quad d_{12} = k, \quad d_{22} = l, \tag{5}$$

wenn unter h, k, l hinreichend kleine positive Constante verstande werden. Nimmt man noch an, dafs auf der Curve, längs dere man integrirt, die Ungleichungen

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \tag{6}$$

bestehen, und dafs $hl - k^2$ eine positive Gröfse sei, so ergeben dies Ungleichungen zusammen mit der Identität

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot D = d_{11} d_{22} - d_{12}^2$$

und der ersten Gleichung (5), dafs die quaternäre quadratische Form φ, deren Coefficienten die Gröfsen a sind, definit und positiv ist und eine von Null verschiedene Determinante besitzt. Da man nun, wenn δy_1 und δy_2 an den Integrationsgrenzen verschwinden setzen kann:

$$\Delta = \int_a^b f(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, y_1' + \delta y_1', y_2' + \delta y_2') dx$$

$$- \int_a^b f(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx = \int_a^b dx \left\{ \tfrac{1}{2} \varphi(\delta y, \delta y') + R \right\},$$

wobei R die Gröfsen δy, $\delta y'$ nur in mindestens dritter Dimension enthält, so kann man schliefsen, dafs die Gröfse Δ bei hinreichend kleinen absoluten Werten der Variationen δy und $\delta y'$ positiv ist. In der bisherigen Theorie war dieser Schlufs nicht statthaft, da bei den Gleichungen (4) und den Ungleichungen (6) die Determinante der Form φ verschwindet.

Nach der hier angedeuteten Methode kann man auch bei beliebig vielen unbekannten Functionen, welche Bedingungsdifferentialgleichungen unterworfen sind, aus der Clebsch-Mayer'schen Theorie der zweiten Variation in strenger Weise hinreichende Bedingungen des Maximums oder Minimums ableiten.

Novae rationis

quotcunque aequationes quotcunque quantitatum variabilium geometrice construendi specimen.

Quod ex auctoritate

Amplissimi PHILOSOPHORUM Ordinis

IN ACADEMIA VRATISLAVIENSI

pro

SUMMIS IN PHILOSOPHIA

honoribus rite capessendis

die VI. M. Augusti MDCCCXLI

H. L. Q. C.

publice defendet auctor

Lud. Alexander Koch.

Adversariorum partes agent:

Carolus Sondhauss, Dr. philos. et sem. paedag. sod.
Mauritius Jacobi, sem. paedag. sod.
Hugo Dittrich, cand. philos.

Adjecta est tabula lithographica.

VRATISLAVIAE,
TYPIS FRITZIANIS.

VIRO

DOCTISSIMO, SUMME VENERANDO

ERNESTO JULIO SCHOLTZ,

PROFESSORI P. O., DOCTORI PHILOS.

PRAECEPTORI OPTIME MERITO

HAS

STUDIORUM SUORUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

D. D. D.

AUCTOR.

Introductio.

Geometria analytica et analysis pura, quas dicunt, in
) tantum differre videntur, quod hujus ratio, leges, for-
ulae ad omnes valent quaestiones cujusvis generis et no-
inis, illa in certo quodam campo analysi utitur. Dum
iim aequationum analyticarum omnino est quantitates ita
terminare, ut ad alias certam habeant relationem; dum-
ie eorum, qui eas solvunt, nihil interest, cujuscunque
eneris et nominis quantitates sint, dummodo eas metiri
ssint: in geometria analytica quantitates speciatim ad
itates geometricas referuntur, illaeque solvuntur quae-
iones, quae sunt circa loca ab aliorum positione pro lege
rta dependentia. — Qua ex cognatione disciplinarum fit,
altera alteri magno sit commodo. Analysi geometria
illime et foecundissime utitur: haec ipsa illi pulcherri-
im affert usum, nec non permultas res difficiliores per-
icue explanat: quin altera uti licitum est, ut alterius de-
gamus novas proprietates. Cum ita multa habeamus
alytica, quae ex similibus geometricis collegimus, tum
ixime geometriam permulta auxerunt, quae ex generali-
e analyticorum ratione prodierunt. Quamquam enim in
ometria analytica multa occurrunt, quae singulari natura
nt, ut frustra eorum similia in analysi quaesiveris: ta-
n, quidquid ex legibus pure analyticis proficiscitur,
llo modo negligendum est, sed quodammodo ad geome-
am quoque valet; nisi demonstrari potest, agi de re
orsus contraria.

Quod quotiescunque considerabam, verisimile mihi vi-
batur, quum analysis aequationes admitteret quotlibet
antitatum variabilium formulasque et leges ad quemli-
; earum numerum transduceret, geometriam analyticam
nparari posse, quae circa plures quam binas ternasve
ordinatas versaretur aequationesque plurium variabilium
ometrice describeret. Ad quod enim perficiendum nihil
us esse videtur, nisi ut singulis quantitatibus variabili-
s geometricae significationes tribuantur, quarum nulla
pedimento sit, quominus aliae scribantur. Nec non ad
ndem rem accuratius investigandam progressus neminem

inveni, qui causis satis persuaderet, vetitas esse coor-
natas plures duabus in plano, plures tribus in spatio libe
Verum sunt geometrica exempla, quae variandis quanti-
tibus, quae alias pro constantibus habentur, revera plur
variabiles in geometriam introducant, modo quae non co-
dinatae sint: quamquam ne in his quidem quaestionib
prorsus pro variabilibus usurpantur, cum variantes n
fiant, nisi differentiantur. Tantum quoque abest, ut ej-
dem rei satis jam ratio habita sit, ut haec exempla neq
inter se cohaereant, neque cum aliis partibus geometri
analyticae.

Principiis hujus disciplinae accuratius determinatis
perveni, ut in plano pariter atque in spatio libero et qu-
libet et quarumlibet coordinatarum usum permitti conte-
dam, ut significationem geometricam quotlibet aequation
quotlibet variabiles amplectentium in universum quoda-
modo indicare possim.

Nec non totam geometriam analyticam scribere ex-
sus sum nova ratione, quam satis memorabilem fore spe
quum non solum multa nova detegantur, sed tota discipli
ad eam generalitatem transducatur, quam usque non e-
stere putavimus. Ut autem totus is campus vastior e
quam qui ab uno viro perlustrari possit; ita multum abe
ut ego quoque omnia investigaverim, quae accuratiore i-
vestigatione digna sunt. Quamquam jam per aliquod te-
pus huic operi incumbo, tamen non nisi parvam part
operis absolvi. Qua de causa parvulo hoc specimine ta-
quam in meum librum introduco: principiis breviter exp-
sitis pauca exempla investigo, quorum auxilio tamqua
obiter summa adumbro: eum in finem, ut alii viri doc
quid de his rebus sperari possit, videant; ut his exemp
admoniti meum opus, ubi typis exscriptum erit, leger
eo lecto me in his rebus investigandis adjuvare veli
Si geometrae plures et peritiores huic campo aliquod s-
dium applicent, non dubito, quin eo multa commoda na-
ciscamur, quibus nunc caremus.

I. Geometria analytica originem duxit etiamnumque ititur eis quaestionibus, quae loca a datis aliis secundum nditiones propositas dependentia determinari jubent. Haim omnes quodammodo duci licet ab eo genere simplicismo, cum conditiones proponuntur, quibus uno puncto dato iud scribendum sit. Quae quaestiones cum analytice lvendae dantur, quantitates geometricae eligendae sunt, iae ad certum punctum scribendum adducere possint: iedemque secundum conditiones propositas analytica raone determinandae sunt.

In quantitatibus quidem geometricis semper una linea se debet, neque est ratio, qua punctum pro dato alio deiatur, sine ulla linea. Quodsi autem quis diceret, sola se utendum linea recta, quae minimam distantiam metitur et simplicissima esset, hic rem nimis anguste tractat. Ut enim quamlibet lineam quotlibet partibus constanm ex dato puncto ad alterum determinandum ductam hamus: ejus altera extremitas semper alterum punctum tis circumscribit, dum omnes ejusdem lineae partes certe finitae sunt forma, positione, longitudine. Qua de re, m nostra intersit, ut rationem punctorum determinandorum iam generalissimam adumbremus, constituendum videtur, amlibet lineam e dato puncto ductam, sive simplex sive mposita sit, sive rectis sive curvis partibus constet, m in finem posse adhiberi, dummodo facultate gaudea-

mus, singularum partium formam, positionem, longi
nem pro quaestione proposita determinandi.

Toti huic lineae nomen tribuo lineae coordin
ciae (Coordinaten-Linie) illasque quantitates, quae ad
partes determinandas pertinent, nomino coordinatas.
omnia coordinatarum genera, quae in vulgari geom
analytica adhiberi solent, his contineri apparet, cum
dinatae polares a linea simplici praebeantur, cujus
tio ab angulis variantibus determinatur; coordinatae
males et obliquangulae lineam coordinaticiam duarum
trium partium rectarum constituant ad angulos consta
applicatarum.

II. Ubi linea quaedam electa est, cujus coordi
conditiones quaestionis propositae apte exprimi videntur,
ipsae aequationibus exprimendae sunt. Novas meas
dinatas facile iis circumscribi, paucis exemplis expo
nec non qua ratione circumscribantur.

Ex A puncto (fig. 1) proficiscatur radius lucis
directione. Quaeritur, ad quod punctum dati plani
perventurus sit, per plura data plana transgressus, qu
varie refringitur. Commodissime ad punctum quaes
determinandum h. e pro linea coordinaticia sumetur illu
dius lucis ipse, qui rectis lineis compositus erit. Si p
data ad planum chartae normalia esse ponimus, radius
hoc non excedit, atque refringitur in illorum intersecti
bus K'''M,K''N ipsis. Si radii singulas partes non
x, y, z, earumque positionem circumscribo angulis,
singulae cum data quadam linea AX constituunt, r,
hae sex coordinatae aequationibus determinandae er
Plana data sunt datis distantiis Am=a''', An=a'''+
Ao=a'''+a''+a', angulisque, quos intersectiones ad da
lineam AX constituunt α''', α'', α'. Angulos, qui s
partibus radii x, y, z, antequam singula plana consequ
tur, cum lineis ad ea normalibus, scribe ε''', ε'', ε',
gulosque, quos partes fractae ad plana ipsa MK''', N
constituunt, γ''', γ''. Si coefficientes refractionis dati s
n''', n'', habemus

$\varepsilon''' = n''' \cos\gamma'''$ sive $\cos(x - \alpha''') = n''' \cos(y - \alpha''')$ (B.)
$\varepsilon'' = n'' \cos\gamma''$ sive $\cos(y - \alpha'') = n'' \cos(z - \alpha'')$ (D)

Ex triangulis AMm, MNr'', NOr' sequuntur

$$Mm = \frac{a''' \sin x}{\sin(\alpha''' - x)} \text{ et } x = \frac{a''' \sin \alpha'''}{\sin(\alpha''' - x)} \quad (A)$$

$$Nr'' = \frac{Mr''. \sin y}{\sin(\alpha'' - y)} \text{ et } y = \frac{Mr''. \sin \alpha''}{\sin(\alpha'' - y)}$$

$$Or' = \frac{Nr'. \sin z}{\sin(\alpha' - z)} \text{ et } z = \frac{Nr'. \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - z)}$$

'' et Nr' inveniuntur, ubi r''p'' cum Mm et r'p' cum parallelas duxisti, ex triangulis r''np'' et r'op'.

$$r'' = a'' - \frac{r''p''. \sin(\alpha'' - \alpha''')}{\sin \alpha''} = a'' - \frac{a''' \sin x \sin(\alpha'' - \alpha''')}{\sin \alpha'' \sin(\alpha''' - x)}$$

et $r''p'' = Mm$; $\quad Nr' = a' - \frac{r'p'. \sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin \alpha'}$, unde

$$\text{cum } r'p' = Nr'' + r''n = \frac{a'' \sin y}{\sin(\alpha'' - y)} - F$$

$$= \frac{a''' \sin x \left[\sin y \sin(\alpha'' - \alpha''') - \sin \alpha''' \sin(\alpha'' - y)\right]}{\sin \alpha'' \sin(\alpha''' - x) \sin(\alpha'' - y)}$$

$$= a' - \frac{a'' \sin y \sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin \alpha' \sin(\alpha'' - y)} + \frac{\sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin \alpha'} \times F$$

Inde prodeunt

$$= \frac{a'' \sin \alpha''}{\sin(\alpha'' - y)} - \frac{a''' \sin x \sin(\alpha'' - \alpha''')}{\sin(\alpha'' - y) \sin(\alpha''' - x)} \quad (C)$$

$$\frac{a' \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - z)} - \frac{a'' \sin y \sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin(\alpha' - z) \sin(\alpha'' - y)} + \frac{\sin \alpha' \sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin(\alpha'' - z)} F \quad (E.)$$

Quinque aequationibus A, B, C, D, E coordinatae inri possunt: cum x datus sit, ex A et B statim prodex et y, harum quantitatum valores nactus ex C et D nire potes et y et z, harum et illarum auxilio z quoex E: tribus rectis partibus x, y, z ad justas positi- et longitudines conscriptis punctum quaesitum O ha- s.

Quoties radius lucis ab ejusmodi planis infringetur, partibus atque una erit composita linea coordinaticia; ominus valores omnium coordinatarum ad eam pertium explicari poterunt. Si plana, quibus radius in-

fringitur, non omnia ad idem planum normalia sint, ad p
tium x, y, z positiones determinandas saltem binis ang
opus sit. Aptissime ad angulos r, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, qui omnes a
AX incipiunt, adjungas angulos, quibus plana angulo
r, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ inclinant ad datum planum quoddam ut YAX: a
eos nomines ordine $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. — Si plures praebebu
partes, eas significa ordine litteris z, y, x, w, v, . . . ,
ut z semper punctum quaesitum O attingat, huic anteco
y, huic x; earum angulos litteris Germanis $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{y}$,
r, $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{W}$; $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$; . . . ut ex gr. ad w determinan
sint $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{W}$.

III. Si eae quaestiones solvendae dantur, quae al
quantitatem geometricam (lineam, superficiem, alia) c
aliam moveri jubent, facillime ad aequationes transdu
tur usu lineae coordinaticiae plurium partium. Per lin
hyperbolam ducatur centrum lineae circularis variab
cujus radius crescat pro centri distantia ab altera li
rum asymptotarum, ita quidem, ut ejusdem lineae circ
ris planum angulum α datum constituat ad planum hy
bolae, amborumque planorum intersectio semper norm
sit ad lineam, quae hyperbolam eodem puncto tangit.
exprimendam superficiem oriundam facillimae aequati
praebentur adhibenda linea coordinaticia quattuor par
rectarum z, y, x, w, si w, x ita sumuntur, ut aepua
hyperbolae $zw - a^2 = 0$; y, z ita, ut aequationi circu
$y^2 + z^2 = \frac{w^2}{b^2}$ satisfaciant. Nec non omnium plano
justae positiones facillime exprimuntur.
enim angulos, quos z cum y, y cum x, x cum w, w
data quadam AX constituunt, vocamus $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, r, $\mathfrak{w}$, angu
que, quos planum anguli $\mathfrak{z}$ cum plano $\mathfrak{y}$, planum angu
cum r, planum r cum $\mathfrak{w}$, planum anguli $\mathfrak{w}$ cum plano
dam dato YAX efficit, ordine vocamus $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{W}$; fi
formaveris aequationes

$$\mathfrak{w} - c' = 0; \quad \mathfrak{W} - C' = 0; \quad \mathfrak{r} - c'' = 0; \quad \mathfrak{X} - C'' = 0$$

$$\cot g\,(\mathfrak{y} + c'') - \frac{x}{w} = 0^*); \quad \mathfrak{Y} = 0; \quad \mathfrak{z} - 90^0 = 0; \quad \mathfrak{Z} - \alpha = 0$$

*) $\mathfrak{y}$ enim, qui a producta coordinata x et a linea ad hyperbolam

Hos angulos alios esse, atque quos proximo capite usi su
us, jam animadverteris. Ambo genera digna sunt, quae
surpentur: modo hoc, modo illud rei magis est idoneum.
lis dedi nomen angulis prioris generis sive ab eis-
em incipientibus, quum omnes ab eisdem datis ab
X linea et YAX plano tamquam incipiant: hos vocavi
terius generis vel ab antecedentibus incipien-
s, quum alter angulus ab antecedenti parte incipiat, al-
r a plano duarum antecedentium partium.*)

Quidquid ad angulos utriusque generis accuratius con-
uendos pertinet, qua ratione positivi vel negativi an-
li constituendi, qua positivae negativaeve partes ducen-
e sint, ea omnia in majore meo opere satis illustravi:
hoc libello omitti poterunt.

Aliam rem noto. In hujus quaestionis aequationibus
ptem sunt, quae nihil praescribant, nisi ut certis angu-
singuli tribuantur valores, qui constantes vocantur.
amquam ei, cui loca geonetrica describenda dantur, ma-
ne necessarium est, hos valores cognoscere; tamen si-
liter, atque in vulgari geometria analytica constantes
guli coordinatarum a coordinatis excluduntur, ego quo-
e neque ejusmodi quantitates in coordinatis numerabo,
que ejusmodi aequationes in aequationibus numerare
ebo.

IV. Ac ne linearum quidem coordinaticiarum curvis
tibus compositarum usus a geometria analytica excludi-
. Quamquam concedendum est, nobis pausissimarum
ibendarum facultatem esse; tamen quaestiones locaque
metrica sunt, in quibus describendis ita omnes aliae
thodi posthabendae sint, ut ad curvarum coordinatarum

---

i formatur, aequat $90^0-(\varepsilon''-\varphi)$, dum est $\varepsilon'' = \chi =$ angulo ab
t producta w incluso, φ angulus, quem linea hyperbolam tangens ad
m w constituit, ut sit tang. $\varphi = \frac{dx}{dw} = -\frac{x}{w}$

*) Hoc in libello semper hos angulos alterius generis sumptos esse
, nisi apertis verbis dico, priores construendos esse.

usum geometrae jamdudum quasi non sentientes ded
sint. Ita lineam, quae vocatur spiralis parabolica, de
minandam dant (fig. 2) arcui circulari AmN, cui ad
gulos rectos partes rectae NO′ et NO″ adjunguntur.
militer lineae per superficies cylindricas ductae (fig. 3)
ter curvas partes basin cingentes AmN′, AmN″, quae
abscissis sumuntur et rectas partes laterarias N′O′, N″
. . . quae pro ordinatis sunt, exprimuntur.

Aliae multae quaestiones sunt, quas curvarum cod
natarum auxilio solvere possimus. — Circa lineam ci
larem radii R, in qua punctum A datum est, alia li
circularis radii r ita movenda est, ut in puncto inters
onis eae lineae, quae ambas tangunt, certum angulu
constituant, planumque hujus anguli cum plano prioris circ
ris datum angulum γ. Si semper linea circularis, dum
vetur, simul aequabili celeritate circa centrum circum
tur, nosque quaerimus, quam lineam certum punctun
lineae motae describat; hujus positionem pro dato A de
minare possumus linea e duobus arcubus circularibu
et z composita et aequationibus

$$z = f(y),\ \eta = c,\ \mathfrak{Y} = C,\ \mathfrak{z} = \beta,\ \mathfrak{Z} = \gamma.$$

Si linea mota, dum n^{ies} circumagitur, semel circ
neam non motam proficiscitur, prima aequatio est
$\frac{z}{r} = \frac{ny}{R} + C$. Si quis curvis lineis uti vult, non
est, ut omnium longitudo in lineis r
accurate possit abscidi. Hic z et y metiri poteris eo
cu, qui in linea circulari radii = 1 ad angulum centri
pertinet: quam unitatem ipsa $\frac{z}{r}\, n^{ies}$ saepius com
ctitur quam $\frac{y}{R}$. Quemcunque igitur arcum y sumimus, cun
eum — adjungi arcum z necesse est, cujus
gulus centri angulum illius y n^{ies} multiplicatum consu
angulo C superat. Centri positio, qua ad arcus z du
dos opus est, angulorum $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$, radiique r auxilio invc
potest. — Lineam descripsi, (fig. 4) quae datur a rad
$= \frac{1}{2} R$, a conditionibus $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$, $\eta = 90^0$, $\mathfrak{z} = 30^0$, e

quatione $z=y$, quae evenit, si $n=\frac{R}{r}=2$ et $C=o$, e., si initio punctum O supra A positum erat. — Adeo ieae curvae forma variantes usurpari possunt. Nihil im-dit, quominus construamus, etiamsi quaestioni conditio dita sit, ut radius circularis motae crescente arcu per-rso ipse crescat. Quae conditio si additur, alia aequa-addenda est $r=m.y$. In quocumque arcus y puncto z plicare voles, postquam angulis $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$ construendis posi-nem lineae illum z tangentis inveneris lineamque ei norma-n duxeris, centrum circularis motae habebis radio r pro-ne $=$ my in ea abscidendo; atque circa centrum simi-er ut supra is arcus z applicandus erit, qui ad n^{ies} jorem angulum centri pertinet, quam qui ad y pertinet quidem $C=o$). Construxi imaginem (fig. 5), si $m=\frac{1}{2}$, $=1, n=\frac{3}{2}, C=o$, ad hoc iterum $\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=o$, $\mathfrak{y}=90^o$, $\mathfrak{z}=30^o$.

Ut in his exemplis loco coordinatarum lineis circula-us usus sum, similiter in aliis alias usurpari posse cur-s, nemo negabit.

V. His exemplis non solum monstratum est, quomodo aestiones ad aquationes transducantur, sed etiam re ipsa bavi, lineas coordinaticias cujuslibet generis ad quaesti-es geometricas posse adhiberi. Nihilominus multum ab-, ut, cum quaedam quaestio revera proponitur, ad ejus um geometricum determinandum quaslibet coordinatas hiberi licitum sit. Plurimae enim lineae coordinaticiae ficiliores sunt, quam quae construi possint, etiamsi nium coordinatarum valores noti sint: multae, quae de-ibi possunt, saepe aequationes praebent, ex quibus va-es explicari nequeunt; etiam aequationes, quae ipsae mari non possunt. Sequitur, ut vulgaris quoque geometria alytica, quae nullas fere lineas eligat praeter lineas arum triumvc partium rectarum ad angulos constantes stitutarum, multis commodis careat. Aliae enim et mul-lineae dantur, quas construere possis. Ad hoc quanta ltitudo quaestionum, si vulgaribus coordinatis construen-

dae dantur, aequationes involvit, quae neque solvi neq
construi possint. Harum multae usu novarum coordinat
rum ad aequationes transducuntur, quae solvi possunt, qu
multo facilius construuntur.

Hujus generis omnes quaestiones sunt, quas his capi
bus tractavimus. Si eas ad vulgarium coordinatarum a
quationes transducere velis, nullo modo ad finem perv
nias. Quamquam in quaestione capitis secundi totus radi
lucis eodem plano continetur, tamen multum abest, ut
duabus coordinatis determinari possit: neque obliquangul
Ao et oO potest neque normalibus AP et PO. Stati
quidem habes $Ao = a''' + a'' + a'$, tamen $oO = \frac{Nr' \sin \zeta}{\sin(\alpha' - \zeta)} + \frac{r'p' \cdot \sin \alpha''}{\sin \alpha'}$, cum qua formula, ubi valores Nr' et r'p' s
pra (cap. II) expliciti substituti sunt, aequation
$\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{D}$ conjungendae sunt ad aogulos ζ et η eliminando
Ji vero eliminari possunt vix ex his, vix ex normalib

$$AP = z. \cos \zeta + y. \cos \eta + x. \cos \mathfrak{x}$$

et $PO = z. \sin \zeta + y. \sin \eta + x. \sin \mathfrak{x}$, ubi
valores z, y, x substituti sunt. Similiter alias qnaesti
nes, quas tractavi, in vulgares coordinatas permutari pos
nego.*) Cum autem ita sperari possit, fore ut saepius n
varum coordinatarum usu, quae non ita difficilius construu
tur, faciliores dentur aequationes, quamquam plures; qu
est, quod hanc solvendi rationem spernas.

VI. Hac nova coordinatarum definiendarum ratio
fines geometriae analyticae longe prolati sunt. Cum en
hucusque paucissima genera praebuerit aequationum, qu
construi possint, paucissimas lineas et superficies aequ
tionibus expresserit; meam rationem secutus vix spatiu
habebis, omnium generum facilium rationem habendi. Cu
enim lineae coordinaticiae partes cujuslibet multitudi
atque varii generis sumi licitum sit, cum in unaquaq

*) Quid? etiam in majore meo opere accuratius demonstravi, etiai
novas coordinatas in vulgares possimus permutare, raro dari ab har
aequationibus atque ab illis geometricam significationem omni ex pa
eandem.

iodo has modo illas partes, hos illosve angulos variantes
icere possimus, innumera gignuntur coordinatarum sy-
temata. Dum solum ad horum simplicissima aequationes,
uae construi possint, referuntur, magna varietate imagi-
es (ita semper vocabo loca geometrica) praebentur Ad
oc non solum varius quoque numerus aequationum ad
uodque coordinatarum systema referri potest, sed ne coor-
inatas quidem et quantitates indeterminatas*) eodem
umero dari necesse est. Quamquam hae saepissime eae
unt, quae coordinatas in aequationibus repraesentant, quae
itur numero eas aequant; tamen fieri potest, ut coordi-
atae indeterminatas superent, etiam ut ab his illae supe-
entur. Saepe jam in vulgari geometria analytica occur-
mt aequationes, quae aliquam coordinatam non habeant;
aliis disciplinis ut in mechanica evenit, ut quantitates
ariabiles in aequationibus insint, quae vires, celeritatem,
lia representent. Ut tamen in his disciplinis saepe aequa-
ones construendae dantur; ita quae in iis singulares ae-
uationum occurrunt formae, eae ad geometriam pertinent;
que illae quidem peculiares quantitates, quas habent,
iamsi proprie non construuntur, tamen cum valores ima-
inarios excludant, aliquam vim exercent in imagines ge-
netricas. Hujusmodi vero quantitatum ita in geometria
tio habenda est, ut nihil nostra intersit, quid proprie
praesentent. Modo saepius de indeterminatis non re-
raesentatis verba faciam, eaeque semper valores ima-
inarios excludent.

Cum majorem meum librum leges, miram ita imagi-
um varietatem praeberi videbis, quamquam vix unum ex-
mplum ad quodque simplicissimorum systematum refero**):
perveni, ut fere quamvis imaginem geometricam mihi
idear exprimere posse aequationibus, dummodo lex mihi

*) quae quidem aequationibus adhuc determinandae dantur. Prae
ro id nomen vulgari voci variabilium, cum haec minus generaliore
usurpari soleat, quam quae omnibus nostris quaestionibus convenit.

**) exclusis etiam coordinatis curvis.

nota sit, quam in ea describenda secuti sint. Hoc quide libello non nisi paucissima exempla proferam, ex quibus a pareat, omnia genera, imagines puuctis vel lineis vel s perficiebus compositas, ipsa corpora solida aequationib repraesentari posse. In eisdem non nisi rectas partes neae coordinaticiae usurpabo.

VII. Paucissima exempla hic adumbrare potero de re, quum methodi, quibus in majore libro aequation facilius construere doceo, plus spatii poscant, quam ut h exponi possint. Hic de acquationibus construendis solu hoc unum suadeo, ne negligatur ordo, quo in linea coo dinaticia partes se subsequantur. Quibus conditionib ordo negligi vel mutari possit, in majore opere expon Si quattuor sint partes, facillime construantnr ordine h $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{w}$, w, $\mathfrak{X}$, r, x, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{y}$, y, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z}$, z.

Quando puncta facile nancisci potero, quae oriunt dum solas partes primas (h. e. initio A proximas) cum ips rum angulis, ut $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{w}$, w, $\mathfrak{X}$, r, x construo; eorum im ginem, quam constituunt, vocabo projectionem in ($\mathfrak{W}$ $\mathfrak{w}$, w, $\mathfrak{X}$, r, x): similiter atque in considerandis lineis d plicis curvaturae imaginem, quae ab altera aequatio $F_1(x, y)=o$ datur, projectionem vocant in x.y. Ut omnibus hujus punctis tertia coordinata z secundum altera aequationem $F_2(x, z)=o$ superstruitur; ita ego quoqu dum in unoquoque puncto illius projectionis reliquas s perstruo coordinatas, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{y}$, y, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z}$, z, veram invenio im ginem.—Porro, ut in vulgari geometria superficierum pars verae imaginis, quae ad certum valorem constante ut x=c pertinet, sectio nominatur; ita ego circa omn imaginum genera eam imaginis partem, quae eo datu quod una indeterminata ut w uno ex permissis valoribu ut c afficitur, voco sectionem constantis w=c. Im ginem totam habebimus, ubi huic quantitati sensim omn valores dati erunt, qui ab aequationibus permittentur. S militer sectiones quoque plurium constantium, ut $\mathfrak{w}$, r, describi posse apparet.—Huic vocum sensui ampliori s venia.

VIII. Systemate aequationum

$(z-\alpha y+c)\,(z-\beta y+c')=0$

$(y-a)\,(y-a-f)\,(y-a-2f)\,\ldots\,(y-a-(n-1)f)=0$

referuntur ad duas coordinatas y, z sub angulis constantibus applicandas, praebentur 2n puncta in duabus lineis rectis posita. Signum (fig. 6) adumbratur, si in utrale linea simul $y=a$, $z=e$ esse ponimus, unde $c=a\alpha-e$ $=a\beta-e$ sequuntur. Cum ponuntur $\beta=-\alpha$, $e=0$, $\zeta=90^0$, c signum ab y axi dimidiatur.

Habeamus lineam coordinaticiam duarum partium anlorumque sint $\mathfrak{y}=$cst., $\zeta=90^0$; ad hoc $\mathfrak{Z}=0$, ut linea a nunquam ex eodem plano excedat. Ad eam relatum quationum systema

$$z-(y-a)\alpha)(z+(y-a)\alpha)=0\quad(\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-2\pi)=0$$

$$(y-a)(y-a-f)(y-a-2f)\ldots(y-a-(n-1)f)=0$$

$$\text{dum tg}\,\frac{\pi}{r}=+\frac{(n-1)\,f\alpha}{a+(n-1)f}$$

quam stellam praebet r radiorum eamque punctis adumtam. Sectio enim unaquaeque constantis $\mathfrak{y}$ praebet sim (fig. 6) a crure anguli $\mathfrak{y}$ dimidiatum. Si ponimus 5, n=6, accipimus imaginem (fig. 7) descriptam, stel- quinque radiorum, in quorum singulis lateribus sex cta sunt scripta.

IX. Si ad lineam trium partium, quarum anguli sint $\mathfrak{y}=\mathfrak{Z}=0$, r=cst., $\zeta=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{r})$, aequationes pertit hae quattuor

$$(x-a)\,(x-2a)\,\ldots\,(x-(n-1)a)=0$$

$$\mathfrak{y}-x=0$$

$$(\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-\frac{2(r-1)}{r}\pi)\;=0$$

$$(z-2x\sin\frac{\pi}{r})(z-2(x-a)\sin\frac{\pi}{r})\ldots(z-2a\sin\frac{\pi}{r})\;z=0$$

eis quodvis eorum signorum in plano describitur, quae eris polygonalibus, qui vocantur, declarandis sunt. am n = 6, r = 5. (fig. 8) x coordinata ad AX cum r

ducta, invenimus projectionem in x, h.e. sex puncta M^o,[illegible] M'',M''',M'''',M'''''. Ad sectionem constantis x=a circa[illegible] construendam demetiaris angulos $\vartheta=0$, $\vartheta=72$, $\vartheta=14$ $\vartheta=216$, $\vartheta=288$, quorum crus incipiens est $M'M''$: singu[illegible] y, quae ipsi x oppositae sint, non in cruribus angulos [illegible] entibus ipsis sed in oppositis lineis abscidendae sunt, [illegible] perveniatur ad puncta $N_0N,N_{,,}N_{,,,}N_{,,,,}$. Cum z sub $\vartheta=$ 54° applicanda sit, in singulis autem y ab N ad M' p[illegible] tive eatur, z singulae ab N_0 versus $N_{,}$, ab $N_{,}$ versus [illegible] etc. abscidendae sunt. Ut autem nunc sectio consta[illegible] x=a scribenda est; ita aequatio quarta, quae in z—o fi[illegible] debet, solis duobus factoribus $(z-2a\sin\frac{\pi}{r})(z-o)=o$ c[illegible] stat: qua de causa duo puncta O, quae ad $\vartheta=0$ pertin[illegible] super N_0 et N, cadunt; duo quae ad $\vartheta=72$ pertinent, [illegible] per N, et N'', . . . polygonumque regulare quinque l[illegible] rum datur, in quibus singulis ut in N_0N, bina puncta [illegible] scripta sunt (duplicia quidem).

Inter sectionem constantis x=2a construendam c[illegible] M'' ad crus angulos incipiens M''M''' similiter anguli ii[illegible] applicantur, tamen y=—x=—2a absciditur. Ad z circ[illegible] scribendam quarta aequatio jam tres factores exhibet

$$(z-4a\sin\frac{\pi}{r})(z-2a\sin\frac{\pi}{r})(z-o)=o$$

ut in lineis z, quae super N^oN', $N'N''$ cadunt, terna pur[illegible] abscidantur, in N^oN' ipsa N_0, $N_{,}N'$: unde novum pe[illegible] gonum constituitur duplo majorum laterum, in quibus [illegible] gulis terna puncta invenies, ut $N_0,N_{,}N'$.— Dum simile[illegible] sectio constantis x=3a circa M''' construitur, z quatt[illegible] valores nanciscitur, cum quarta aequatio fiat

$$(z-6a\sin\frac{\pi}{r})(z-4a\sin\frac{\pi}{r})(z-2a\sin\frac{\pi}{r})z=o$$

ut ad sectionem hanc pertineant quindecim puncta, cum[illegible] singulis lateribus novi pentagoni quaterna puncta conscr[illegible] sint. Similiter aliae sectiones constantes construen[illegible] Polygonum, quod ad sectionem x=o pertinet, in u[illegible] punctum N_0 coalescit, quippe cum y=z=x=o fiant. [illegible]

ta imago, si in aequatione prima usque ad n=6 pergitur,
mctis constat $\frac{n(3n-1)}{1.\ 2.}=51$ vel sex polygonis, quorum
rtex A sive M_0 sive N_0 communis est omnibus. Non
iter ab his quidem aequationibus, si r=3, repraesenta-
ntur numeri triangulares; tetrangulares, si r=4: nume-
s cujusque seriei primus, cum n=1; secundus cum n=2;
rtius, cum n 3 aequat; caeteri similiter.

X. Imagines, quibus numeri pyramidales, quos di-
nt, repraesentantur, dantur ab aequationibus

$w\ (w-a)\ (w-2a)\ \ldots\ (w-(n-1)a)=0$

$(x-w)\ (x-(w-a))\ (x-(w-2a))\ \ldots\ (x-2a)(x-a)x=0$
$+x=0$

$(y-\frac{2\pi}{r})(y-\frac{4\pi}{r})\ldots(y-\frac{2(r-1)\pi}{r})=0$

$(z-2x\sin\frac{\pi}{r})(z-2(x-a)\sin\frac{\pi}{r})\ldots(z-2a\sin\frac{\pi}{r})\ z=0$

s lineam coordinaticiam quattuor partium w, x, y, z,
nis, quorum anguli constantes sunt, excepta $\mathfrak{y}$, ad hoc
$\mathfrak{y}=3$, $\mathfrak{z}=-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{r})$, r et $\mathfrak{x}$ constantes at non evanescentes.

Singulae sectiones constantis w eodem plano conti-
ntur, omniaque haec plana inter se parallela sunt aequa-
isque intervallis separata. Aequatio secunda, quae in
-o=o finiri debeat, ad sectionem constantis w=o unum
torem, ad sectionem w=a duos, ad sectionem constan-
w=2a tres factores praebet. Ex exemplo, quod ante-
it, apparet, sectionem constantis w=o esse unicum
ctum, sectionem constantis w=a secundam imaginem
rgonalem, ut ita dicam, sectionem w=2a tertiam illa-
imaginum, constantis w=3a quartam. Cum posita
=4 hae quattuor sectiones simul cogitandae sint, en tam-
m pyramidem solidam punctis adumbratam, cujus basis
rgonum r laterum est.

XI. Si ad lineam coordinaticiam trium partium sub
ulis constantibus adjunctarum, quorum r=o, $\mathfrak{y}=90^\circ$,
rs aequationum duarum systema

$$\{z-cz=o \quad y^2+x^2-b^2=o\}$$

projectio in y et x erit linea circularis BNQ. (fig. 9) I
ejus unoquoque puncto N ad certam abscissam AP=x er
tinenti z erigenda est sub suis angulis, c$\underline{\text{ies}}$ major, qu
illa abscissa. Si per P ducimus ad AX sub eisdem angli
$\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$*), PP'=c.AP et per N huic parallelam et aequalem NQ
punctum quaesitae imaginis erit. Cum omnes hu
modi lineae pp' cum PP' parallelae = c. Ap sint, ce
tur, nostram imaginem eandem esse, quae oriatu
ordinatae, quae ad lineam AS pertinent, sua po
one exstruantur super extremitatibus ordinatarum,
in circulari respondent, h. e. acsi linea recta z=cx s
circularem $y^2=b^2-x^2$ superstruatur. — Si sumimus
=x', OP'=y', atque ubi per Q ducta est QQ' para
cum PP', si AQ', quae est constans, =a ponimus, h
mus x:x'=b:a, unde ob $x=\frac{b.\,x'}{a}$ et y=y' ex $y^2=b^2-x$
oritur $y'=^2b^2-\frac{b^2x'^2}{a^2}$ pro quaesitae imaginis aequation

$$\frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2}=1,$$

aequatio ellipsis lineae inter coordinatas obliquangula
y' expressae, pro qua ex forma ipsa aequationis conclu
b et a esse dimidias diametros conjugatas. Itaque ell
exprimi potest duabus his aequationibus z=cx, y^2+
$b^2=o$ inter ternas coordinatas.**)

XII. Eaedem aequationes construi possunt ellip
que dant, sive omnes tres lineae coordinaticiae partes
idem planum vergunt, sive non. Illud in linea trium
tium fit, cum angulorum sunt $\mathfrak{Y}=o$ $\mathfrak{Z}=o$, si quidem
rius generis sunt; cum $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}$, si prioris generis a
los habes.

Adeo nihil impedit, quominus linea coordinatici

*) si quidem anguli prioris generis sumuntur. (cf. cap. III.)

**) Eisdem aequationibus via praebetur, ellipsim ex dimidiis d
tris conjugatis a et b et angulo incluso α facillime construendi.

ioque conditioni subjiciatur, ut tota teneatur eadem linea
cta; cui satisfacit linea trium partium, dum non solum
=ʒ=o, sed etiam ȳ=o, ʒ=o, si quidem anguli alterius
nt generis: ut habeas ȳ=ʒ=x̄ et ʒ=ȳ=r opus est, si
guli prioris generis sumuntur. Quo facilius ostendam,
iae imago hac conditione praebeatur, notam illam dis-
iram ellipsis aequationem

$$\frac{z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=o$$

(uamquam evanescentibus ʒ et ʒ omnia ejus puncta ea-
n linea recta continentur, tamen pro aequationis ima-
ie linea infinitae longitudinis habenda non est. Puncto-
n enim distantia ab A, quae exprimitur a summa y+z
=X infinita reddi nequit. Nam si introducimus X in ae-
tionem datam, substituenda z=X—y, habemus

$$y^2-2yX\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(b^2-X^2)}{a^2+b^2}$$

e

$$y=\frac{a^2X\pm ab\sqrt{(a^2+b^2-X^2)}}{a^2+b^2}$$

le cernitur, nunquam esse $X^2>a^2+b^2$; quae enim summa
ia X^2 superaretur, y imaginaria fieret. Linea igitur
existit, nisi dum $X^2\leqq a^2+b^2$. Quamquam autem li-
finita ab aequatione datur, tamen lex continuitatis,
m vocant, nequaquam negligitur. Dum valorum per-
sorum aliquem huic X tribuis, y similiterque z duplices
ores nanciscuntur, ut duplici ratione ad unumquodque
ginis punctum perveniri possit: h. e. imago dupliciter
cripta est, ellipsis quodammodo compressa est, ut uter-
ramus in eandem lineam incidat. Ea autem puncta
sunt duplicia, pro quibus valores y et z aequales prae-
tur, id quod fit, antequam imaginarii fiunt h. e. si
$^2-b^2-X^2=o$.

Ubi igitur linea ad haec puncta pervenit, per sua ip-
vestigia regreditur, ita ut extremitates sint nos-
imaginis. Eorum coordinatae inveniuntur, si quantitas,

quae sub radicis paris signo subest, evanescens redditur in hoc exemplo habes

$$X=\pm\sqrt{(a^2+b^2)}, \text{ unde } y=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad z=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

sequuntur. Ut, si aequatio $\mathfrak{F}$ non facile solvi potest, conditio, qua radices y (vel z) aequales prabentur, differentiando elici solet; ita haec quoque puncta ultima exprimi possunt duabus aequationibus

$$\mathfrak{F}(X, y) = 0 \text{ cum } \left(\frac{d\mathfrak{F}(X, y)}{dy}\right)=0$$

$$\text{vel } \mathfrak{F}(X, z)=0 \text{ cum } \left(\frac{d\mathfrak{F}(X, z)}{dz}\right) =0$$

XIII. Consideremus adhuc, quae imago, eadem conditione interposita, repraesentetur ab aequatione

$$z^3-6az^2+3zy^2+9a^2z-4a^3=0$$

Substituta $y=X-z$ aequatio $\mathfrak{F}$ datur

$$z^3-\tfrac{3}{2}(a+X)z^2+\tfrac{3}{4}z(X^2+3a^2)-a^3=0$$

Cum aequatio tertii sit ordinis, z semper realis reddi potest, quicunque datur constans valor X. Itaque cum nullum punctum lineae infinitae ab aequatione excludatur, tota lineam infinitam ad nostram imaginem pertinere cognitur. Nihilominus aequationes $\mathfrak{F}=0$ et $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}\right)=0$, qui sunt

$$4z^3-6(X+a)z^2+3z(X^2+3a^2)-4a^3=0 \text{ et}$$
$$4z^2-4(a+X)z+X^2+3a^2=0$$

proferunt $(X-a)^3+4a(X-a)\sqrt{(X-a)}\sqrt{2a}=0$

cujus radices $X=a$ et $X=a+2a.4^{\frac{1}{3}}$ utrique aequationi $\mathfrak{F}=0$ et $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}\right) =0$ satisfaciunt. Non difficile ostendi potest, quid hae radices velint. Dantur eaedem ab aequatione $\mathfrak{F}$, etiamsi nullam differentiationem adhibes. Secundo ejus termino remoto habemus $z'^3-3a\left(\frac{X-a}{2}\right)z'+\left(\frac{X-a}{2}\right)^3=0.$

Si X constante quaeritur, qui valor z ad eundem constantem valorem pertineat, non semper singuli, sed interdum terni quoque valores z praebentur, atque id quidem du-

negativa est et $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$ h. e. intra $X=a$ et $X=a+2a.4^{\frac{1}{3}}$ uamquam igitur haec linea infinitita sit, tamen interna uadam proprietate excellit: quaedam ejus pars, cui lon-itudo $= 2a.4^{\frac{1}{3}}$, tripliciter descripta videtur, dum aliae irtes omnes simplices sunt. Ut aequationes $\mathfrak{F}=o$ cum $\frac{\mathfrak{F}}{z})=o$ radices aequales ipsius z quaerunt, ita extremita-s partis triplicis indicant: antequam enim duae radices z aginariae redduntur, aequales se praebent.

XIV. Eadem ratione circa lineam coordinaticiam cur-rum partium versantes, partem aliquam finitam lineae jusvis curvae aequationibus representare possimus. At-nen idem facilius alia ratione consequimur introducenda antitate indeterminata, quae a nulla coordinata reprae-ntetur, tamen nullos nisi reales valores admittat.

Habeamus ad lineam coordinaticiam duarum partium angulis constantibus applicatarum referendas aequati-es

$$\left\{ y=\sqrt{(a^2-\xi^2)} \quad z=b\sqrt{(\xi^2+4a^2)} \right\}$$

quibus ξ quantitas indeterminata non repraesentata nibus valoribus realibus afficienda est, qui intra $+a$ et continentur, non pluribus. Dum ξ ab $-a$ usque ad o scit, abcissa y valores, qui ab o usque ad $+a$ sunt, currit, h. e. ab A (fig. 10) usque P' et simul ab A us-e ad P'': z valores, qui sunt ab $\pm$ $ba\sqrt{5}$ usque ad ab, h.e. quattuor partes lineae curvae simul describuntur, B' usque C' et a B, usque C, atque a B' usque C'' et B, usque $C_{,,}$. Dum ξ ab o usque ad $+a$ crescit, ab-cissa y eosdem valores ordine immutato nanciscitur, ab a usque ad o, a P usque A, similiter z ab $\pm 2ab$ usque $ba\sqrt{5}$, ut eaedem curvae partes iterum describantur, a ad B. Itaque duo arcus curvi soli C'C'' et $C_{,}C_{,,}$ ae-tionibus satisfaciunt. —

Eaedem commodius repraesentantur his, in quibus ξ altera eliminavimus

$$\left\{ \frac{z^2}{b^2}+y^2=5a^2 \quad \xi=\gamma(a^2-y^2) \right\}$$ e quaru

priore cernimus arcus esse ellipticos; ex altera, non
tam ellipsim esse sumendam, modo eam partem, cu
coordinatae ipsam ξ non imaginariam reddant, h. e. cu
abscissae intra valores $+a$ et $-a$ teneantur.

Eo quod arcus dupliciter describuntur, legi conti
tatis satisfieri apparet.

Ne dicas, ejusmodi aequationes et imagines ine
esse. In disciplina physica, in primis in mechanica
modo aequationes ejusmodi sed etiam imagines occurr
vel saltem comparari possunt. Ex. gr. perpendiculum,
jus positio parvo quodam pulsu mutata est, lineam cur
describit, at non totam, cum ejus motus ab illo pulsu
pendeat, atque certa parte percursa regreditur. Illa
que ellipsis compressa, quam supra investigavimus,
hanc rem pertinet, cum proprie duabus aequationibus
praesentetur

$$\left\{ Y-\operatorname{tg} r.X=o, \text{ et } y^2-2yX\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(b^2-X^2)}{a^2+b^2} \right\}$$

(si quidem $\chi=o$), quantitasque y, quae non amplius
lineam coordinaticiam pertinet (haec enim jam constat
lis duabus partibus sibi normalibus X et Y), pro non
praesentata habenda est.

XV. Hac ratione facile imagines ex finitis parti
linearum rectarum vel curvarum compositas aequationi
possunt circumscribi. — Aequationes

$(z-(y-a)\alpha-e)(z-(y-a)\beta-e)=o \quad \xi=\gamma[(y-a)(a+b-$
describi jubent signum illud (fig. 6) lineis ipsis. (
enim ξ imaginaria reddi non debeat, y omnes valores
les, qui sunt ab a usque ad a+b, accipere potest,
nullos alios.

Et ipsa stella, quam supra (fig. 7) punctis consig
vimus, a lineis ipsis efficitur, si aequationes sumimus

$(y-\frac{2\pi}{r})(y-\frac{4\pi}{r})\ldots(y-2\pi)=o.(z-(y-a)\alpha)(z+(y-a)\alpha)$

$$\xi = \sqrt{[(y-a)(a+b-y)]}$$

$$\text{cum } \operatorname{tg}\frac{\pi}{r} = \frac{b\alpha}{a+b},\ \beta = o$$

olygonum regulare r laterum datur ab aequationibus

$$\left\{\begin{array}{c} y(y-\frac{2\pi}{r})(y-\frac{4\pi}{r})\ldots(y-\frac{2(r-1)}{r}\pi) = o \\ \xi = \sqrt{[z(2y\cos(\pi-\beta)-z)]} \end{array}\right\}$$

m omnes alii anguli constantes sunt, inter eos $\beta = o$, $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{r}$, nec non $y = \text{const.}$

XVI. Solo uno exemplo monstrabo, quam faciles surficies dentur, si anguli quoque variantes sumuntur. squiram aequationem

$$a^2\beta^2z^2 + b^2y^2 - 1 = o$$

$= 90^o$, $y = o$, $Y = o$; z, y, β variant.

Sectio constantis $\beta = \beta'$ lineam dat ellipsim, cujus alia semiaxis $= \frac{1}{b}$ semper eadem est, altera semiaxis = crescit, quo magis angulus β diminuitur.

Sectio constantis $y = y'$ dat duas spirales hyperboli-, cujus asymptotae lineae distantiis $= \frac{+\sqrt{(1-b^2y'^2)}}{a}$ initio A remotae atque parallelae sunt. Hae distaneo majores sunt, quo minor abscissa y sumitur, maxie atque $= \pm\frac{1}{a}$, si $y = o$; minimae atque evanescentes, 1, si $y = \pm\frac{1}{b}$, totae spirales in eandem infinitam line- rectam transeunt cumque asymptotis coalescunt.

Omnes hae asymptotae, ut ab aequatione $= \pm\sqrt{(1-b^2y'^2)}$ repraesentantur, in qua y' et d pro rdinatis normalibus haberi possunt, ita superficiem cyricam basi ellipsi constituunt, quae ipsa asymptota est versae datae aequationis superficiei.

Aliam superficiem supra (cap III) tribus aequationibus

$$\left\{ xw - a^2 = 0,\ \cot g(\vartheta + c'') - \frac{x}{w} = 0,\ y^2 + z^2 = \frac{w^2}{b^2} \right\}$$

in quinque coordinatis x, w, ϑ, y, z expressimus.

XVII. Si nulli angulorum $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{W}$ variant, ei valoribus interdum possunt affici, ut omnes lineae coordi naticiae partes semper eodem plano contineantur.

Sit data aequatio $x^2+y^2+z^2=1$

hacque conditione investiganda, dum ad hoc $\mathfrak{r}=0$, $\mathfrak{z}=90$ majoris simplicitatis causa ponuntur. Sectiones constanti $y=y'$ ellipses sunt, sectiones constantis $x=x'$ lineae ci culares. Omnium illarum ellipsium tamquam summa tota efficit imaginem, item omnium harum linearum circularium Si aequationem in vulgares X, Y normales permutare vi utendum est formulis

$$Y = y \sin \vartheta + z \cos \vartheta \qquad X = x + y \cos \vartheta - z \sin \vartheta$$

quantitatumque x, y, z duae quaelibet eliminandae sun

Accipimus y, et z eliminatis

$$Y^2 + (X-x)^2 = 1 - x^2$$

Ex eo, quod in hac aequatione x adhuc inest, cernitu hujusmodi quaestiones non solarum X, Y aequatione ex primi posse. Una ex indeterminatis x restat, quae no amplius ad lineam coordinaticiam pertinet (nempe ad linea duarum partium X et Y) eaque de re in eis indeterminati numeranda est, quae a coordinatis non repraesentantu Sectio constantis x linea circularis est, cujus centrum i axi abscissarum ad distantiam x locatum, quaeque ips radio variabili $\sqrt{(1-x^2)}$ descripta est.

Cum quaeritur, in qua harum sectionum certum quo dam punctum constantibus X et Y datum sit positum, ce nitur ex $x = \frac{X \pm \sqrt{(2 - X^2 - 2Y^2)}}{2}$, pro constantibus X, in universum duas radices x praeberi, quodque igitur pu ctum esse in duabus sectionibus h. e. dupliciter esse d scriptum, saltem dum $2 - X^2 - 2Y^2 > 0$ sit. Sin $2 - X^2 - 2Y$ < 0, ad nullam sectionem pertinet illud punctum datum h ab aequationis datae imagine excluditur, quae igitur totu

ınfinitum planum minime comprehendit. Conditione $2Y^2+Z^2-2=0$ ea puncta exhibentur, quibus puncta realia ab naginariis vel ab exclusis separantur, h. e. linea ellipsis emiaxibus 1 et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ praedita, qua nostra imago includiır. In eadem nanciscitur x, antequam ex realibus valobus ad imaginarios transit, radices aequales, h. e. singuı ejus puncta non in binis sed in singulis sectionibus pota sunt. — Habemus igitur imaginem finita parte dati ani comprehensam; tamen quae interna quadam proprietе (duplici vigore) a planis vulgaribus aequationis $Ax+By+Cz+D=0$ excellat. Linea, qua eadem finitur, sola t simplici vigore. Quod autem duplex est superficies, servatur lex continuitatis atque imago pro ellipsoide perficie in unum planum compressa haberi potest.

XVIII. Consideremus generalem aequationem elli-

oidis $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$

dem conditione, ut $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}=0$. Sectiones constantis $=x'$ statim apparet, ellipses esse semiaxibus praeditas

$\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x'^2)}$ et $\frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x'^2)}$; similiter sectiones conntis y, nec non sectiones constantis z. Aequatio in males X, Y permutatur auxilio formularum

$$Y=x\sin\mathfrak{r}+\mathfrak{y}\sin(\mathfrak{r}+\mathfrak{y})+z\sin(\mathfrak{r}+\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$$
$$X=x\cos\mathfrak{r}+\mathfrak{y}\cos(\mathfrak{r}+\mathfrak{y})+z\cos(\mathfrak{r}+\mathfrak{y}+\mathfrak{z})$$

ue si $\mathfrak{r}=0$ ponitur et y cum z eliminantur, aequatio mutata est

$$(\mathfrak{Z}-x)^2a^2(c^2\sin^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+b^2\sin^2\mathfrak{y})$$
$$+Y(X-x)a^2(c^2\sin(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})\cos(\mathfrak{z}+\mathfrak{y})+b^2\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y})$$
$$+Y^2a^2(c^2\cos^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})+b^2\cos^2\mathfrak{y})=(a^2-x^2)b^2c^2\sin^2\mathfrak{z}$$

Superficiem iterum duplicis vigoris esse, ex eo cerır, quod aequatio pro x secundi est ordinis. Si condiem quaerimus, qua ejus valores ex realibus in imagios transeant, h. e. lineam includentem, quae simplicis ris est, invenitur

$$(b^2\sin^2\mathfrak{y}+c^2\sin^2(\mathfrak{z}+\mathfrak{y}))+Y^2(a^2+b^2\cos^2\mathfrak{y}+c^2\cos^2(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}))$$
$$-2XY(b^2\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{y}+c^2\sin(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{y}+\mathfrak{z}))=$$

$$= a^2c^2\sin^2(\psi+\beta)+a^2b^2\sin^2\psi+b^2c^2\sin^2\beta$$

Si redditur $a=b=c$, $\beta=\psi=120$, proficiscitur

$$X^2+Y^2=\tfrac{3}{2}\,a^2$$

Ecce inventam habemus aequationem circuli, h. e. plan[a] linea circulari inclusi, quae est

$x^2+y^2+z^2=a^2$, si ad tres coordinatas sub angulis $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=o$, $\beta=\psi=60^0$ vel $=120^0$ inclinantes refertur.

XIX Imaginis hae redditae sunt finitae ea de [causa] quod quantitas indeterminata non repraesentata, quae [in] aequationibus permutatis restabat, secundae erat digni[tatis], itaque pro quadam tantum conditione reddebatur rea[lis].

Sequitur, non omnes hujusmodi planas imagines fi[nitas] fore: ex. gr. si x tertiae sit dignitatis, nulli dari p[ossunt] sunt valores **X** et **Y**, pro quibus x prorsus sit imaginar[ius]. Nihilominus ne hae quidem imagines omni ex pa[rte] cum plano simplici vulgaris geometriae congruunt. Ut en[im] conditio quaedam affertur, cui si **X** et **Y** satisfaciu[nt], tres valores reales ipsius x praebentur; ita pars imagi[nis] triplici vigore est. Cum indeterminata non repraesenta[ta] quartae erit dignitatis, imago fortasse finita erit. F[ig.] enim, ut quaedam plani pars quadruplici sit vigore, qu[ae]dam duplici, quaedam imaginaria h. e. a quaesita imag[ine] excludatur. Ne in exemplo nimium spatii calculis impe[ndi] opus sit, aequationem ejus generis contemplabor, ut u[nius] coordinata, quae ad systema pertineat variabilisque [sit] tamen in aequatione non insit, a nulla indeterminata [non] praesentetur. Aequatio $z^3-6az^2+3zy^2+9a^2z-4a^3=o$ pertineat ad lineam coordinaticiam quattuor partium, q[uae]rum varient z, y et x, constans sit $w=-a$ cum angu[lis] $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}=o$, $\beta=90^0$, $\psi=-45^0$, $\mathfrak{r}=-45^0$, $\mathfrak{w}=+45^0$ (fig.

Ad permutandas aequationes habebimus

$$Y=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(z-y-a) \qquad X=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(z+y-a)+x$$

unde proficiscuntur

$$z=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(X-x)+(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.Y+a) \qquad y=-\tfrac{1}{2}\sqrt{a}(Y-(X-$$

quibus in aequationem datam substitutis, haec transdu[ci]tur ad $(X-x)^3-3a\sqrt{2}(X-x)Y+Y^3=o$ (F[ig.]

Sectio constantis $x=o$ dat curvam lineam bene notam

$$X^3-3a\sqrt{2}.XY+Y^3=0$$

eque alia sectio constantis x cum hac congruit, tamen a punctum distantia x ab A remotum tamquam circa um construitur. Tota datae aequationis imago omnibus sectionibus composita est, quas nanciscimur, dum x im omnibus valoribus realibus, qui cogitari possunt, itur.

Jam cernitur, quae pars imaginis triplex sit. Ut ejus inveniamus, quaerendum est, quibus conditionibus x reales amittat valores h. e. duas aequales nanciscaradices. Id saepe solvenda aequatione $\mathfrak{F}$ invenire posis, dum quantitates, quae sub signo radicis quadratae universum paris) subsunt, evanescentes facimus. Saehuic methodo, parum sufficienti, cum de aequationibus ndis dependeat, altera ratio calculo differentiali nixa erenda est, ut quaeratur, qua conditione aequationes

$$\mathfrak{F}(x, X, Y)=0 \text{ et } \left(\frac{d\mathfrak{F}(x,X,Y,)}{dx}\right)=0$$

l evanescant.

uimus $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dx}\right)=(X-x)^2-a\sqrt{2}.Y=0$ atque

$-x=(a\sqrt{2}.Y)^{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{F}=0$ substituendo $Y^6-8a^3\sqrt{2}.Y^3=0$

radices $Y=0$ et $Y=2a.2^{\frac{1}{6}}$ proficiscuntur.

Duae igitur lineae rectae, quarum altera cum AX pa- a, altera AX ipsa est, triplicem partem imaginis a lici separant.

XX. Dicere licet, omnes hujus generis imagines tam- movenda sectione constantis x (vel alius constantis) hancque modo ita moveri, ut ejus forma inter movennihil mutetur, siquidem indeterminata x in data aeone non inest; modo ut ejus forma inter movendum t, si x in aequatione inest. In nostrorum exemplo- ltimo initium sectionis $z^3-6az^2+3zy^2+9a^2z-4a^3=0$ ineam rectam x infinitam ductum est, in primo sectio aris $y^2+z^2=1-x'^2$ movebatur, ita quidem, ut radius er ordinatam normalem aequaret, quae in circulo fixo =1 ad positionem centri circularis motae pertinebat.

(Facilius eadem ex aequationibus permutatis sectio
constantium, ex $X^3-3a\sqrt{2}.XY+Y^3=0$ et $Y^2+(X-x^2$
$1-x^2$ elucent.)

Jam modo quaesita quaeque imago plana omnium
ctionum summa constat, tamquam a via vel vestigiis
ita dicam, lineae motae efficitur: lineae autem, quae a
lis vigoris partes includunt, eaedem sunt, quas in ge
tria vulgari curvas finientes (Grenz-Kurven) vocant, q
que solutionibus aequationum differentialium singularibu
spondent. Ex eis autem, quae capite proximo expl
mus, sequitur, minime semper lineas motas ab iisdem
cludi, nunquam nisi in aequatione, quae integralis parti
ris*) vocatur, quantitas constans, quam differentiandi c
variantem facimus, secundae dignitatis est. Proprie
systemate aequationum $\left\{ \mathfrak{F}=0 \ (\frac{d\mathfrak{F}}{dx})=0 \right\}$ omnia puncta c
nentur, ad quae quantitatis x binae radices aequales p
nent. Saepius quoque fieri, ut ne partes quidem vari
goris ab iis separentur, ostendam in majore meo libro
quo ex accuratiore harum imaginum disquisitione pro
scetur, omnes lineas punctaque, quae ab hoc syste
circumscribantur, ad singularia earum loca pertinere.
non in eodem ad aliam has lineas inveniendi rationem
veniemus, quae, ut differentiandis aequationibus datis,
permutatis, posita sit, ita sit brevior, facilior, utilior.

Hac nova geometriae parte imagines planae varia
tensitate (sit venia verbo) comparatae esse videntur: t
quales in rerum natura praebentur a planis illustratis,
umbra in plano excepta, ab imaginibus camerae obsc
corporumque a quodam speculo receptorum, ab aliis v
generis. Harum imaginum eae, quae a luce illustra
sunt, hic majore, illic minore luce fulgent atque, dum
alia parte ad aliam transis finitimam, lux aut crescit
decrescit minimis incrementis, aut certae lineae sunt,
subito augeatur vel diminuatur. Talis quidem vigoris

*) Sequor ill. Laplaceum.

variatio, quomodo analytice exprimatur, ex eis, quae osui, apparet. Quod vero ad alterum variandi genus inet, quomodo ab analysi repraesentetur, in majore libro spero fore ut vos certiores faeere possim.

XXI. Transimus ad perlustrandam aequationem unam tuor variabilium.

$$z^2+y^2+x^2+w^2=a^2$$

In hoc quidem exemplo sumantur anguli prioris ge- s (cf. cap. III) atque ii quidem constantes $\mathfrak{w}=\mathfrak{W}=\mathfrak{X}$ $\sin\mathfrak{r}=\sin\mathfrak{y}=\sin\mathfrak{z}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\mathfrak{Y}=120^0$, $\mathfrak{Z}=-120^0$, ut si per um A axes cum singulis coordinatis paralleli ponuntur, os vertices regularis tetraedri incidere possint. Se- es constantis unius variabilis ut $w=w'$ superficies sunt soides semiaxium aequalium $=\sqrt{(1-w'^2)}$. Ad aequa- m in normales X, Y, Z permutandas habemus

$$z\sin\mathfrak{z}\sin\mathfrak{Z}+y\sin\mathfrak{y}\sin\mathfrak{Y}+x\sin\mathfrak{r}\sin\mathfrak{X}+w\sin\mathfrak{w}\sin\mathfrak{W}$$
$$=z\sin\mathfrak{z}\cos\mathfrak{Z}+y\sin\mathfrak{y}\cos\mathfrak{Y}+x\sin\mathfrak{r}\cos\mathfrak{X}+w\sin\mathfrak{w}\cos\mathfrak{W}$$
$$=z\cos\mathfrak{z}+y\cos\mathfrak{y}+x\cos\mathfrak{r}+w\cos\mathfrak{w}$$

ostro exemplo $Z=\frac{1}{3}\sqrt{6}.(y-z)$

$Y=-\frac{1}{3}\sqrt{2}(y+z)+\frac{2}{3}\sqrt{2}.x$ $\quad X=\frac{1}{3}(z+y+x)+w$

proficiscuntur ad eliminandas z, y, w

$$z=-\frac{(Z+\sqrt{3}.Y)\sqrt{6}}{4}+x, \quad y=\frac{(Z-\sqrt{3}.Y)\sqrt{6}}{4}+x$$
$$w=X-x+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.Y.$$

is in aequationem datam substitutis, praebetur

$$x-x(\frac{X}{2}+\sqrt{2}.Y)+\frac{X^2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}XY+\frac{11}{16}Y^2+\frac{3}{16}Z^2-\frac{a^2}{4}=0.$$

aequatio, constante x, ellipsoidis est superficiei. At- in hoc quoque exemplo ex eo, quod x secundae di- tis est, quodque imaginis quaesitae punctum a constan- X, Y, Z datum in duabus sectionibus constantis x e sequitur, dum quidem haec ipsa x neque aequales scitur radices neque imaginaria fit. Realia autem a continentur superficie, quae invenitur, dum aequa- m permutatam pro x solvis quantitatemque radicis qua- e evanescentem esse ponis.

umus $X^2+Y^2+Z^2=\frac{4}{3}a^2$

h. e. superficiem sphaericam radii $=\frac{2}{3}a\sqrt{3}$. Totus igitu
cus geometricus datae aequationis a sphaera solida co
tuitur h. e. coordinatae X, Y, Z cujusque puncti ad sp
ram solidam pertinentis satisfaciunt nostrae aequationi

Ex eis, quae supra exposui, colligi licet, corpora
ta non praeberi, nisi ea datarum quantitatum indeterm
tarum, quae in aequatione permutata restat, paris si
gnitatis; nec non, si ejusdem dignitas secundam supe
superficies dari, quae corpus in plures partes separent,
varii vigoris sint. Eadem vigoris varietate varia dens
quam circa varias eorporum partes experti sumus, quoc
modo representari videtur: eam autem solam, quae su
variat. Quae cogitationes mihi occurrerint ad alterum
nus densitatis exprimendum, si sensim ea descrescit,
in majore libro invenies.

XXII. Simpliciores etiam circuli sphaeraeque ae
tiones comparari possunt, abhibenda quantitate ind
minata, quae nulli coordinatae repraesentanda datur.

Si aequationem $\xi=\sqrt{[z(a-z)]}$, dum ξ non repra
tatur, ad lineam coordinaticiam simplicem referimus,
stante solo angulo $\mathfrak{Z}$; unaquaeque sectio constantis
linea recta finitae longitudinis a ab A incipienti effici

Quae quum variante angulo $\mathfrak{z}$, cui omnes valores re
dandi sunt, qui cogitari possunt, tamquam circa A mo
tur, circulum describit.

Si $\mathfrak{Z}$ quoque varians ponitur, totam sphaeram h
solidam quidem, non superficiem.

Si ad aequationes polygoni regularis r laterum,
y quoque variantem facimus, tertiam aequationem addi
ut habeamus

$$\begin{cases}(\mathfrak{y}-\frac{2\pi}{r})(\mathfrak{y}-\frac{4\pi}{r})\ldots(\mathfrak{y}-2\pi)=0\\ \xi_{'}=\sqrt{[y(b-y)]} \quad \xi_{''}=\sqrt{[z(2y\ \sin\frac{\pi}{2}-z)]}\end{cases}$$

dum anguli alterius generis $\mathfrak{Y}=\text{cst}$, $\mathfrak{Z}=o, \mathfrak{z}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{r}$;

uaque sectione constantis $y=y'$ iterum ut supra poly
um regulare r laterum datur, cujus vertices quantitate
b A absunt. Similiter omnes aliae sectiones constan-
polygona sunt: earum maxima sectio constantis $y=b$
cujus vertices quantitate b ab A absunt. Jam to-
imaginis significationem ea plani parte, quae ab hac
ima sectione includitur, expleri cernitur.

quationes $\xi_{,}=\sqrt{[x(a-x)]}$

$$(\mathfrak{Y}-\frac{2\pi}{r})\,(\mathfrak{Y}-\frac{4\pi}{r})\,\ldots\,(\mathfrak{Y}-2\pi)=0$$

$=\sqrt{[y(x\,\mathrm{tg}\,\alpha-y)]}$ $\xi_{,,,}=\sqrt{[z(2y\sin\frac{\pi}{r}-z)]}$

r et $\mathfrak{X}$ constantes sunt, $\mathfrak{y}=90^{0}$, $\mathfrak{Z}=0$, $\mathfrak{z}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{r}$,

que variant x, y, z, $\mathfrak{Y}$, $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, $\xi_{,,,}$

pyramidem rectam solidam, cujus basis polygonum re-
re r laterum est, cujus lineae laterariae ad axem angulum α
stituunt. — Unaquaeque enim sectio constantis $x=x'$ da
um ad axem x normale a polygono regulari r laterum
sum. Omnium maximo datur ab $x=a$, omnium minim
o, quae unico puncto A constat, ab $x=0$.

XXIII. Nihil impedit, quominus aequatio quattuor va
ilium, ut ea, qua sphaera solida repraesentabatur, i
o quoque construatur, h. e. ad lineam coordinatician
atur ex eodem plano non excedentem. Neque illam
naequationem construam, angulis non mutatis: sed, quum
gendum sit, fore ut circulus ipse detur ab aequation
$w^2+x^2+y^2+z^2=a^2$, si anguli coordinatarum

vel $=\frac{2\pi}{4}$ sumantur; disquirum, num vera sit hae
ectatio. Sumam igitur lineam coordinaticiam quattuor
um, quarum anguli ex secundo genere sint atque w
$r=\mathfrak{y}=\mathfrak{z}=90^{0}$. Ad permutandas coordinatas normales
mus $\quad X=w-y \quad Y=x-z$

substituendis duabus y et z oritur

$x)^2+(X-w)^2=a^2-x^2-w^2$

mutari potest in

$$(w-\frac{X}{2})^2+(x-\frac{Y}{2})^2=\frac{2a^2-X^2-Y^2}{4}$$

Itaque si quis quaerit, qui valores x. w opus sin ad punctum O perveniatur, cui certi constantes valore Y conveniant; respondendum est, omnes combinati ipsarum x et w, quae tamquam coordinatae sint lineae cir ris radio $\frac{\sqrt{(2a^2-X^2-Y^2)}}{2}$ circa punctum $(\frac{X}{2}.\frac{Y}{2})$ de ptae. Quarum combinationum quum infinita multitudo stat, tota plani pars, quae radium realem reddit, h.e. ditioni $2a^2-X^2-Y^2>0$ satisfacit, infiniti vigoris est. vero $2a^2-X^2-Y^2<0$ est, radius imaginarius redditu e. nulli valores x. w dari possunt, qui ad punctum (X perducant. Imago igitur aquationis finitur a linea circ

$$X^2+Y^2-2a^2=0$$

Eadem linea non infiniti, sed semplicis vigoris cum lineae circulares, quae respondentes valores x, w terminant, radiis evanescentibus cum centris ipsis c scant.

Accuratius imaginis rationem intelligemus, usi m do hac. Ex aequatione

$$(Y-x)^2+(X-w)^2=a^2-x^2-w^2. \quad (\mathfrak{F}$$

sequitur, sectionem quamque constantium x et w lir circularem esse circa punctum x. w descriptam adhibit dio variabili $=(a^2-x^2-w^2)$. Ponamus initio w cons tem$=w'$, demusque soli x omnes valores, qui ab ae tione permittantur. Nanciscimur infinitam multitudi linearum circularium, quarum centra sunt in linea rec xem w normaliter intersecanti. Quum $\mathfrak{F}$ mutari poss $x=\frac{Y}{2}+\sqrt{\frac{|2(a^2-w'^2)-Y^2-2(X-w')^2|}{2}}$, hae omnes d cem imaginem planam ab ellipsi $\frac{Y^2}{2}+(X-w')^2-(a^2-w'^2)$ inclusam efficiunt.

Dum w quoque omnibus valoribus afficitur, qui per tuntur, haec ellipsois plana tamquam per axem w mov Ejus via includitur ab eadem linea, quae includeret, si

$\frac{Y^2}{2}+(X-w)^2-(a^2-w^2)=0$ sive

$\frac{X}{2}\pm\frac{\sqrt{(2a^2-X^2-Y^2)}}{2}$ moveretur, h. e. a linea circu-

$X^2+Y^2=2a^2$.

quodque punctum fixum, quod non in hac linea finienti , ad innumeras harum sectionum planarum pertineat; rficiem nostram infiniti vigoris h. e. quodammodo alti- dignitatis esse cernitur.

Circulum quoque praeberi, etiamsi anguli $\zeta=\upsilon=\mathfrak{r}=45^0$ facile ostendere possum. Si enim y et x ordine transmu- r, facile cerni potest, cuique sectioni constantium omni- , x, y, z idem punctum **O** convenire, sive per **ALMNO** per **ALM'NO** (fig. 12.) proficisceris, dummodo iidem es w, x, y, z sumantur.*). Cum autem, transmutati- acta, w et y pariter atque x et z angulum rectum ituant, eandem atque supra rationem sequi potes, ta- inter **X** et **Y** introducendas elimines et x et z.

XIV. Eadem ratione, qua in capite proximo usi su- exponere possumus aequationem

$^2+x^2+w^2+v^2+u^2=a^2$

sumimus lineam coordinaticiam sex partium, angulis ntibus $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}=\mathfrak{W}=\mathfrak{V}=90^0$ $\zeta=\upsilon=\mathfrak{r}=\mathfrak{w}=\mathfrak{v}=90^0$ $=o$. Sumamus ad permutandum

$+u$ $Y=y+v$ $Z=z+w$

$-u$ $y=Y-v$ $z=Z-w$

n auxilio x, y, z eliminatis aequatio permutata pre- tur,

$v)^2+(Y-v)^2+(X-u)^2=a^2-w^2-v^2-\upsilon^2$

lerivari potest

$$\frac{Z^2-Y^2-X^2}{4}=(w-\frac{Z}{2})^2+(v-\frac{Y}{2})^2+(u-\frac{X}{2})^2$$

In majore libro accuratius investigo, quae lineae coordinaticiae nt, ut partes in quemlibet ordinem transmutentur, h. e. ut per A axes ponantur; nec non quae lineae idem ex parte, quae non per-

Simili ratione atque supra demonstrari potest, im
nem esse corpus solidum altioris dignitatis (tamen quod
modo tertiae, quum ad sphaeram infinities plures comb
tiones valorum w, v, u pertineant, quam quot combi
ones w. x supra ad lineam circularem pertinebant):
corpus includi a superficie sphaerica simplici, quam ae
tio $Z^2+Y^2+X^2=2a^2$ circumscribat.

XXV. Facile colligi potest, re ipsa nullum syst
posse non construi, quotcunque aequationes dantur,
cunque indeterminatae in iis insunt, quotcunque coordi
ad id referuntur. Saepissime in aequationibus permu
non solae coordinatae normales X, Y, Z, sed praeter
aliae quantitates indeterminatae inerunt, quae pro nor
praesentatis habendae erunt. Attamen singulae secti
constantium omnium harum, quae non repraesentantu
solis X, Y, Z sunt et construi posse videntur. — Si
merus quantitatum omnium variabilium (h. e. omnium
determinatarum sive a coordinatis repraesentantur, sive
repraesentantur cum coordinatis quoque non repraesent
numerum aequationum aequat, imago punctis constans
bitur. Si ille numerus hunc una unitate superat, fort
lineam habebis: si duabus superat unitatibus, superfi
exspecta: si tribus superat, corpus solidum potest ex
ctari. Exspectari potest, inquam: fieri enim potest
nulla prorsus imago detur: fieri potest, ut ad imagi
inferioris generis perveniamus, quam cujus eam
exspectamus; ad superficies, ubi corpus exspectamus
puncta, ubi lineas nos nacturos esse speramus. Hujus
exempla jam in vulgari geometria analytica occurrunt,
in meo majore libro ostenduntur: nec non in hoc li
(cap. XXIII) tale exemplum legistis: quod tamen pro
in his exceptionibus numerandum non est. Si enim ae
tionem corporis ad eam lineam coordinaticiam refers,
ex eodem plano non excedit, nullo modo corpus prae
potest; fieri non potest, quin plana sit imago.

Attamen vidimus, eam tamquam infinito numero su
ficierum planarum constare, ut superficies altioris dig
tis redderetur. Similiter lineam altioris dignitatis n

is, si aequationem superficiei vel corporis ad lineam dinaticiam refers, quae ex eadem linea recta non ext. Quid? si numerus quantitatum variabilium aequatis pluribus unitatibus superat quam tribus, verisimile corum altiorum dignitatum praebentur. Num ejusmodi altis dignitates linearum, superficierum, corporum usui futusint, nescio: tamen geometriae analyticae est contenre ipsa minime impediri, quominus aequationes quotvariabilium construantur.

XXVI. Quamquam hoc libro suadeo, ut novae coortae in geometriam introducantur; tamen multum abest, icam, eas omni ex parte vulgaribus esse praeferendas. endum est, vulgares coordinatas saepissime utilissimas , saltem ea quidem de re, quod earum usus omni ex e tanto negotio excultus jam sit. Nulla fere alia causa ductus sum, qui libentissime quaestiones, quoad potui, per ad coordinatas vulgares transduxi, quamquam as includentes brevius in novis coordinatis exprimere issem. Quotiescunque enim in his expressae erant, ue geometrarum eas cognitas fore sciebam. Cave vero, ea de causa vulgares coordinatas pluris aestimes. Nisi olicissima quaeque exempla elegissem, saepissime ad iationes pervenissem, quarum significatio tibi non macognita fuisset, quam si alienis coordinatis usus essem. enim lineae et superficies, quarum cognitionem coortis vulgaribus nacti sumus, minimo sunt numero. E rario eadem re impeditus sum, quominus hanc disquisiem longius producerem, quominus plura exempla da. Dum enim aequationes in normales permutantur, vix inem adduci potest formularum explicatio. Quid? eidem ularum oriundarum difficultati adscribendum est, quod entiae ex usu aequationum primi et secundi ordinis deae putantur pertinere ad altiores quoque ordines, circa alia ratione opus est. Unam ex his sententiis supra iationum $\mathfrak{F}=0$ et $(\frac{d\mathfrak{F}}{dx})=0$ significatione detegenda cor: alia similia in majore meo libro cognosces.

Ubi novis coordinatis aliquantum operae navaverim certe eis non sine magnis fructibus utemur. Attamen c novus hic campus geometriae, quem aperui, maximus ut diligentissime in eo elaboretur opus est. Multa eq dem jam elaboravi, quorum magnam partem jam exposui, teram etiam majorem partem adhuc expositurus sum. qui geometrae his disquisitionibus delectentur, si quae cultas mihi offeratur confectae majoris libri partis ty exscribendae, libens, quae exposui, communicabo: eac accuratius ostendent, quaecunque ad novis coordinatis ut dum pertinent.

Quas sententias defensurus sim:

1) Mathesim ne dicas esse scientiam quantorum, ver scientiam quantorum quantitate comparandorum.
2) Non sine magno incommodo ars mathematica insti tur, si discipuli, antequam in ea intelligenda satis p fecerunt, nullo libro quasi duce utuntur.
3) Ex methodis analysis altioris explicandae Leibniti non modo facillima est, sed aliis propius ad veritat accedit.
4) Bonus hominum cultus minus schola nititur, quam bus domesticis juvenes gavisi sint.
5) Cave ne eos, qui linguis alienis instituendi sunt, guae vernaculae grammaticam doceas, antequam al cognoscere coeperint.

VITA.

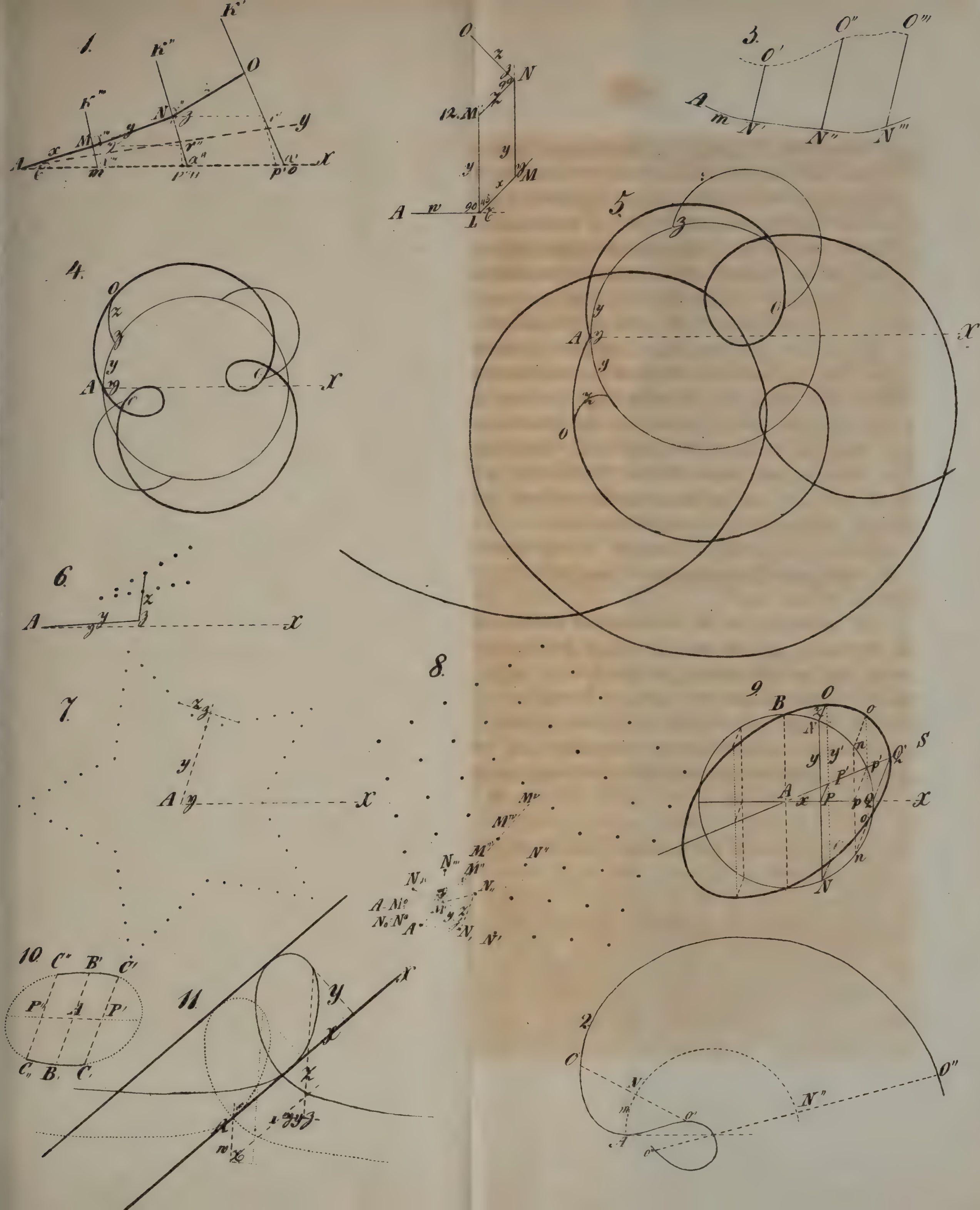
Ludovicus Alexander Koch natus sum a. MDCCCXIV
d. III. Id. Febr. in oppidulo Silesiaco, cui nomen est
arlottenbrunn, parentibus Lutheranae legis studiosis,
re Joanne Carolo Friderico, tum vectigalium coactore,
re Dorothea e gente Langnerana. Quum aliquot annis
e patri omnes fortunae bellicis perturbationibus ereptae
ent; quum ipse e gravibus morbis, quibus infans labo-
eram, semper aliqua corporis infirmitate gravarer; quum
hoc me admodum puero pater mortem occumberet: non
magnis difficultatibus eam eruditionem nactus sum,
fretus jam doctoris philosophiae gradum capesso. Multi
at, qui benevolentia ducti matrem egentissimam permul-
annos in me alendo juvarent, qui mihi rebus dubiis
icito faverent. Etiamsi eorum nomina omitto, me unius-
isque grato cum animo meminisse, hac occasione data
uo cognoscant. — Deinde scholis et magistris permul-
debeo. Prima elementa a teneris annis me docuit
gna cum cura pater ipse: in ludum litterarium itabam
telwaldae, in quo comitatus Glacensis oppidulo pater
muneri simili praefectus fuerat. A. MDCCCXXVI
mquam eo jam defuncto, magna opera mater sollicita
eo adduxit, ut Glacii vivere possem, ubi non solum
e summe reverendo M. Pohleo sacerdote lege eccle-
evang. imbutus eamque publice professus sum, sed
etiam gymnasio frequentando multarum rerum cogni-
em nactus sum, praecipue virorum excellentium Muel-
i, Schimmeli, Langeri, Heinischi institutione.
um contigit, ut Vratislaviae unum annum disciplina gym-
i Magdalenaei gauderem, ut ducibus doctissimis
oenborno, Klossmanno, Koechero meam erudi-
em multum confirmarem, corrigerem, augerem. Tum
jusdem urbis universitate litteraria ex a. d. IX Cal.
. anni MDCCCXXXIV usque ad a. d. VII Cal. Apr.

anni MDCCCXL ordini philosophorum adscriptus audi
lectiones philosophicas Branissi, Thilonis, Elvenich
paedagogicas Thilonis, theologicas Schulzi, Hah
Rhodei, mathematicas Scholtzi, Kletkei, Koeche
physicas Pohli, Frankenheimi, Boguslawskii, I
scheri, Gravenhorsti, Glockeri, philologicas Schn
deri, Ritchli, Ambroschi, Bellmanni, historic
Wachleri, Stenzeli, Kutzeni, Schoeni. Quibus
ris doctissimis omnibus cum maximas gratias debeam
agam, tum in primis viro clarissimo a Bogulawskio etiamc
majores viro doctissimo Scholtzo. Qui animum meum obstr
xerunt privata adhuc institutione frequentissima, prude
bus consiliis, multis aliis beneficiis. Quid? hujus lectio
bus debui, quod anno MDCCCXXXVII. mihi, qui
sponderam ad quaestionem mathematicam ab amplissi
Ordine philosophorum propositam hanc:

„Quam vim geometria haberet in algebram et praeci
in calculum differentialem et integralem“

primae delatae sunt.

Id tamen admodum doleo, quod mater, cui maxime
me sollicitae, optime meritae longe gratissimum debeo
mum, has sollemniores gratias, quas ei ago, non amp
audit. Contigit quidem mihi, ut Vratislaviam transmig
ret; ut aliquot annos una viveremus: tamen cum ejus
pus continuis calamitatibus infirmissimum jam redditum es
auctumni proximi prima frigora non amplius tolerare pot



1.
K'
K''
K'''
O
N
M
A
x
y
X
m
p'''
p'
3.
O'
O''
O'''
A
m
N'
N''
N'''
12.
O
z
N
M
y
x
A
w
L
90
4.
O
z
y
A
X
5.
A
X
y
z
O
6.
A
y
z
X
7.
A
y
z
X
8.
9.
B
O
o
S
A
X
P
Q
N
n
10.
C''
B'
C'
P
A
P'
C,,
B,
C,
11.
X
y
x
z
2.
O
N
N''
O''
A

DE

INTEGRALIBUS DEFINITIS.

DISSERTATIO,

QUAM

UNA CUM SENTENTIS CONTROVERSIS

AUCTORITATE

MPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

AD

SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE CONSEQUENDOS

IN ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE

FRIDERICIANA HALENSI CUM VITEBERGENSI

CONSOCIATA

DIE VII. MENSIS JULII A. MDCCCXLI.

H. L. Q. S.

PUBLICE DEFENDET

GUSTAVUS ADOLPHUS KOEPP

BRUNSVICENSIS.

Dr. ECKSTEIN

PARTES CONTRARIAS TUEBUNTUR:

G. ROST, PHIL. DR.

W. BURGHARDT, MATH. STUD.

R. HERTZBERG, PHIL. CAND.

BRUNSVIGA,

TYPIS ORPHANOTROPHEI DUCALIS.

MDCCCXLI.

PRAECEPTORI DILECTISSIMO

AUGUSTO UHDIO,

OCT. MATHESIS ET ASTRONOMIAE PROF. AC CLASSIS TECHNICAE DIRECT. IN COLLEGIO CAROLINO BRUNSVICENSI
DUC. CONS. SCHOL.

HOC OPUSCULUM

D. D. D.

PIETAS DISC

omni fere definitorum integralium theoriae parte **Euleri**, viri ingeniosissimi doctissimique, integra-
nomento maximo sunt, ob illam, puto, rationem, quod eorum functio ex factoribus transcendenti et
raico composita est, limites autem extensissimi **0** et ∞ sunt. Quum enim functiones aut alge-
ae aut transcendentes exsistant, eae erunt generaliores, quae sunt productum partis algebraicae,
forma in genere x^m, et transcendentis, cujus forma e^{px}, ubi m, p reales indicant et imaginarias
itates constantes, e basin logarithmorum naturalium. Id quod in Eulerianis ab **Legendrio**
a I' denotatis integralibus locum habet, sub hac quidem conditione, ut m in x^{m-1} et p in e^{-px}
uantitas positiva realis, aut realis partis positivae imaginaria. Itaque haud alienum nobis videtur,
nctione I', sicut ex uno fonte, omnia principalia ferme integralia definita repetere. Quod nobis
situm est hac commentatione. Methodus id efficiendi in definitorum integralium evolutione per
s consistit ex functione I', tamquam ex fundamento; ubi praeclare adjuvat theorema **Fourieria-**
, quod formula quadam integrali commonstrabimus.

Lubenter tamen profitemur praecipue III. **Cauchium** commentatione sua de integralibus definitis
limites imaginarios nostrum ducem fore. Nec minus **Euleri** perquam admirabiles commentationes
o cum studio perlegimus. Ceterum complura contulimus scripta, in quibus praecipue illa **Poisso-**
n diario scholae polytechnicae, **Laplacii** in probabilitatis theoria, **Bidonii** in miscellaneis Tau-
sibus, **Legendrii** in exercitiis de integralibus notanda sunt. Haec locis suis perinde atque
rum methodos, integralia allata reperiendi, quam religiosissime consignabimus.

---

1. Si Eulerianum secundae classis integrale littera I' designamus, ut sit

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx = I'm,$$

no, px pro x posito,

$$\int_0^\infty e^{-px} x^{m-1} dx = I'\frac{m}{p^m},$$

loco x, ubi μ quemcunque integrum numerum positivum indicat, statuto,

$$\int_0^\infty e^{-px^\mu} x^{m-1} dx = \frac{I'm}{\mu p^m}$$

: facile demonstrari potest hoc integrale valorem certum non habere, nisi m et p reales quanti-
positivae exsistant.

Sit enim scriptum

$$\int_0^\infty e^{-px^\mu} x^{m\mu-1} dx = \int_0^1 e^{-px^\mu} x^{m\mu-1} dx + \int_1^\infty e^{-px^\mu} x^{m\mu-1} dx.$$

Cujus aequationis primum secundi membri integrale, quum indefinitum sit

$$\int_0^{\infty} e^{-px^{\mu}} x^{m\mu-1}\,dx = \frac{x^{m\mu}}{m\mu} - \frac{x^{(m+1)\mu}}{1}\,\frac{p}{(m+1)\mu} + \frac{x^{(m+2)\mu}}{1.\,2}\,\frac{p^2}{(m+2)\mu} \ldots,$$

limitibus o et 1 finitum valorem certum habere, si m quantitas positiva, incertum, si m quantitas tiva, perspicitur, quod pro limite 1 series semper convergens

$$\frac{1}{m\mu} - \frac{p}{(m+1)\mu} + \frac{p^2}{1.2.(m+2)\mu} - \frac{p^3}{1.2.3.(m+3)\mu} + \ldots\ldots$$

exsistit et pro limite o aequationes

$$\lim_{x=o}\left\{\frac{x^{m\mu}}{m\mu} - \frac{x^{(m+1)\mu}}{1}\,\frac{p}{(m+1)\mu} + \frac{x^{(m+2)\mu}}{1.\,2.}\,\frac{p^2}{(m+2)\mu} - +\ldots\right\} = o \ldots. \text{ si } m > 0$$

$$\lim_{x=o}\left\{\frac{x^{m\mu}}{m\mu} - \frac{x^{(m+1)\mu}}{1}\,\frac{p}{(m+1)\mu} + \frac{x^{(m+2)\mu}}{1.\,2.}\,\frac{p^2}{(m+2)\mu} - +\ldots\right\} = \text{indef.}\ldots \text{ si } m < 0$$

locum tenent. Alterum integrale, substitutione ubique permissa $e^{-px^{\mu}} = 1 - y$ hanc in form

$$\int_1^{\infty} e^{-px^{\mu}} x^{m\mu-1}\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{\mu p^m} \int_{1-e^{-p}}^{1} \overline{log\ 1-y)}^{m-1}\,dy$$

redactum, semper valore aut certo aut incerto esse, p quantitate aut positiva aut negativa exsisten se patet. Itaque summam integralium

$$\int_0^1 e^{-px^{\mu}} x^{m\mu-1}\,dx + \int_1^{\infty} e^{-px^{\mu}} x^{m\mu-1}\,dx \text{ h. e. } \int_0^{\infty} e^{-px^{\mu}} x^{m\mu-1}\,dx$$

valorem finitum habere sub hac conditione, ut et p et m sit quantitas positiva (quam obtinebunt p et valor $m+1$ per totam scriptionem), ac μ quilibet integrus numerus positivus, concludimus.

Ex aequatione (c), quam scribentes $m\mu$ pro $m\mu - 1$ hanc in speciem commodiorem

(d)
$$\int_0^{\infty} e^{-px^{\mu}} x^{m\mu}\,dx = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}}{\mu p^{\frac{m\mu+1}{\mu}}}$$

transferimus, partiali integratione instituta, formula reductionis notissima prodit

(α)
$$\frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}}{\mu p^{\frac{m\mu+1}{\mu}}} = \frac{(m\mu+1-\mu)(m\mu+1-2\mu)(m\mu+1-3\mu)\ldots\ldots(m\mu+1-l\mu)}{\mu^l p^l} \cdot \frac{\Gamma\frac{m\mu-l\mu+1}{\mu}}{\mu p^{\frac{m\mu-l\mu+1}{\mu}}},$$

unde, $\mu = 1$ facto,

(β)
$$\frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-l)}{p^{l+1}} \cdot \frac{\Gamma(m-l)}{p^{m-l}},$$

ex qua

$$\Gamma(m+1) = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots 1,$$

si m est integer numerus positivus et $p = 1$.

2. Ut Euleri classis primae integralia consequamur, in aequatione (d)

$$p = 1 + r\,y^{\mu}$$

tur, per $y^{n\mu}\,dy$ multiplicetur, inter limites **0** et ∞ integretur, quo aequationem

$$\int_0^{\infty} e^{-ry^{\mu}} x^{\mu}\, y^{n\mu}\, dy \quad \int_0^{\infty} e^{-x^{\mu}}\, x^{m\mu}\, dx = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{y^{n\mu}}{(1+ry^{\mu})^{\frac{m\mu+1}{\mu}}}\, dy$$

iscimur, quam in formam

$$\frac{\Gamma\frac{n\mu+1}{\mu}}{\mu r^{\frac{n\mu+1}{\mu}}} \cdot \Gamma\frac{(m-n)}{\mu} = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{y^{n\mu}}{(1+ry^{\mu})^{\frac{m\mu+1}{\mu}}}\, dy$$

transmutare, quum suppositum sit r, n, m quantitates esse positivas, μ integrum numerum positi- (quem tota commentatione indicabit). Necessarium tamen est, ut valor integralis

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{n\mu}}{(1+ry^{\mu})^{\frac{m\mu+1}{\mu}}}\, dy = \frac{\Gamma\frac{n\mu+1}{\mu}\ \Gamma(m-n)}{\mu r^{\frac{n\mu+1}{\mu}}\ \Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}}$$

nitus, $m-n$ quantitatem positivam exsistere. Unde, hac per p denotata atque n in m conversa, atio

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m\mu}}{(1+ry^{\mu})^{\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}}\, dy = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}\ \Gamma p}{\mu r^{\frac{m\mu+1}{\mu}}\ \Gamma\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}$$

r, cujus integrale est Eulerianum classis primae. Quod ex (α) elucet per formulam

$$\frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}\ \Gamma p}{\mu r^{\frac{m\mu+1}{\mu}}\ \Gamma\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}} = \frac{(m\mu+1-\mu)\ (m\mu+1-2\mu)\ (m\mu+1-3\mu)\ldots(m\mu+1-l\mu)}{(m\mu+p\mu+1-\mu)(m\mu+p\mu+1-2\mu)\ldots(m\mu+p\mu+1-l\mu).\ r^{l}} \cdot \frac{\Gamma\frac{m\mu-l\mu+1}{\mu}\ \Gamma p}{\mu . r^{\frac{m\mu-l\mu+1}{\mu}}\ \Gamma\frac{m\mu+p\mu-l\mu+1}{\mu}}$$

ri posse, qua, facto $\mu = 1$,

$$\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma p}{r^{m+1}\,\Gamma(m+p+1)} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-l)}{(m+p)(m+p-1)(m+p-2)\ldots(m+p-l).\ r^{l+1}} \cdot \frac{\Gamma(m-l)\ \Gamma p}{r^{m-l}\,\Gamma(m-p+l)}$$

ctionis formula integralis

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m}}{(1+ry)^{m+p+1}}\, dy = \frac{\Gamma(m+1)\ \Gamma p}{r^{m+1}\ \Gamma(m-l+p)}$$

itur.

Si in (e) applicueris substitutionem ab III. Cauchio adhibitam

$$y = tang\ z,$$

concessa est ob functionis *tang* z continuitatem inter limites o et ∞,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin z)^{m\mu}\ (\cos z)^{p\mu-1}}{\left((\cos z)^{\mu} + r.(\sin z)^{\mu}\right)^{\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}}\, dz = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}\ \Gamma p}{\mu r^{\frac{m\mu+1}{\mu}}\ \Gamma\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}$$

ies, et inde, $\mu = 2$, $p = 1/2$, $r = 1$ positis, reductionis formulam simplicissimam

(ε) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin z}^{2m}\, dz = \frac{1.3.5.\ldots.(2m-1)}{2.4.6.\ldots.2m}.\ \frac{\pi}{2}.$$

Videbis quo modo definita integralia, ab functione Γ pendentia, inter limites **0** et ∞ in ea inter tes **0** et $\frac{\pi}{2}$, et vice versa, convertenda sint.

3. His jam propositis ad formularum quibus integralia definita reperimus explicationem p dimur. Quam promendi methodus in illa functionum proprietate, quam evolutionem in series dicu titur, ubi conditio necessaria seriem usitatam esse convergentem nota est. Sit

$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots.. \gamma_t x^t + \ldots.. = \sum \gamma_t x^t,$$

in qua signum Σ ad omnes numeros inter limites **0** et ∞ integros extendi sufficit. Designantibus v et w functiones variabilis x qualescunque, statui aequationes licet

$$\int v f(w)\, dx = \int v \Sigma \gamma_t w^t\, dx = \sum \gamma_t \int v . w^t\, dx,$$

ubi integralia habent limites arbitrarios.

Ponendo

$$v = x^{m\mu} e^{-px^\mu},\ w = x^{n\mu} e^{-qx^\mu},\ \textit{limites}\ \begin{matrix}\infty\\0\end{matrix},$$

secundum aequationem (d) habebimus

(A) $$\int_0^\infty x^{m\mu} e^{-px^\mu} f\left(x^{n\mu} e^{-qx^\mu}\right) dx = \sum \gamma_t \int_0^\infty e^{-(p+qt)x^\mu} x^{(m+nt)\mu}\, dx$$

$$= \sum \gamma_t \frac{\Gamma \frac{m\mu+nt\mu+1}{\mu}}{\mu (p+qt)^{\frac{m\mu+nt\mu+1}{\mu}}}$$

et inde, $f(w) = f(x)$ sumta,

(B) $$\int_0^\infty x^{m\mu} e^{-px^\mu} f(x)\, dx = \sum \gamma_t \frac{\Gamma \frac{m\mu+t+1}{\mu}}{\mu p^{\frac{m\mu+t+1}{\mu}}}.$$

Statuendo

$$v = \frac{y^{m\mu}}{(1+ry^\mu)^{\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}},\ w = \frac{y^{n\mu}}{(1+ry^\mu)^q},\ lim.\ \begin{matrix}\infty\\0\end{matrix},$$

formula (e) affert

(C) $$\int_0^\infty \frac{y^{m\mu}}{(1+ry^\mu)^{\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}} f\left(\frac{y^{n\mu}}{(1+ry^\mu)^q}\right) dy = \sum \gamma_t \int_0^\infty \frac{y^{(m+nt)\mu}}{(1+ry^\mu)^{\frac{m\mu+p\mu+qt\mu+1}{\mu}}}\, dy$$

$$= \sum \gamma_t \frac{\Gamma \frac{m\mu+nt\mu+1}{\mu}\ \Gamma(p+qt)}{\mu r^{\frac{m\mu+nt\mu+1}{\mu}}\ \Gamma^{\frac{m\mu+p\mu+nt\mu+qt\mu+1}{\mu}}}$$

atque, $f(w) = f(y)$ posita,

$$\int_0^\infty \frac{y^{m\mu}}{(1+ry^\mu)^{\frac{m\mu+p\mu+1}{\mu}}} f(y)\,dy = \sum \gamma_t \frac{I^{\frac{m\mu+t+1}{\mu}}\, Ip}{\mu r^{\frac{m\mu+t+1}{\mu}}\, I^{\frac{m\mu+p\mu+t+1}{\mu}}}.$$

Quae sunt quatuor nostrae aequationes ad deducenda, functionibus singulis substitutis, integralia de- fundamentales. Quum formulis (d), (e) sint superstructae, harum conditiones sicuti seriei, in qua io evoluta, convergentiam supponunt.

4. Quodsi jam, ut functionum I theoriam ad imaginarios quantitatis p valores extendamus, in ıtione (B) ponimus $\mu = 1$, quare

$$\int_0^\infty e^{-px}\, x^m\, f(x)\,dx = \sum \gamma_t \frac{I^{(m+t+1)}}{p^{m+t+1}},$$

$f(x) = \cos ax$, quapropter $\gamma_{2t} = (-1)^t \frac{a^{2t}}{1.2.3.\ldots.2t}$, $\gamma_{2t+1} = 0$,

$f(x) = \sin ax$, $\gamma_{2t+1} = (-1)^t \frac{a^{2t+1}}{1.2.3.\ldots.(2t+1)}$, $\gamma_{2t} = 0$,

m functionum series pro ipsius x omnibus inter limites $-\infty$ et $+\infty$ sitis valoribus convergunt uantitatem quamcunque realem denotat): ex illa aequatione, $m-1$ pro m scripto, ernemus

$$^{m-1}\, e^{-px} \cos ax\,dx = \frac{I'm}{p^m}\left\{1 - \frac{(m+1)m}{1.2}\left(\frac{a}{p}\right)^2 + \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m}{1.2.3.4}\left(\frac{a}{p}\right)^4 - \ldots\ldots\right\}$$

$$^{m-1}\, e^{-px} \sin ax\,dx = \frac{I'm}{p^m}\left\{\frac{m}{1}\left(\frac{a}{p}\right) - \frac{(m+2)(m+1)m}{1.2.3.}\left(\frac{a}{p}\right)^3 + \frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)m}{1.2.3.4.5.}\left(\frac{a}{p}\right)^5 \ldots\right\}$$

ionis formula (β) adhibita. Summas tamen harum serierum ope theorematis binomialis atque addi- earum subtractioneque facile perspicitur

$$\frac{\left(1-\frac{a}{p}\sqrt{-1}\right)^{-m} + \left(1+\frac{a}{p}\sqrt{-1}\right)^{-m}}{2}, \quad \frac{\left(1-\frac{a}{p}\sqrt{-1}\right)^{-m} - \left(1-\frac{a}{p}\sqrt{-1}\right)^{-m}}{2}$$

Quam ob rem has aequationes statui posse non latet

$$\int_0^\infty x^{m-1}\, e^{-px} \cos ax\,dx = I'm \left\{\frac{(p-a\sqrt{-1})^{-m} + (p+a\sqrt{-1})^{-m}}{2}\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\, e^{-px} \sin ax\,dx = I'm \left\{\frac{(p-a\sqrt{-1})^{-m} - (p+a\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right\}$$

ositis

$$p^2 + a^2 = r^2, \quad \frac{a}{p} = \text{tang}\,\phi,$$

$= arc\ tang\ \frac{a}{p}$ minimum angulum cujus tangens $= \frac{a}{p}$ indicat, quum p et r quantitates posi- int, hac forma

$$(II)\qquad \int_0^\infty x^{m-1} e^{-px} \cos ax\, dx = \Gamma m \frac{\cos m\varphi}{r^{\frac{m}{2}}} = \Gamma m \frac{\cos\left(m\, arc\, tg \frac{a}{p}\right)}{(p^2+a^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-px} \sin ax\, dx = \Gamma m \frac{\sin m\varphi}{r^{\frac{m}{2}}} = \Gamma m \frac{\sin\left(m\, arc\, tg \frac{a}{p}\right)}{(p^2+a^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Quae formulae maximo sunt momento in definitorum integralium theoria atque in mathematic sica. Ex iis enim illud memorabile, et ad computanda integralia definita, et ad solvendas aequ differentiales rebus in physicis mathematicis gravissimum, theorema Fourerianum monstrari Sunt autem formulae illae inventae ab Ill. Eulero*) mera tantum inductione, ac sine demonst ut volunt, exhibitae; deductae ab Cl. Cauchio **) contemplatione integralium duplicium opequ ginarii; ab Poissonio***) methodo differentialium aequationum; ab Laplacio †) transgressi reali ad imaginarium; tractatae ab Plana ††) serierum ope; ab Legendrio †††) differentiati tegrationeque, aliis.

Addendo, subtrahendo formulas *(I)*.

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-px} (\cos ax \pm \sqrt{-1} \sin ax)\, dx = \frac{\Gamma m}{(p \mp q\sqrt{-1})^m},$$

consequimur, vel

$$(h)\qquad \int_0^\infty x^{m-1} e^{-(p \pm q\sqrt{-1})x}\, dx = \frac{\Gamma m}{(p \pm q\sqrt{-1})^m},$$

quo etiam pro imaginariis exponentis baseos e valoribus, quorum realis pars positiva, aequation constare apparet. Ideo ex (c)

$$(i)\qquad \int_0^\infty x^{m\mu} e^{-(p \mp q\sqrt{-1})x^\mu} dx = \frac{\Gamma \frac{m\mu+1}{\mu}}{\mu (p \mp q\sqrt{-1})^{\frac{m\mu+1}{\mu}}}$$

deducimus. Quam aequationem $p=0$ exsistente locum habere, si $m\mu$ vera fractio negativa, ex num $e^{-px}\, x^{m\mu} \cos qx$, $e^{-px}\, x^{m\mu} \sin qx$ continuitate usque in zero sine ullo labore compr Sit $m\mu = -\frac{v}{w}$, ubi $w > v$,

$$(d)\qquad \int_0^\infty e^{-(\mp q\sqrt{-1})x^\mu}\, x^{-\frac{v}{w}}\, dx = \frac{\Gamma \frac{w-v}{w\mu}}{\mu (\mp q\sqrt{-1})^{\frac{w-v}{w\mu}}}$$

comparatur, ex quo, quoniam

---

*) Vid. Calculus integralis. Tom. IV., pag. 337 sqq.

**) Mem. pres. par div. Savans à l'institut. Tom. I., pag. 631 sq.

***) Journal de l'école polytechnique. Cah. XVI, pag. 215 sqq.

†) Ibidem. Cah. XV, pag. 244.

††) Mem. de l'acad. roy. des sc. et des bell. lettr. à Bruxelles. Tom. X.

†††) Exercises de calcul integral. Part. III, pag. 367.

$$\sqrt{-1})^{\pm\mu} = \cos u\tfrac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin u\tfrac{\pi}{2}$$

constat, integralia prodeunt definita

$$\int_0^\infty \frac{\cos(q x^\mu)}{x^{\frac{v}{w}}}\, dx = \frac{\Gamma\frac{w-v}{w\mu}}{\mu(\pm p)^{\frac{w-v}{w\mu}}} \cos\left(\frac{w-v}{w\mu}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(q x^\mu)}{x^{\frac{v}{w}}} dx = \pm \frac{\Gamma\frac{w-v}{w\mu}}{\mu(\pm q)^{\frac{w-v}{w\mu}}} \sin\left(\frac{w-v}{w\mu}\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$\mp q)^{\frac{w-v}{w\mu}}$ necessario quantitas positiva est propter (aeq. 1) conditionem $r = +\sqrt{p^2+a^2}$).
formula (*e*) simili ratione, ubi $r = (p \mp q\sqrt{-1})$ posueris, hanc progignit

$$\int_0^\infty \frac{y^{m\mu}\, dy}{(1+[p\mp q\sqrt{-1}]\, y^\mu)^{\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}}} = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}\,\Gamma n}{\mu(p\mp q\sqrt{-1})^{\frac{m\mu+1}{\mu}}\,\Gamma\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}}.$$

Inde altero membro per

$$(1+py^\mu \pm q\sqrt{-1}\, y^\mu)^{\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}},$$ altero per $(p\pm q\sqrt{-1})^{\frac{m\mu+1}{\mu}}$

cato,

$$\frac{qy^\mu}{(1+p\,y^\mu)} = tang\,\psi,\ ([1+py^\mu]^2+q^2y^{2\mu}) = r^2,$$

$$\frac{q}{p} = tang\,\varphi, \qquad p^2+q^2 = \rho^2$$

minimum angulum cujus tangens est $\frac{qy^\mu}{1+py^\mu}$, $\frac{q}{p}$ designant) posito, imaginario cum imaginario,
um reali collato: aequationes hae oriuntur

$$\int_0^\infty \frac{y^{m\mu}\cos\left(\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}\psi\right)\, dy}{\left[1+2py^\mu+(p^2+q^2)y^{2\mu}\right]^{\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}}} = \frac{\cos\left(\frac{m\mu+1}{\mu}\varphi\right)}{\left(p^2+q^2\right)^{\frac{m\mu+1}{2\mu}}} \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}\,\Gamma n}{\mu\,\Gamma\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}}$$

$$\int_0^\infty \frac{y^{(m+1)\mu}\sin\left(\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}\psi\right)\, dy}{\left[1+2py^\mu+\left(p^2+q^2\right)y^{2\mu}\right]^{\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}}} = \frac{\sin\left(\frac{m\mu+1}{\mu}\varphi\right)}{\left(p^2+q^2\right)^{\frac{m\mu+1}{2\mu}}} \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}\,\Gamma n}{\mu\,\Gamma\frac{m\mu+n\mu+1}{\mu}}.$$

nto $\mu = 1$, $n = 1-(m+1)$, his ex formulis illae ab Ill. Cauchio *) nobiscum com-
ae

*) id. Mem. pres. par div. Sav. a l'institut. Tom. I, pag. 639.

$$\int_0^\infty \frac{1+py}{1+2py+(p^2+q^2)y^2}\, y^m\, dy = \frac{\cos(m+1)\varphi}{(p^2+q^2)^{\frac{m+1}{2}}}\, \Gamma(m+1)\ \Gamma[1-(m+1)] = \frac{\cos(m+1)\varphi}{(p^2+q^2)^{\frac{m+1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{\sin($$

(2)
$$\int_0^\infty \frac{qy}{1+2py+(p^2+q^2)y^2}\, y^m\, dy = \frac{\sin(m+1)\varphi}{(p^2+q^2)^{\frac{m+1}{2}}}\, \Gamma(m+1)\ \Gamma[1-(m+1)] = \frac{\sin(m+1)\varphi}{(p^2+q^2)^{\frac{m+1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{\sin($$

per aequationem haud ignotam

$$\Gamma n\ \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdots\cdots n \text{ inter lim. } \frac{1}{0},$$

statim derivantur.

Si $\sqrt{-1}$ pro $(p+q\sqrt{-1}) = r$ scripseris, ex aequatione (g), posito n loco p, per f (k) fit

(3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin z)^{m-1}(\cos z)^{n-1}}{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^{m+n}}\, dz = \frac{\Gamma m\ \Gamma n}{(\sqrt{-1})^m\, \Gamma(m+n)},$$

quam transformamus $(\sqrt{-1})^m$ solvendo et imaginarium comparando imaginario, reale reali, in

(4)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^{m-1}(\cos z)^{n-1} \cos z\,(m+p)\, dz = \cos\frac{m\pi}{2}\frac{\Gamma m\ \Gamma n}{\Gamma(m+n)},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin z)^{m-1}(\cos z)^{n-1} \sin z\,(m+p)\, dz = \sin\frac{m\pi}{2}\frac{\Gamma m\ \Gamma n}{\Gamma(m+n)},$$

quas inter alios Cl. Kummerus in Crellii diario*) attulit.

5. Statuentes, ad theorema demonstrandum ab Ill. Fourierio repertum, $m = 1$ in for (1) priore, aequationes producimus

$$\int_0^\infty e^{-px}\cos ax\, dx = \frac{p}{p^2+a^2}, \text{ similiter } \int_0^\infty e^{-px}\cos bx\, dx = \frac{p}{p^2+a^2},$$

quibus additis et subtractis apparet,

$$\int_0^\infty e^{-px}(\cos bx+\cos ax)\, dx = \frac{p}{p^2+b^2}+\frac{p}{p^2+a^2}$$
$$\int_0^\infty e^{-px}(\cos bx-\cos ax)\, dx = \frac{p}{p^2+b^2}-\frac{p}{p^2+a^2}$$

poni posse. Sed ex trigonometria formulas cognitas habemus

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta\end{array}\right\}(\eta), \quad \left.\begin{array}{l}\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\}(\varkappa)$$

quarum alteris aequationes nostras, scripto a loco $\frac{a+b}{2}$, b loco $\frac{a-b}{2}$, hunc in modum

*) Tom. XVII, pag. 215; Tom. XX, pag. 9

$$\int_0^\infty e^{-px} \cos ax \cos bx \, dx = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{p}{p^2+(a-b)^2} + \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-px} \sin ax \sin bx \, dx = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{p}{p^2+(a-b)^2} - \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right\}$$

nus; unde

$$\lim_{p=0} \left\{ \int_0^\infty e^{-px} \cos ax \cos bx \, dx \right\} = \tfrac{1}{2} \lim_{p=0} \left\{ \frac{p}{p^2+(a-b)^2} + \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right\}$$

$$\lim_{p=0} \left\{ \int_0^\infty e^{-px} \sin ax \sin bx \, dx \right\} = \tfrac{1}{2} \lim_{p=0} \left\{ \frac{p}{p^2+(a-b)^2} - \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right\}.$$

st tamen, postquam $\cos ax \,.\, \cos bx$, $\sin ax \,.\, \sin bx$ ad suos valores positivos reducta

$$\lim_{p=0} \left\{ \frac{p}{p^2+(a-b)^2} + \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right\} = \frac{p}{p^2+(a-b)^2}$$

$$\lim_{p=0} \left\{ \frac{p}{p^2+(a-b)^2} - \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right\} = \frac{p}{p^2+(a-b)^2}$$

$$\lim_{p=0} \left\{ \int_0^\infty e^{-px} \cos ax \cos bx \, dx \right\} = \int_0^\infty \cos ax \cos bx \, dx$$

$$\lim_{p=0} \left\{ \int_0^\infty e^{-px} \sin ax \sin bx \, dx \right\} = \int_0^\infty \sin ax \sin bx \, dx.$$

ua de caussa, a et b omnes reales quantitates positivas significantibus,

$$\int_0^\infty \cos ax \cos bx \, dx = \tfrac{1}{2} \frac{p}{p^2+(a-b)^2}$$

$$\int_0^\infty \sin ax \sin bx \, dx = \tfrac{1}{2} \frac{p}{p^2+(a-b)^2}.$$

ultiplicemus jam has aequationes per $f(a)\,da$, [$f(a)$ scilicet pro omnibus quantitatis a valo- ositivis realis continuaque est] atque tum integremus inter limites **0** et ∞, adipiscimur

$$\int_0^\infty f(a)\,da \int_0^\infty \cos ax \cos bx \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty f(a) \frac{p}{p^2+(a-b)^2}\,da,$$

$$\int_0^\infty f(a)\,da \int_0^\infty \sin ax \sin bx \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty f(a) \frac{p}{p^2+(a-b)^2}\,da.$$

i $a = b + p\,\xi$, ideoque

$$f(b+p\,\xi) = f(a), \quad \frac{p}{p^2+(a-b)^2}\,da = \frac{d\xi}{1+\xi^2},$$

uia pro omnibus ipsius ξ valoribus realibus, p facto infinite parvo, $f(b+p\,\xi) = f(b)$ esse elucet,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(b)\,\frac{d\xi}{1+\xi^2} = \pi f(b).$$

Inde invenimus

$$(\lambda)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(a)\cos ax\cos bx\,da\,dx = \frac{\pi}{2}f(b),$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(a)\sin ax\sin bx\,da\,dx = \frac{\pi}{2}f(b),$$

id quod est theorema a Fourierio primo prolatum *).

6. Hisce praemissis ad aequationes nostras generaliores revertimur. Ex aequatione (B) $\mu = 2$ statim formulam

$$\int_0^\infty e^{-px^2}x^{2m}f(x)\,dx = \sum\gamma_t\,\frac{\Gamma\frac{2m+t+1}{2}}{2p^{\frac{2m+t+1}{2}}} = \begin{cases}\sum\gamma_{2t}\,\dfrac{\Gamma(m+t+\frac{1}{2})}{2p^{m+t+\frac{1}{2}}}\\ +\sum\gamma_{2t+1}\dfrac{\Gamma(m+t+1)}{2p^{m+t+1}}\end{cases}$$

accipiemus, qua singulis $f(x)$ valoribus substitutis integralia definita praecipue illa ab auctore cio profecta, nobis deducere licet. Sumentes enim

$$f(x) = \cos ax, \qquad \gamma_{2t+1} = 0,\ \gamma_{2t} = \frac{a^{2t}}{1.2.3.\ldots.2t},$$

quare

$$f(x) = \sin ax, \qquad \gamma_{2t} = 0,\ \gamma_{2t+1} = \frac{a^{2t+1}}{1.2.3.\ldots.(2t+1)},$$

atque $2m-1$ pro $2m$ in altera serie scribentes, aequationes

$$\int_0^\infty x^{2m}e^{-px^2}\cos ax\,dx = \frac{1.3.5.\ldots.(2m-1)}{2^m\,p^m}\frac{\Gamma\frac{1}{2}}{2p^{\frac{1}{2}}}\left\{1-\frac{2m+1}{1.2.}\frac{a^2}{2p}+\frac{(2m+1)(2m+3)}{1.2.3.4}\frac{a^4}{2^2p^2}-\ldots.\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-px^2}\sin ax\,dx = \frac{1.3.5.\ldots.2m-1}{2^m\,p^m}\frac{a\Gamma\frac{1}{2}}{2p^{\frac{1}{2}}}\left\{1-\frac{2m+1}{1.2.3.}\frac{a^2}{2p}+\frac{(2m+1)(2m+3)}{1.2.3.4.5}\frac{a^4}{2^2p^2}-\ldots.\right\}$$

facili negotio derivamus, in quibus a quamlibet quantitatem designat. Quum autem harum s terminos generales queamus mutare in

$$(-1)^l\,\frac{[2(m+l)-1]\,[2(m+l)-3]\ldots.(2m+1)}{1.2.3.\ldots.2l}\,\frac{a^{2l}}{2^l\,p^l} = (-1)^l\,\frac{[2m+2l-1]\,[2(m-1)+2l-1]\ldots.[2(m-l+1)+2l-1]}{1.2.3.\ldots.2l}$$

$$= (-1)^l\left\{\frac{m(m-1)\ldots.(m-l+1)}{1.2.3\ldots2l}+\frac{1}{2^2}\,\frac{m(m-1)\ldots.(m-l+2)}{1.2.3\ldots.2(l-1)}\cdot 1+\frac{1}{2^4}\,\frac{m(m-1)\ldots.(m-\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2(h-1)}}\,\frac{m(m-1)\ldots.(m-l+h)}{1.2.3\ldots.2[l-(h-1)]}\,\frac{1}{1.2..(h-1)}\ldots.+\frac{1}{2^{2l}}\,\frac{1}{1.2\ldots.}\right.$$

*) Vix haec demonstratio ab illa differt, quam III. Cauchius in Mem. pres. par div. Sav. à l'inst. Tom. I, et de la soc. phil. An. 1818, pag. 178 de hoc theoremate dedit, quod permulti studuerunt aliis methodis, praec transgressionis ab finito ad infinitum, commonstrare. Scrupulos adversus has rationes hoc loco non disputo, n monstrationem allatam ad propositum nostrum sufficientem amplificem.

$$\frac{[2(m+l)-1]\,[2(m+l)-3]\,\ldots\,(2m+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(2l+1)}\,\frac{a^{2l}}{2^l\;p^l}=(-1)^l\,\frac{[2(m-1)+2l+1]\,[2(m-2)+2l+1]\,\ldots\,[2(m-l)+2l+1]}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(2l+1)}\,\frac{a^{2l}}{2^l\;p^l}$$

$$=(-1)^l\left\{\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-l)}{1.\,2.\,3\ldots(2l+1)}+\frac{1}{2^2}\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-l+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(2l-1)}\cdot 1+\frac{1}{2^4}\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-l+2)}{1.\,2.\,3\ldots(2l-3)}\,\frac{1}{1.\,2}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2h}}\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-l+h)}{1.2.3\ldots[2l-(2h-1)]}\,\frac{1}{1.2\ldots h}\cdot\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2l}}\,\frac{1}{1.\,2\ldots l}\right\}\frac{a^{2l}}{p^l},$$

n seriem esse nemo non intelligit productum harum

$$\left.\frac{m}{1.\,2}\,\frac{a^2}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2.3.4}\,\frac{a^4}{p^2}\cdot\ldots\ldots(-1)^l\,\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.\,2.\,3\ldots.\,2l}\,\frac{a^{2l}}{p^l}\ldots\right\}$$

$$\left.-\frac{a^2}{2^2p}+\frac{1}{1.\,2}\,\frac{a^4}{2^4p^2}\cdot\ldots\ldots(-1)^l\,\frac{1}{1.\,2.\,3\ldots.\,l}\,\frac{a^{2l}}{2^{2l}\;p^l}\ldots\right\}=e^{-\frac{a^2}{4p}}\left\{1-\frac{m}{1.\,2}\,\frac{a^2}{4p}+\frac{m(m-1)}{1.2.3.4}\,\frac{a^4}{p^2}\ldots\right\}$$

n harum

$$\left.\frac{-1}{2.3}\,\frac{a^2}{p}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.4.5}\,\frac{a^4}{p^2}\cdot\ldots\ldots(-1)^l\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-l)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots(2l+1)}\,\frac{a^{2l}}{p^l}\ldots\right\}$$

$$\left.-\frac{a^2}{2^2p}+\frac{1}{1.\,2.}\,\frac{a^4}{2^4\,p^2}\cdot\ldots\ldots(-1)^l\,\frac{1}{1.\,2.\,3\ldots.\,l}\,\frac{a^{2l}}{2^l\;p^l}\ldots\right\}=e^{-\frac{a^2}{4p}}\left\{1-\frac{m-1}{1.\,2.\,3.}\,\frac{a^2}{p}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.4.5}\,\frac{a^4}{p^2}\ldots\right\}$$

deo, quum $\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$ sit secundum aequationem (ϑ),

$$\int_0^\infty x^{2m}\,e^{-px^2}\cos ax\,dx=\frac{1.3\ldots\ldots(2m-1)}{2^m\;p^m}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}\,e^{-\frac{a^2}{4p}}\left\{1-\frac{m}{1.\,2}\,\frac{a^2}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2.3.4}\,\frac{a^4}{p^2}-\ldots\ldots\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{2m-1}\,e^{-px^2}\sin ax\,dx=\frac{1.3\ldots\ldots(2m-1)}{2^m\;p^m}\,\frac{a\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}\,e^{-\frac{a^2}{4p}}\left\{1-\frac{m-1}{1.2.3}\,\frac{a^2}{p}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3.4.5}\,\frac{a^2}{p^2}\ldots\right\}$$

re necesse est*), in quibus p quaecunque quantitas et realis positiva et propter aequationem (i) aria cum reali parte positiva.

Ubi in altera aequationum (III) $m=o$, in altera $m=1$ sumseris, integralia

$$\int_0^\infty e^{-px^2}\cos ax\,dx=\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\int_0^\infty x\,e^{-px^2}\sin ax\,dx=\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{4p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

osito p^2 pro p,

$$\int_0^\infty e^{-p^2x^2}\cos ax\,dx=\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{2p}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2x^2}\sin ax\,dx=\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{4p^3}\sqrt{\pi}$$

---

*) Invenit Ill. Cauchius in Mem. pres. par div. Sav. à l'inst. Tom. I, pag. 630 has aequationes methodo supra laudata, observans alia ratione legem earum fortasse difficulter perspici posse.

accipies, quae sunt primum, ut supra diximus, ab Laplacio*) inventa; ab Bidonio**) serie ab Legendrio***) differentiatione integrationeque tractata; ab Cauchio†), aliis deducta. S in formularum *(III)* priore $p + q\sqrt{-1}$ pro p, $m = o$ sumtum,

$$\int_0^\infty e^{-(p+q\sqrt{-1})x^2} \cos ax\, dx = \frac{e^{-\frac{a^2}{4(p+q\sqrt{-1})}}}{(p+q\sqrt{-1})^{1/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

vel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(p+q\sqrt{-1})x^2} \cos ax\, dx = \frac{e^{-\frac{a^2}{4(p+q\sqrt{-1})}}}{(p+q\sqrt{-1})^{1/2}} \sqrt{\pi}$$

consequemur, ex quo, si posueris $x + b$ loco x, ubi b quamcunque quantitatem realem exprim

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(p+q\sqrt{-1})x^2+2b(p+q\sqrt{-1})x]} \cos a(x+b)\, dx = \sqrt{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2}{4(p+q\sqrt{-1})}+b^2(p+q\sqrt{-1})}}{(p+q\sqrt{-1})^{1/2}}$$

prodit, unde, $p + q\sqrt{-1} = \alpha$, $2b(p+q\sqrt{-1}) = \beta$, $a = o$ statutis,

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2+\beta x)\sqrt{-1}} dx = \frac{e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi}.$$

Quo in integrali, ad signum expressionis $\sqrt{\alpha}$ definiendum, conditio necessaria, ut p quantitas s tiva, postquam facta est

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{p+q\sqrt{-1}} = \rho + \tau\sqrt{-1},$$

quare $\alpha = \rho^2 + 2\rho\tau\sqrt{-1} - \tau^2$, ideoque $\rho^2 - \tau^2 = p$, $2\rho\tau = q$ aequationes praebet, primo obtuto intelligitur $\rho^2 + \tau^2 = \sqrt{p^2+q^2}$ esse,

$$\rho = \sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}}, \quad \tau = \begin{cases} \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} \ldots\ldots si\ q > 0 \\ -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} \ldots\ldots si\ q < 0, \end{cases}$$

quae consociatae expressionem offerunt

$$(\mu) \qquad \sqrt{\alpha} = \begin{cases} \sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}}\sqrt{-1} \ldots\ldots si\ q > 0 \\ \sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}}\sqrt{-1} \ldots\ldots si\ q < 0 \end{cases}$$

ad signum explorandum satis illam idoneam.

---

*) Cf. Mem. de l'institut. A. 1809, pag. 367; Theorie analytique des probabilites pag. 96.

**) Mem. sur div. integrales def. pag. 92. Turin 1812.

***) Exerc. de cal. integral. Part. III., pag. 362 sqq., quo loco auctor docuit integralis

$$\int_0^\infty (M\cos ax + Nx\sin ax)\, e^{-x^2} dx$$

valorem, in quo M, N functiones ipsius x integras rationalesque indicent, per illa in universum computari id quod jam additione aequationum (*III*) corroboratur.

†) Mem. sur les intgl. def. entre des lim. imag. pag. 29.

Quum igitur formularum (5) prima subjecta sit conditioni in aequationibus (1) indicatae, id quod, a substitutione $a = o$, $x^2 = y$ facta, latet neminem, $p = o$ licebit in integrali (7) ponere, fit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(qx^2+rx)\sqrt{-1}}\, dx = \frac{e^{\frac{r^2}{4q}}}{\sqrt{q\sqrt{-1})}}\sqrt{\pi},$$

la, quae integralia evocat definita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\,(qx^2+rx)\; dx = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}\left\{\cos\frac{r^2}{4q} + \sin\frac{r^2}{4q}\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\,(qx^2+rx)\; dx = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}\left\{\cos\frac{r^2}{4q} - \sin\frac{r^2}{4q}\right\},$$

rato cum imaginario imaginario, reali cum reali, vel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\,(qx^2)\,\cos\,rx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}\left\{\cos\frac{r^2}{4q} + \sin\frac{r^2}{4q}\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\,(qx^2)\,\cos\,rx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}\left\{\cos\frac{r^2}{4q} - \sin\frac{r^2}{4q}\right\}$$

o $\cos\,(qx^2+rx)$ et $\sin\,(qx^2+rx)$. Signum quantitatis $\sqrt{q}$ secundum aequationes (μ) cogno- per

$$\sqrt{q} = \begin{cases} \sqrt{\frac{q}{2}}\;(1+\sqrt{-1}) \ldots\ si\, q>0 \\ \sqrt{\frac{q}{2}}\;(1-\sqrt{-1}) \ldots\ si\, q<0 \end{cases}.$$

alia (10) pariterque illa (5) tam in caloris quam in undarum theoria gravissima sunt *).

7. Adhibitis aequationibus (λ) positaque

$$f\,(b) = \begin{cases} e^{-b^2}\cos pb \\ e^{-b^2}\sin pb, \end{cases}$$

unt

$$\frac{\pi}{2}\,e^{-b^2}\,\cos pb = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-a^2}\cos pa\,\cos xa\,da\,\cos bx\,dx$$

$$\frac{\pi}{2}\,e^{-b^2}\,\sin pb = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-a^2}\sin pa\,\sin xa\,da\,\sin bx\,dx,$$

tegralium (5) prioris et formularum trigonometricarum ($\varkappa$) deducimus

---

Cf. Fourier. Theorie de la chaleur, pag. 532; Poisson in Theorie math. de la chaleur, pag. 142; pag. 324; Cauchy in Mem. pres. à l'inst. Tom. I.

$$\sqrt{\pi}.e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\cos pb=\int_0^{\infty}\frac{e^{\frac{ipx}{2}}+e^{\frac{px}{2}}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\cos bx\,dx,$$

(11)

$$\sqrt{\pi}.e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\sin pb=\int_0^{\infty}\frac{e^{\frac{px}{2}}-e^{-\frac{px}{2}}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\sin bx\,dx,$$

vel, si in utriusque aequationis integrali altero $-x$ pro x scribitur,

$$2\sqrt{\pi}.e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\cos pb=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4}+\frac{px}{2}}\cos bx\,dx,$$

(12)

$$2\sqrt{\pi}.e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\sin pb=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4}+\frac{px}{2}}\sin bx\,dx.$$

Verum tamen, quum

$$\lim_{b=0}\left\{2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{p^2}{4}}.e^{-b^2}\cos pb\right\}=2\sqrt{\pi}.\,e^{\frac{p^2}{4}},\qquad \lim_{b=0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4}+\frac{px}{2}}\cos bx\,dx\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4}+$$

sit, integrale valde memorabile

(13)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+2px}\,dx=\sqrt{\pi}.\,e^{p^2},$$

$2x$ pro x, $2p$ loco p suffecto, nobis comparamus.

Quodsi

$$f(b)=\begin{cases}b\,e^{-b^2}\sin pb\\ b\,e^{-b^2}\cos pb\end{cases}$$

in aequationibus (λ) statuitur, formulae resultant

$$\frac{\pi}{2}\,b\,e^{-b^2}\sin pb=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}a\,e^{-a^2}\sin pa\cos xa\,da\cos bx\,dx$$

$$\frac{\pi}{2}\,b\,e^{-b^2}\cos pb=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}a\,e^{-a^2}\cos pa\sin xa\,da\sin bx\,dx,$$

ex quibus, secunda aequationum (5) advocata, integralia

$$\sqrt{\pi}\,e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\left\{2b\sin pb-p\cos pb\right\}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{px}{2}}-e^{\frac{px}{2}}}{2}x\,e^{-\frac{x^2}{4}}\cos bx\,dx$$

(14)

$$\sqrt{\pi}\,e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\left\{2b\cos pb-p\sin pb\right\}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{px}{2}}+e^{\frac{px}{2}}}{2}x\,e^{-\frac{x^2}{4}}\sin bx\,dx$$

per formulas trigonometricas (η) opeque aequationum (11), vel

$$2\sqrt{\pi}.\ e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\left\{\begin{array}{l}2b\sin pb-p\cos pb\end{array}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{px}{2}}\cos bx\,dx$$

$$2\sqrt{\pi}.\ e^{\frac{p^2}{4}-b^2}\left\{\begin{array}{l}2b\cos pb+p\sin pb\end{array}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{px}{2}}\sin bx\,dx$$

ratione atque illa (12) nascuntur.

8. Formulae (I), ex aequatione (B) substitutione $a=1$, $f(x)=\begin{Bmatrix}\cos ax\\ \sin ax\end{Bmatrix}$ paratae, sumto $p\sqrt{-1}$, $1-\frac{m}{n}$ pro m, ubi $\frac{m}{n}$ quamcunque fractionem veram denotat, has

$$\int_0^\infty\frac{e^{-px\sqrt{-1}}\cos ax}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx=\frac{\Gamma(1-\frac{m}{n})}{2\sqrt{-1}^{\frac{m}{n}}}\left\{\frac{1}{(p-a)^{1-\frac{m}{n}}}+\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}\right\}$$

$$\int_0^\infty\frac{e^{-px\sqrt{-1}}\sin ax}{x^{\frac{m}{n}}}\sqrt{-1}\,dx=\frac{\Gamma(-1\frac{m}{n})}{2\sqrt{-1}^{\frac{m}{n}}}\left\{\frac{1}{(p-a)^{1-\frac{m}{n}}}-\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}\right\}$$

unt, quarum alteram, resoluto $e^{-px\sqrt{-1}}$ ratione notissima, $\sqrt{-1}^{-(1-\frac{m}{n})}$ secundum formulam (ζ), aginario comparato imaginario realique reali, aequationes has

$$\int_0^\infty\frac{\cos px\cos ax}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx=\frac{\Gamma(1-\frac{m}{n})}{2}\cos\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{2}\pi\right)\left\{\frac{1}{(p-a)^{1-\frac{m}{n}}}+\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}\right\}$$

$$\int_0^\infty\frac{\cos ax\sin px}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx=\frac{\Gamma(1-\frac{m}{n})}{2}\sin\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{2}\pi\right)\left\{\frac{1}{(p-a)^{1-\frac{m}{n}}}+\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}\right\}$$

autem has

$$\int_0^\infty\frac{\sin ax\sin px}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx=\frac{\Gamma(1-\frac{m}{n})}{2}\cos\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{2}\pi\right)\left\{\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}-\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}\right\}$$

$$\int_0^\infty\frac{\cos px\sin ax}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx=\frac{\Gamma(1-\frac{m}{n})}{2}\sin\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{2}\pi\right)\left\{\frac{1}{(p-a)^{1-\frac{m}{n}}}-\frac{1}{(p+a)^{1-\frac{m}{n}}}\right\}$$

e liquet. In quibus insunt integralia ab **Laplacio** in diario scholae polytechnicae*), ab **Bido-** prima commentationis parte**) edita. Sumendo *e. g.* $\frac{m}{n}=1/2$, quod $\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$ (aeq. ϑ) et $=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$,

---

Cah. XV, pag. 244 sqq.

Vid. Mem. sur div. integl. def. Turin 1812, init. Quo loco tamen auctor ea integralia tantum tractat, quorum functio est productum ex cos. et sin., neque vero ex cos. et cos. sive sin. et sin.

$$\int_0^\infty \frac{\cos px \cos ax}{\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(p+a)}} + \frac{1}{\sqrt{(p-a)}}\right\},$$

(19)

$$\int_0^\infty \frac{\sin px \sin ax}{\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(p+a)}} - \frac{1}{\sqrt{(p-a)}}\right\},$$

atque

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin px}{\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(p-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(p+a)}}\right\},$$

(20)

$$\int_0^\infty \frac{\cos px \sin ax}{\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(p-a)}} - \frac{1}{\sqrt{(p+a)}}\right\}$$

adipiscimur, ubi conditio constat, ut differentia quantitatum a et p semper sit positiva.

Additio atque subtractio priorum et alterarum de formulis (17), (18) rursus dat

$$\int_0^\infty \frac{\cos(p \pm a)x}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx = \Gamma\left(1-\tfrac{m}{n}\right)\cos\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{2}\pi\right)\frac{1}{(p \mp a)^{1-\frac{m}{n}}},$$

(21)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(p \pm a)x}{x^{\frac{m}{n}}}\,dx = \Gamma\left(1-\tfrac{m}{n}\right)\sin\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{2}\pi\right)\frac{1}{(p \mp a)^{1-\frac{m}{n}}},$$

quibus ex aequationibus, $\frac{m}{n} = 1/4, 2/4, 3/4 \ldots$ facto, tabula loco citato ab **Laplacio** exhibita pe mulam (ϑ) apparet.

9. Si jam ad tractanda integralia (I) aequationes (λ) adhibemus, ponentes in his

$$f(b) = b^{m-1}\,e^{-pb}\begin{Bmatrix}\cos qb\\ \sin qb\end{Bmatrix}, \text{ tum } f(b) = b^{m-1}\,e^{-pb}\begin{Bmatrix}\sin qb\\ \cos qb\end{Bmatrix},$$

quod permissum nobis est, quia hae functiones conditionibus aequationum (λ) indicatis respondent mulas nanciscimur

$$\tfrac{\pi}{2}\,b^{m-1}\,e^{-pb}\cos qb = \int_0^\infty\int_0^\infty a^{m-1}\,e^{-pa}\cos xa\cos qa\,da\cos bx\,dx$$

(22)

$$\tfrac{\pi}{2}\,b^{m-1}\,e^{-pb}\sin qb = \int_0^\infty\int_0^\infty a^{m-1}\,e^{-pa}\sin ax\sin qa\,da\sin bx\,dx,$$

atque

$$\tfrac{\pi}{2}\,b^{m-1}\,e^{-pb}\sin qb = \int_0^\infty\int_0^\infty a^{m-1}\,e^{-pa}\cos xa\sin qa\,da\cos bx\,dx$$

(23)

$$\tfrac{\pi}{2}\,b^{m-1}\,e^{-pb}\cos qb = \int_0^\infty\int_0^\infty a^{m-1}\,e^{-pa}\sin xa\cos qa\,da\sin bx\,dx,$$

quarum priores formulis trigonometricis $(\varkappa)$ et aequationum (I) prima progignunt

$$b^{m-1}e^{-pb}\cos qb=\tfrac{1}{2}\Gamma m\int_0^\infty\left(\frac{[p-(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}+[p+(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2}+\frac{[p-(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}+[p+(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2}\right)\cos bx\,dx$$

$$b^{m-1}e^{-pb}\sin qb=\tfrac{1}{2}\Gamma m\int_0^\infty\left(\frac{[p-(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}+[p+(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2}-\frac{[p-(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}+[p+(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2}\right)\sin bx\,dx$$

Alterae per formulas (η) atque aequationum (1) alteram proferunt

$$b^{m-1}e^{-pb}\sin qb=\tfrac{1}{2}\Gamma m\int_0^\infty\left(\frac{[p-(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}-[p+(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2\sqrt{-1}}-\frac{[p-(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}-[p+(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\cos bx\,dx$$

$$b^{m-1}e^{-pb}\cos qb=\tfrac{1}{2}\Gamma m\int_0^\infty\left(\frac{[p-(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}-[p+(x+q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2\sqrt{-1}}+\frac{[p-(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}-[p+(x-q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\sin bx\,dx,$$

perinde atque illa (24) conditionibus supra ineunte §. 4. indicatis subjectae, pondere sunt maximo. ue gravissima integralia sine ullo fere labore iis possunt aperiri.

Additio jam ac subtractio et priorum et alterarum ex formulis (24), (25) integralia procreat

$$\frac{\pi}{2\Gamma m}b^{m-1}e^{-(p\pm q\sqrt{-1})b}=\int_0^\infty\left(\frac{[p-(x\mp q)\sqrt{-1}]^{-m}+[p+(x\pm q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2}\right)\cos bx\,dx$$

$$\frac{\pi}{2\Gamma m}b^{m-1}e^{-(p\pm q\sqrt{-1})b}=\int_0^\infty\left(\frac{[p-(x\mp q)\sqrt{-1}]^{-m}-[p+(x\pm q)\sqrt{-1}]^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\sin bx\,dx$$

bus illa acutissime a Poissonio*) deducta

$$\frac{\pi}{2}e^{-(p\mp q\sqrt{-1})b}=\int_0^\infty\frac{(p\mp q\sqrt{-1})\cos bx}{(p\mp q\sqrt{-1})^2+x^2}dx$$

$$\frac{\pi}{2}e^{-(p\mp q\sqrt{-1})b}=\int_0^\infty\frac{x\sin bx}{(p\mp q\sqrt{-1})^2+x^2}dx,$$

= 1 feceris, evadunt.

umentes $q=o$ in (26), sive (24) et (25), formulas consequimur

$$\frac{\pi}{2\Gamma m}b^{m-1}e^{-pb}=\int_0^\infty\frac{(p-x\sqrt{-1})^{-m}+(p+x\sqrt{-1})^{-m}}{2}\cos bx\,dx$$

$$\frac{\pi}{2\Gamma m}b^{m-1}e^{-pb}=\int_0^\infty\frac{(p-x\sqrt{-1})^{-m}-(p+x\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}\sin bx\,dx,$$

ntes notissima ob auctore Laplacio**) divulgata integralia

Vid. Journal de l'ecole polytechnique. Cah. XVIII, pag. 339 sqq. Quo loco auctor docet

$$\int_0^\infty\frac{P\cos bx+x\,Q\sin bx}{R}\,dx$$

ibi P, Q, R functiones designent ipsius x integras rationalesque, R minorem gradum quam P et Q habeat, illis integra- ibus (27) sine decompositione in factores reales posse deduci. Id quod et facile intelligitur, et ab Ill. Cauchio (in Mem. pres. par div. Sav. a l'inst. Tom. I, pag. 759) comprobatur.

V. Mem. de l'acad. des sc. à Paris. An. 1782; Bull. de la soc. philomat. Nr. 43 et 49; Theorie analytique des probabi- ites, pag. 99 sqq. et pag. 134, ubi Cl. auctor monstrat integralia

$$\frac{\pi}{2}\, b^{-pb} = \int_0^\infty \frac{p\cos bx}{p^2+x^2}\, dx$$

(29)

$$\frac{\pi}{2}\, b^{-pb} = \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{p^2+x^2}\, dx$$

quae substitutione $m = 1$ facta colligimus, atque si statuissemus $q = o$ in (27), in eadem incidiss
Post paucas transformationes integrale

$$\frac{2p}{\Gamma m}\, b^{m-1}\, e^{-pb} = \int_0^\infty \frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{(p+q\sqrt{-1})^m}\, dx,$$

(30)

sive Laplaciana forma

$$\frac{2\pi.m.e^{-m}}{\Gamma(m+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{(p-x\sqrt{-1})^m + (p+x\sqrt{-1})^m}{(p^2+x^2)^m} \cos x + \frac{(p+x\sqrt{-1})^m - (p-x\sqrt{-1})^m}{(p^2+x^2)^m} \sin bx\sqrt{-1} \right.$$

additione aequationum nostrarum (28), quas easdem explicuit Cauchius[1]) reperimus. Integralia ab eodem [2]), Poissonio[3]), Bidonio[4]), Legendrio[5]) methodis supra citatis deducta tracta sunt; formulam (30) Cauchius[6]), Poissonius[7]), inter alias explanavit.

Statuendo in formulis (25) $m = 1$ aequationes has

$$\frac{\pi}{2}\, e^{-pb} \sin qb = \int_0^\infty \left(\frac{x+q}{p^2+(x+q)^2} - \frac{x-q}{p^2+(x-q)^2} \right) \frac{\cos bx}{2}\, dx$$

(31)

$$\frac{\pi}{2}\, e^{-pb} \cos qb = \int_0^\infty \left(\frac{x+q}{p^2+(x+p)^2} + \frac{x-q}{p^2+(x-q)^2} \right) \frac{\sin bx}{2}\, dx$$

$$\int_0^\infty \frac{P}{Q} \cos bx\, dx, \quad \int_0^\infty \frac{P}{Q} \sin bx\, dx,$$

ad illa (28) fractione $\frac{P}{Q}$ decomposita in simpliciores reduci posse, si P et Q functiones variabilis x rationales i que declarent, P gradum inferiorem quam Q, Q nullum primi gradus factorem obtineat. Quod Legendrius et sonius locis infra citatis confirmant.

1) V. Mem. sur les intgl. def. entre des lim imag. pag. 37.
2) Ibidem pag. 63; Mem. pres. à l'inst. Tom. I, pag. 758.
3) Journal de l'ecole polytechnique. Cah. XVI, pag. 233.
4) Mem. sur div. integl. def. pag. 59 sqq. Turin 1812. Demonstrat hic auctor, ut integralia

$$\int_0^\infty \frac{\overline{\sin bx}^{2m}\, \overline{\cos b,x}^{n}}{p^2+x^2}\, dx, \int_0^\infty x\, \frac{\overline{\sin bx}^{2m+1}\, \overline{\cos b,x}^{n}}{p^2+x^2}\, dx$$

ex illis ab eo per integrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, quod mox exponemns, derivatis (28) evolvi queant notissimis form

gonometricis, si m, n numeros integros positivos significent.
5) Exerc. de calc. intgl. Part. IV, pag. 357 sqq.
6) Mem. sur les intgl. def. entre des lim. imag. pag. 34.
7) Journal de l'ecole polytechnique. Cah. XIX, pag. 481.

scimur, quae statim integralia primum ab Bidonio*) allata progignunt. Nam sumto $p = o$, quod est illicitum, quum hoc in casu, ob continuitatem $\int_0^\infty \frac{e^{-px} \sin ax}{x} dx$ usque in zero, altera aequationum ex qua formulae (25) ortae, locum habeat, integralia Bidoniana

$$-\frac{\pi}{2} \sin qb = \int_0^\infty \frac{q \cos bx}{x^2 - p^2} dx$$

$$\frac{\pi}{2} \cos qb = \int_0^\infty \frac{x \sin bx}{x^2 - p^2} dx,$$

eadem Ill. Cauchius**) protulit methodo non ignota, inveniemus

10. Applicantes porro aequationes (λ) et

$$f(b) = \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{b^2}{y^2}} dy$$

rum prima facientes, triplex integrale

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{b^2}{y^2}} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{a^2}{y^2}} \cos xa \, da \cos bx \, dx \, dy$$

us. Quum tamen sit secundum (5) $\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{y^2}} \cos xa \, da = e^{-\frac{x^2 y^2}{4}} y \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, secundum aequationem ($c$) $y^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right) dy = \frac{2}{2^2+x^2}$, simplex integrale $\int_0^\infty \frac{2 \cos bx}{2^2+x^2} dx$ habebimus, quo, propter aequationum (29)

n,

$$\int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{b^2}{y^2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2b}$$

ur. Nec dissimili ratione

$$f(b) = \int_0^\infty \frac{b.e^{-y^2 - \frac{b^2}{y^2}}}{y^2} dy$$

eram aequationum (λ) sufficientes, quae hac re fit.

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{be^{-y^2 - \frac{b^2}{y^2}}}{y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a\, e^{-y^2 - \frac{a^2}{y^2}}}{y^2} \sin xa \, da \sin bx \, dx \, dy,$$

le hoc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y^2 - \frac{b^2}{y^2}}}{y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{-2b}$$

imus, adhibitis formularum (5) et (29) alteris, ex quibus

---

*) Mem. sur div. integl. def. pag. 80 sqq. Turin 1812.

**) Mem. pres. à l'instit. Tom. I, pag. 755; Mem. sur les intgl. def. entre des lim. imag. pag. 63.

$$\int_0^\infty a e^{-\frac{a^2}{y^2}} \sin xa\, da = x e^{-\frac{y^2 x^2}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} y^3, \quad \int_0^\infty \frac{2x \sin bx}{2^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-2b}.$$

Factis substitutionibus x pro y^2, tum y pro $\frac{x}{b}$, denique $2n$ pro $\frac{1}{b}$, integralia (33), (34) mutata sunt in haec

(35)
$$\int_0^\infty y^{-1/2} e^{-\left(\frac{1+y^2}{2ny}\right)} dy = \sqrt{(2\pi n)} . e^{-\frac{1}{n}},$$
$$\int_0^\infty y^{-3/2} e^{-\left(\frac{1+y^2}{2ny}\right)} dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} . e^{-\frac{1}{n}},$$

de quibus **Eulerus** in opusculis analyticis *) disseruit, alterum judicans nulla via explorari posse.

11. Aequationes (29) et (32) collatae in series haud ignotas convergentes **)

$$\frac{1-u\cos\alpha}{1-2u\cos\alpha+u^2} = 1+\sum u^n \cos n\alpha \left\{ \begin{array}{l} e^{u\cos\alpha}\cos(u\sin\alpha) = 1+\sum \frac{u^n \cos n\alpha}{1.2.3\ldots n} \\ (\nu), \end{array} \right. \frac{1}{2} log(1+2u\cos\alpha+u^2) = \sum \frac{u^n c}{n}$$
$$\frac{u\sin\alpha}{1-2u\cos\alpha+u^2} = \sum u^n \sin n\alpha \left\{ \begin{array}{l} e^{u\cos\alpha}\sin(u\sin\alpha) = \sum \frac{u^n \sin n\alpha}{1.2.3\ldots n} \\ (\sigma), \end{array} \right. arc\ tang \frac{u\sin\alpha}{1+u\cos\alpha} = \sum \frac{u^n s}{n}$$

in quibus Σ ad omnes inter limites 1 et ∞ numeros integros littera n denotatos extendendum est, efficiunt integralia definita, quae inveniendi methodus uno exemplo sat illustratur. Qua de causa priorem serierum per (ν) designatarum consideramus, formularum (29), (32) producere has aequa videmus

(36)
$$\int_0^\infty \frac{1-a\cos bx}{1-2a\cos bx+a^2} \frac{p}{p^2+x^2}\, dx = \int_0^\infty dx \left(\frac{p}{p^2+x^2} + a\frac{p\cos bx}{p^2+x^2} + a^2 \frac{p\cos 2bx}{p^2+x^2} + \ldots \right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + ae^{-pb} + a^2 e^{-2pb} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1-ae^{-pb}}$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx - a}{1-2a\cos bx+a^2} \frac{p}{x^2-p^2}\, dx = \int_0^\infty dx \left(\frac{p}{x^2-p^2} + a\frac{p\cos 2bx}{x^2-p^2} + a^2 \frac{p\cos 3bx}{x^2-p^2} + \ldots \right)$$
$$= -\frac{\pi}{2}\left(\sin bp + a\sin 2bp + a^2 \sin 3bp \ldots\right) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sin bp}{1-2a\cos bp+}$$

Unde, utraque formula (29), (32) hac ratione adhibita, integralia

(36)
$$\int_0^\infty \frac{1-a\cos bx}{1-2a\cos bx+a^2} \frac{p}{p^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1-ae^{-pb}}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2} \frac{x}{p^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{e^{pb}-a}$$

per (29), atque

*) Tom. II fin.; Calculus integralis. Tom. IV, pag. 415. Cf. etiam **Legend.** in Exerc. de calc. intgl. Part. III, sqq.; **Laplac.** in Theor. analyt. des prob. pag. 99; **Poiss.** in Journ. de l'ecole polytech. Cah. XVI, pag. 23

) Cf. **Cauchy. Cours d'analyse. Cap. IX.

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx - a}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{p}{x^2-p^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin bp}{1-2a\cos bp+a^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2}\,\frac{x}{x^2-p^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos bp-a}{1-2a\cos bp+a^2}$$

32) colliges.

Eadem methodo in series (ϱ) applicata, ex formulis (29)

$$\int_0^\infty e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)\,\frac{p}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{ae^{-pb}}$$

$$\int_0^\infty e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\,\frac{x}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(e^{ae^{-pb}}-1\right),$$

2)

$$\int_0^\infty [e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)-1]\,\frac{p}{x^2-p^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\,e^{a\cos bp}\sin(a\sin bp)$$

$$\int_0^\infty e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\,\frac{x}{x^2-p^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}[e^{a\cos bp}\cos(a\sin bp)-1]$$

it, de quibus prioribus Cauchius *) mentionem fecit.

Neque alia via ex serieribus (σ) per formulas (29)

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2}\log(1+2a\cos bx+a^2)\,\frac{p}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log(1+ae^{-pb})$$

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin bx}{1+a\cos bx}\,\frac{x}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log(1+ae^{-pb}),$$

rmulas (32)

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2}\log(1+2a\cos bx+a^2)\,\frac{p}{x^2-p^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin bp}{1+a\cos bp}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin bx}{1+a\cos bx}\,\frac{x}{x^2-p^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\log(1+2a\cos bp+a^2)$$

nt. Quorum prioribus, si tum $a=+1$, tum $a=-1$ accipis, nascuntur

---

Mem. sur les intgl. def. entre des limit. imag. pag. 65. Nescio autem, an auctor hoc loco erravit statuens

$$\int_0^\infty e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\,\frac{x}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{ae^{-pb}}$$

esse, quod, ut equidem video, $=\frac{\pi}{2}(e^{ae^{-pb}}-1)$ est.

$$\int_0^\infty \frac{p\ log\ \cos\ bx}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ log\ \frac{1+e^{2pb}}{2e^{2pb}}$$

(42)
$$\int_0^\infty \frac{p\ log\ \sin\ bx}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ log\ \frac{e^{2pb}-1}{2e^{2pb}},$$

inde

(43)
$$\int_0^\infty \frac{p\ log\ tang\ bx}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ log\ \frac{e^{2pb}-1}{e^{2pb}+1};$$

atque

$$\int_0^\infty \frac{p\ log\ (2\ \cos\ bx)}{x^2-p^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\ bp$$

(44)
$$\int_0^\infty \frac{p\ log\ (2\ \sin\ bx)}{x^2-p^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ bp,$$

unde

$$\int_0^\infty \frac{log\ (2\ tg\ bx)}{x^2-p^2}\,dx = o.$$

Omnibus his in integralibus, quorum nonnulla **Bidonius** et **Legendrius** in scriptis saepen commemoratis methodis non raro allegatis exposuerunt*), naturam integralium **(29)**, **(32)** eandem n perspicuum est, quod nostras evolutiones se recte habere confirmat. Aeque in illis per formulas ortis secundum aequationes **(27)** licitum est $p \mp q\sqrt{-1}$ pro p sumere, quo, sicut consociatione gralium ex **(29)** et **(32)** profectorum cum aliis, permulta alia integralia oriuntur, quae tamen bere supersedemus. Adjicimus modo integralium **(5)**, **(6)** ope series (ν), (ϱ), (σ) alias parere rum termini secundum quadrata exponentis p baseos e progrediuntur, quarumque summa integral finitum est.

12. Ut jam integralia ab cos. vel sin. pendentia absolvamus, ad illa accedimus, quorum q functio formam $\frac{\cos\ ax}{x^m}$ sive $\frac{\sin\ ax}{x^m}$ habet; sed quae in seriem, ut ita dicam, summabilem evol queunt, nisi m quantitate minore quam **2**. Revocemus igitur aequationem fundamentalem **(B)**, po $m = o$ in ea, unde fit

$$\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx = \sum \gamma_t \frac{\Gamma(t+1)}{p^{t+1}},$$

ac statuamus

$$f(x) = \frac{\sin\ ax}{x}, \qquad \gamma_{2t} = (-1)^t \frac{a^{2t+1}}{1.2.3....(2t+1)},\ \gamma_{2t+1} = o,$$

quocirca

$$f(x) = \frac{\cos\ ax - 1}{x}, \qquad \gamma_{2t+1} = (-1)^t \frac{a^{2t}}{1.2.3....2t},\ \gamma_{2t} = o.$$

Hinc aequationes nanciscimur

*) Vid. Mem. sur div. intgl. def. fin.; Exerc. de calcul intgl. Part. IV., pag. 124. sqq.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin ax}{x}\,dx = \frac{a}{p} - \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{p^3} + \tfrac{1}{5}\frac{a^5}{p^5} - \tfrac{1}{7}\frac{a^7}{p^7}\ldots\ldots$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}(\cos ax - 1)}{x}\,dx = -\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{p^2} + \tfrac{1}{4}\frac{a^4}{p^4} - \tfrac{1}{6}\frac{a^6}{p^6} + \tfrac{1}{8}\frac{a^8}{p^8}\ldots\ldots,$$

um serierum in secundis membris summas esse arc tg $\frac{a}{p}$, $-\frac{1}{2}\,log\,(1+\frac{a^2}{p^2})$ nemo nescit. Itaque, i sit

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\cos ax}{x}\,dx = -\tfrac{1}{2}\,log\,(1+\frac{a}{p}) + \int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{x},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p_\prime x}\cos ax}{x}\,dx = -\tfrac{1}{2}\,log\,(1+\frac{a^2}{p_\prime{}^2}) + \int_0^\infty \frac{e^{-p_\prime x}}{x}\,dx,$$

autem monstretur

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-p_\prime x}}{x}\,dx = log\,\frac{p_\prime}{p}$$

ad integralia proficiscimur

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin ax}{x}\,dx = arc\ tg\,\frac{a}{p}$$

$$\int_0^\infty \frac{(e^{-px} - e^{-p_\prime x})\cos ax}{x}\,dx = log\,\frac{p_\prime{}^2+a^2}{p^2+a^2}.$$

Posito $p = o$, ut per §. 4. conditiones possumus

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \text{ atque } \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos a_\prime x}{x}\,dx = log\,\frac{a_\prime}{a}$$

imus, quorum prius ab Laplacio*), cujus formula (29) statuto $p=o$ idem protulisset, primum est itum.

Sumentes postremo

$$f(x) = \left(\frac{\sin ax}{x^2} - \frac{a}{x}\right), \qquad \gamma_{2t+1} = (-1)^t \frac{a^{2t+3}}{1.2.3\ldots(2t+3)},\ \gamma_{2t} = o,$$

quapropter

$$f(x) = \left(\frac{\cos ax}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right), \qquad \gamma_{2t} = (-1)^t \frac{a^{2t+2}}{1.2.3\ldots(2t+2)},\ \gamma_{2t+1} = o,$$

tiones nobis conciliamus

$$\int_0^\infty e^{-px}\left(\frac{\sin ax}{x^2} - \frac{a}{x}\right)dx = -\frac{1}{2.3}\frac{a^3}{p^2} + \frac{1}{4.5}\frac{a^5}{p^4} - \frac{1}{6.7}\frac{a^7}{p^6}\ldots\ldots$$

Cf. Theorie analytique des probabilites pag. 99.

$$\int_0^\infty e^{-px}\left(\frac{\cos ax - 1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{1.2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{3.4}\frac{a^4}{p^3} - \frac{1}{5.6}\frac{a^6}{p^5} \ldots,$$

in quibus alterius seriei summa additione harum

$$-\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{p^2} + \tfrac{1}{4}\frac{a^4}{p^4} - \tfrac{1}{6}\frac{a^6}{p^6} \ldots\ldots = -\tfrac{1}{2}\,log\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)$$
$$-\frac{a}{p} + \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{p^3} - \tfrac{1}{5}\frac{a^5}{p^5} + \tfrac{1}{7}\frac{a^7}{p^7} \ldots\ldots = -\,arc\,tg\,\frac{a}{p}$$

alterius autem additione harum formularum

$$\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{p^2} - \tfrac{1}{4}\frac{a^4}{p^4} + \tfrac{1}{6}\frac{a^6}{p^6} \ldots\ldots = \tfrac{1}{2}\,log\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)$$
$$-\frac{a}{p} + \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{p^3} - \tfrac{1}{5}\frac{a^5}{p^5} \ldots\ldots = -\,arc\,tg\,\frac{a}{p}$$

post paucas transformationes aptas reperitur. Ideo simili ratione ut illa (46) integralia resultant

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-p_1 x}}{x^2} \sin ax\,dx = p_1\,arc\,tg\,\frac{a}{p_1} - p\,arc\,tg\,\frac{a}{p} + \frac{a}{2}\,log\,\frac{p_1^2+a^2}{p^2+a^2},$$

(47)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x^2}(\cos ax - \cos a_1 x)\,dx = a_1\,arc\,tg\,\frac{a_1}{p} - a\,arc\,tg\,\frac{a}{p} + \frac{p}{2}\,log\,\frac{p^2+a_1^2}{p^2+a^2}$$

quae pariter ac (46) Bidonius*) inter alios tractat.

Integrale paullo ante usurpatum $\int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-p_1 x}}{x}\,dx$ facile apparatur, ubi in aequatione collat

$$f(x) = \frac{e^{-px}-1}{x},\ \text{unde}\ \gamma_t = (-1)^{t+1}\cdot\frac{q^{t+1}}{1.2.3\ldots(t+1)},$$

statueris. Tum enim

$$\int_0^\infty e^{-px}\,\frac{e^{-qx}-1}{x}\,dx = -\frac{q}{p} + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{p^2} - \tfrac{1}{3}\frac{q^3}{p^3} \ldots\ldots = -\,log\left(1+\frac{q}{q}\right)$$

evadit, indeque

(48)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(p+q)x} - e^{-(p+q_1)x}}{x}\,dx = log\,\frac{p+q_1}{q+p}\ .\ Q.\ e.\ i.$$

Hoc integrale uti permulta alia, quae omnia fere in aequatione

$$\int_0^\infty e^{-px^\mu}\,x^{m\mu}\,dx = \frac{\Gamma\frac{m\mu+1}{\mu}}{\mu\,p^{\frac{m\mu+1}{\mu}}}$$

insunt, immortalis Eulerus**) in commentt. Petropolitanis divulgavit. Nam ponendo $e^{-x} = y$, in hujus formam incidimus, atque consequimur e. g. ex integrali

---

*) Mem. sur div. intgl. def. pag. 92 sqq.

**) Commentt. acad. sc. imp. Petropolitanae. Tom. XX., pag. 59 sqq.

$$\int_0^\infty x^{\frac{2m-1}{2}} \left(e^{-(p+1)x} - e^{-(p_,+1)x}\right) dx = \Gamma\frac{2m+1}{2}\left\{\frac{1}{(1+p)^{\frac{2m+1}{2}}} - \frac{1}{(1+p_,)^{\frac{2m+1}{2}}}\right\}$$

modo

$$\int_0^1 \overline{log\ y}^{\frac{2m-1}{2}} (y^p - y^{p_,})\, dx = \frac{\Gamma\frac{2m+1}{2}}{\sqrt{-1}^{2m-1}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+p})^{2m+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+p_,})^{2m+1}}\right\}$$

13. Coronidis loco ostendamus, qua ratione ex aequatione nostra (A) fundamentali integralia de-a inveniri queant, si necessariae conditioni, ut f (w) in seriem procurrat secundum ipsius w potestates ergentem, satisfactum est. Sit $n=o$, $m_{\prime}\mu = m_{\prime}\mu - 1$, $q=p$; aequatio (A) fit

$$\int_0^\infty x^{m\mu-1} e^{-px^\mu} f(e^{-px^\mu})\, dx = \sum \gamma_t \frac{\Gamma m}{\mu p^m (1+t)^m}.$$

Ex hac, ponendo

$$f(e^{-px^\mu}) = \frac{(e^{px^\mu} - 1)^{-1}}{e^{-px^\mu}}, \qquad \gamma_t = (+1)^t,$$

quare

$$f(e^{-px^\mu}) = \frac{(e^{px^\mu} + 1)^{-1}}{e^{-px^\mu}}, \qquad \gamma_t = (-1)^t,$$

scimur

$$\int_0^\infty \frac{x^{m\mu-1}}{e^{px^\mu} - 1} dx = \frac{\Gamma m}{\mu p^m}\left\{1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m\mu-1}}{e^{px^\mu} + 1} dx = \frac{\Gamma m}{\mu p^m}\left\{1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \ldots\right\},$$

ie, $\mu=1$ facto,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px} - 1} dx = \frac{\Gamma m}{p^m}\left\{1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} \ldots\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px} + 1} dx = \frac{\Gamma m}{p^m}\left\{1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} \ldots\right\}.$$

Notum tamen est, seriem harum formularum priorem summari posse ubi m est forma 2 n, ut sit

$$\frac{\Gamma 2n}{\mu p^{2n}}\left\{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\right\} = \frac{\pi^{2n} 2^{2n-1}}{\mu p^{2n}} \frac{\mathfrak{B}_n}{2n},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^{px} - 1} dx = \frac{\pi^{2n} 2^{2n-1}}{2n\, p^{2n}} \mathfrak{B}^n.$$

si $\mathfrak{B}_n$ numerum Bernoullianum n^ti gradus (qui usque ad gradum 31um in Crellii diario*) exstant) des

Eodem modo per aequationem institutam, sumtis

$$f(x) = \frac{(e^{px^\mu} - e^{-px^\mu})^{-1}}{-px^\mu}, \qquad \gamma_{2t} = (+1)^t, \gamma_{2t+1} = 0,$$

quapropter

$$f(x) = \frac{(e^{px^\mu} + e^{-px^\mu})^{-1}}{e^{-px^\mu}} \qquad \gamma_{2t} = (-1)^t, \gamma_{2t+1} = 0,$$

reperimus

$$\int_0^\infty \frac{x^{m\mu-1}}{e^{px^\mu} + e^{-px^\mu}}\, dx = \frac{\Gamma m}{\mu p^\mu}\left\{1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} \cdots\right\},$$

(52)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m\mu-1}}{e^{px^\mu} + e^{-px^\mu}}\, dx = \frac{\Gamma m}{\mu p^\mu}\left\{1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} \cdots\right\},$$

hinc

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px} - e^{-px}}\, dx = \frac{\Gamma m}{p^m}\left\{1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} \cdots\right\},$$

(53)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px} + e^{-px}}\, dx = \frac{\Gamma m}{p^m}\left\{1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} \cdots\right\}.$$

In quibus serierum summas secundum formulas

$$\frac{\Gamma 2n}{\mu p^{2n}}\left\{1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} \cdots\right\} = \frac{\pi^{2n}}{2\mu p^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2}\mathfrak{B}_n \quad \ldots\ldots\ m = 2n,$$

$$\frac{\Gamma 2n+1}{\mu p^{2n+1}}\left\{1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} \cdots\right\} = \frac{\pi^{2n+1}}{2\mu (2p)^{2n+1}} \frac{1}{1.2.3 \ldots 2n} \quad \ldots\ldots\ m = 2n+1$$

nasci non est ignotum. Integralia (**50**), (**53**) Ill. Cauchius**) ratione saepius memorata deduci

Si in his $p + q\sqrt{-1}$ statuerimus, quod per aequationem (h) nobis licet, formulas

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{(p+q\sqrt{-1})x} \pm 1}\, dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(e^{px}\cos qx \pm 1) + \sqrt{-1}\, e^{px}\sin qx}\, dx = \frac{\Gamma m}{(p+q\sqrt{-1})^m}\left\{1 \mp \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \mp \right.$$

(54)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{p+q\sqrt{-1})x} \pm e^{-(p+q\sqrt{-1})x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(e^{px} \pm e^{-px})\cos qx + \sqrt{-1}(e^{px} \mp e^{-px})\sin qx}$$

$$= \frac{\Gamma m}{(p+q\sqrt{-1})^m}\left\{1 \mp \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} \mp \right.$$

accipiemus. Ex quarum altera obtinebimus, multiplicando per $(e^{px}\cos qx \pm 1) - \sqrt{-1}\, e^{px}$ sinistri membri numeratorem denominatoremque et $(p + q\sqrt{-1}))^{-m}$ ratione notissima resolvend

*) Tom XX., pag. 11 sq.

1) Mem. pres. a l'inst. Tom. I., pag. 736. sqq.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}(e^{px}\cos qx \pm 1)}{1 \pm 2e^{px}\cos qx + e^{2px}\cos 2qx}\,dx = \frac{\cos(arc\,tg\frac{q}{p})\Gamma m}{(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}}\left\{1 \mp \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \mp \frac{1}{4^m}\cdots\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{px}\sin qx}{1 \pm 2e^{px}\cos qx + e^{2px}\cos 2qx}\,dx = \frac{\sin(arc\,tg\frac{q}{p})\Gamma m}{(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}}\left\{1 \mp \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \mp \frac{1}{4^m}\cdots\right\},$$

reali composito reali, imaginario cum imaginario. Neque dissimili via ex altera aequationum integralia haec

$$\int_0^\infty x^{m-1}\frac{(e^{px} \pm e^{-px})\cos qx}{e^{2px} \pm 2\cos 2qx + e^{-2px}}\,dx = \frac{\cos(arc\,tg\frac{q}{p})\Gamma m}{(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}}\left\{1 \mp \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} \mp \frac{1}{7^m}\cdots\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\frac{(e^{px} \mp e^{-px})\sin qx}{e^{2px} \pm 2\cos 2qx + e^{-2px}}\,dx = \frac{\sin(arc\,tg\frac{q}{p})\Gamma m}{(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}}\left\{1 \mp \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} \mp \frac{1}{7^m}\cdots\right\}$$

tur.

14. Ad formulas integrales allatas **(50)**, **(53)** facili negotio reducuntur illae, quae ex aequationibus (σ), si $u = e^{-px}$ in iis feceris, prodeunt. Haec autem substitutio nobis est concessa, quia conditioni, inter limites -1 et $+1$ sita sit, omnibus positivis valoribus x exsistentibus, satisfaciat. Ponentes in aequationibus (ν) $m = e^{-px}$, ex eis per integralia **(50)** haec

$$\int_0^\infty x^{m-1}\frac{e^{px}\cos bx - 1}{e^{2px} - 2e^{px}\cos bx + 1}\,dx = \frac{(p-b\sqrt{-1})^{-m} + (p+b\sqrt{-1})^{-m}}{2}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px}-1}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\frac{e^{px}\sin bx}{e^{2px} - 2e^{px}\cos bx + 1}\,dx = \frac{(p-b\sqrt{-1})^{-m} - (p+b\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px}-1}\,dx$$

cimus, adhibentes formulas **(I)**, sive eadem transformatione uti in formulis **(I)**

$$\int_0^\infty x^{m-1}\frac{e^{px}\cos bx - 1}{e^{2px} - 2e^{px}\cos bx + 1}\,dw = \frac{\cos(marc\,tg\frac{b}{p})}{(p^2+b^2)^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px}-1}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\frac{e^{px}\sin bx}{e^{2px} - 2e^{px}\cos bx + 1}\,dx = \frac{\sin(m\,arc\,tg\frac{b}{p})}{(p^2+b^2)^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{e^{px}-1}\,dx$$

Ex seriebus littera (σ) insignitis per eandem substitutionem e^{-px} pro u

$$\int_0^\infty x^{m-1}\left(\tfrac{1}{2}log\,(1+2e^{-px}\cos bx + e^{2px})\right)dx = \frac{(p-b\sqrt{-1})^{-m} + (p+b\sqrt{-1})^{-m}}{2m}\int_0^\infty \frac{x^m}{e^{px}-1}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,arc\,tg\frac{e^{-px}\sin bx}{1+e^{-px}\cos bx}\,dx = \frac{(p-b\sqrt{-1})^{-m} - (p+b\sqrt{-1})^{-m}}{2m\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{x^m}{e^{px}-1}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\left(\tfrac{1}{2}(log\,1+2e^{-px}\cos bx + e^{-2px})\right)dx = \frac{\cos(m\,arc\,tg\frac{b}{p})}{m(p^2+b^2)^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty \frac{x^m}{e^{px}-1}\,dx$$

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,arc\,tg\frac{e^{-px}\sin bx}{1+e^{-px}\cos bx}\,dx = \frac{\sin(m\,arc\,tg\frac{b}{p})}{m(p^2+b^2)^{\frac{m}{2}}}\int_0^\infty \frac{x^m}{e^{px}-1}\,dx$$

s.

In his, quae exposuimus, omnia fere limitibus o et ∞ finita integralia, quae sunt gravissima, i
Illorum limitibus o et $\frac{\pi}{2}$ vel $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ terminatorum multa ex iis facile derivari queunt
aequationes (C), (D) et substitutionem ineunte commentatione indicatam. Id quod etiam, et in non
quidem casibus faciliore modo, effici potest, si aequationes (C), (D) in Euleri formam transmut
i. e. per limites o et 1 finimus atque tum sin x sive cos x loco x substituimus. Quod quidem ali
reservo.

V i t a.

ıtus sum ego *Gustavus Adolphus Koepp* Brunsvigae die septimo m. Februarii a. MDCCCXIX. am litterariam institutionem in Gymnasio Brunsvicensi accepi, directore Hartvigio, qui eximia sua ıdi facultate animum studiorum altiorum faciens cupidiorem, me rudimentis litterarum antiquarum t. Per annos sex in Gymnasio eruditus in Collegium Carolinum Brunsvicense discessi, quod per quatuor frequentavi. Cujus director classis technicae Uhdius, praeceptor meus meritissimus cui c loco gratias maximas ago, nec unquam non habebo, in mathesis sublimioris disciplinas me induxit. en, mechanicen, technologiam, geometriam descriptivam et practicam, ut vocant, physicen, chemiam perimentalem et technicam, mineralogiam, a professoribus Schneidero, Schleitero, Ottone, xio, Sillemio didici, quibus hic animo laetissimo gratias summas ago. Item scholas de linguis ioribus, architectura, arte delineandi, archaeologiae principiis adii.

Dimissus ab Collegio in Universitatem Monacensem migravi. Hic Thierschius, vir excellen- ıs humanissimusque, collegio de archaeologia, cujus numquam obliviscar, in hac civitate, ubi nostris ribus sine dubio ars, Germanica illa in Graeca nixa, efflorescit quam maxime, effecit, ut sentirem, it ars vera, quid pulchritudo Graeca. Ex alma Monacensi Academia in Berolinensem transgressus, ium Academicum absolvi. Ubi analysis subtilitates Dirichletus, nec minus synthesis vim ıerus me ita docuerunt, ut nec in analysi, neque in synthesi, sed in ambabus, non associatis illis ı, sed in se invicem penetrantibus verum commodum inesse mihi persuaserim. Inprimis autem us, cujus insigni comitate impense gaudeo, physica, Enckius astronomia me instituit, ut aeque mentorum ac mathesis pretium rebus in physicis cognoverim. Praeterea Ermanii physicas, i chemicas praelectiones magna cum voluptate frequentavi, et philosophiam historiamque per omne re, ut potui, addidici celeberrimis praeceptoribus Henningio, Trendelnburgio, Rankio. Gerhardi exercitationibus archaeologicis adfui.

Theses.

Methodum analyticam et syntheticam idealiter nihil differre.

Theorematis Fourieriani demonstrationes vulgares non omnino satisfacere.

Mathesin eliciendi non tradendi ratione esse docendam.

Mathesis physicae axiomata leges physicas esse.

Omnibus in rebus physicis hypothesin necessariam esse.

Leges physicas non satis nisi per experimenta declarari.

Pythagorae sententiarum oppositarum decimam probe ex sensu perspici.

Hor. Sat. II, **2**, **29**. bene verbis non mutatis explicari posse.

Hor. Carm. III, **5**, 8. conjectura non indigere.

Corrigenda.

Pag.	2	lin.	2	lege: $\int p^{\frac{m\mu-l\mu+1}{\mu}}$
„	ib.	„	19	„ $\Gamma(m-l+p)$
„	3	„	16 et 18	„ $\Gamma(m+t+1)$
„	5	„	7	„ $(1+\frac{a}{p}\sqrt{-1})^{-m}$
„	ib.	„	18 fin.	„ $\sqrt{-1})^{\pm u}$
„	7	„	1	„ $m\mu+n\mu+1$ exponens. μ
„	ib.	„	7	est
„	11	„	11	lege: 2^{2l}
„	15	„	11	„ $\Gamma(1-\frac{m}{n})$
„	20	„	9 fin.	„ (σ)

Die auf elementarem Wege entwickelte Theorie der Maxima und Minima.

von Gustav Kondor.

I. Abschnitt.

§. 1.

Begriff der veränderlichen Grössen und der Funktionen im allgemeinen.

Aus der Theorie der Gleichungen ist bekannt, dass man aus gegebenen und vollkommen von einander unabhängigen Gleichungen stets eben so viele Unbekannte bestimmen kann, als Gleichungen vorhanden sind. Ist aber die Anzahl der Unbekannten grösser als die Anzahl der gegebenen Gleichungen, so bleiben einige von den Unbekannten unbestimmt (oder man kann für dieselben willkührliche reelle Werte setzen); diese nennt man dann die Veränderlichen (Variablen), welche abhängig oder unabhängig sind, je nachdem sie beliebige reelle Werte annehmen können oder nicht. Die letzteren werden sodann die Funktionen der ersteren genannt. Es seien beispielsweise zwei Veränderliche x und y gegeben, zwischen welchen eine einzige Gleichung besteht, und wird x willkührlich angenommen, so entspricht diesem willkührlichen reellen Werte von x immer ein bestimmter reeller Wert von y. In diesem Falle heisst x die unabhängige und y die abhängige Veränderliche, oder eine Funktion von x, und man bedient sich der symbolischen Bezeichnung: $y = f(x)$ oder $y = F(x)$ u. s. w.

Befindet sich die abhängige Veränderliche auf der einen und die unabhängige Veränderliche auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens, so wird die Funktion entwickelt (explicit) genannt, wie $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ u. s. w.; befinden sich hingegen alle Grössen auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, so wird die Funktion unentwickelt (implicit) genannt, wie:

$$f(x, y) = o, \; F(x, y) = o, \text{ u. s. w.}$$

§. 2.

Begriff der Maxima und Minima der Funktionen.

Hat man eine reelle Funktion von einer Veränderlichen

$$y = f(x)$$

und kann diese für jedes Increment oder Decrement ihrer Veränderlichen nicht grösser werden, als eine gewisse Grösse, so heisst diese das Maximum der Funktion; kann hingegen die Funktion für jeden möglichen reellen Wert der Veränderlichen nicht kleiner werden, als eine gewisse Grösse, so heisst dann diese das Minimum der Funktion. Wächst die Funktion mit der Veränderlichen x von 0 bis $+\infty$, oder von $-\infty$ bis $+\infty$, so hat dieselbe weder ein Maximum noch ein Minimum.

Ist z. B. die Funktion $y = \alpha - (\beta - x)^2$

gegeben, so erkennt man leicht, dass dieselbe für $x = \beta$ ein Maximum wird; hingegen wird die Funktion $y = \alpha + (\beta - x)^2$

für $x = \alpha$ ein Minimum, und die Funktion

$$y = p\,x^2$$

hat für jeden möglichen reellen Wert von x weder ein Maximum noch ein Minimum.

§. 3.

Die Bestimmung der Maximums und Minimums der Funktionen mit Hülfe der Theorie der quadratischen Gleichungen.

Ist die reelle Funktion

$$y = f(x) \qquad (1)$$

in Bezug auf x quadratisch, so wird ihr Maximum oder Minimum gefunden, wenn man dieselbe nach x auflöst und dann an der Form der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Grösse beurtheilt, ob dieselbe ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden habe. In den beiden ersten Fällen setzt man die Grösse unter dem Wurzelzeichen gleich Null und bestimmt daraus den grössten oder kleinsten Wert der Funktion.

Denn mag die Funktion was immer für eine Form haben, wenn sie nur nach x quadratisch ist, so wird dieselbe, nach x aufgelöst, im allgemeinen die Gestallt

$$x = \varphi\ (y) \qquad (2)$$

erhalten, in welcher der Wert der Quadratwurzelgrösse so bestimmt werden muss, dass die Veränderliche x stets reell bleibe und die Funktion (1) zugleich entweder ein Maximum oder ein Minimum werde. Dies wird dadurch erreicht, indem man die Veränderliche y so lange zu- oder abnehmen lässt, bis die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet. Aus dieser auf Null reducirten Bedingungsgleichung wird dann der grösste und kleinste Wert der Funktion (1) bestimmt. Alsdann folgt aus (2) der diesem grössten oder kleinsten Werte entsprechende Wert der unabh. Veränd. x.

Nimmt hingegen die Quadratwurzel-Grösse ohne Ende zu oder ab, so hat die Funktion (1) weder ein Maximum noch ein Minimum.

§. 4.

Zur näheren Erläuterung dieses Verfahrens sollen folgende Aufgaben und Beispiele dienen.

1. Aufgabe. *Die gegebene Zahl $2n$ in zwei solche Theile zu theilen, dass deren Produkt ein Maximum sei.*

Auflösung. Ist der eine Theil $= x$, so ist der andere Theil $= (2n - x)$, und ihr Product

$$y = x.(2n - x).$$

Giebt man der unabhängigen Veränderlichen x verschiedene Werte, so erhält die Funktion auch verschiedene Werte, und es kommt nur darauf an, der Veränd. x einen solchen Wert beizulegen, welcher dieses Produkt oder diese Funktion zu einem Maximum macht.

Um dies zu erreichen, löst man dieselbe nach x auf, und man erhält

$$x = n \pm \sqrt{n^2 - y}$$

Soll die Aufgabe möglich sein, d. h. soll x also auch

$$\sqrt{n^2 - y}$$

reell bleiben, so kann y höchstens gleich n^2 sein; setzt man daher

$$n^2 - y = 0$$

so ist:

$$y = n^2$$

das Maximum der vorgelegten Funktion. Nach dieser Annahme ist aber

$$x = n$$

und $2n - x = 2n - n = n$

d. h. die gegebene Zahl muss in zwei gleiche Theile getheilt werden.

2. Aufgabe. *Die gegebene Zahl $2n$ in zwei solche Theile zu theilen, dass die Summe der Quadratwurzeln aus denselben ein Maximum sei.*

Auflösung. Setzt man den einen Theil $= x$, so ist der andere Theil $= (2n - x)$, und die Summe ihrer Quadratwurzeln aus denselben

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{2n - x}$$

Der Wert der Veränderlichen x muss so bestimmt werden, dass derselbe reell sei und die Funktion zugleich ein Maximum werde. Zu diesem Behufe wird die gegebene Funktion nach x entwickelt, aus der entwickelten Form dann beurtheilt, welche Werte die Bedingungen der Aufgabe zugleich erfüllen.

Aus der gegebenen Funktion folgt

$$x = \frac{2n \pm y\sqrt{4n - y^2}}{2}$$

woraus man leicht erkennen kann, dass

$$4n - y^2 = 0$$

und folglich $y = 2\sqrt{n}$

das Maximum der Funktion ist, dann ist aber

$$x = n$$

und $2n - x = 2n - n = n$

sind daher die Theile einander gleich, so wird die gegebene Funktion ein Maximum.

3. Aufgabe. *Die kleinste Summe zu bestimmen, welche entstehet, wenn man die gegebene Zahl $2n$ in zwei Theile theilt, diese quadrirt und die Quadrate addirt.*

Auflösung. Nimmt man den einen Theil $= x$ an, so ist der andere $= (2n - x)$ und die Summe ihrer Quadrate

$$y = x^2 + (2n - x)^2.$$

Zur Bestimmung des Minimums dieser Funktion, löst man dieselbe nach x auf, und man bekommt

$$x = \frac{2n \pm \sqrt{2}.\sqrt{y - 2n^2}}{2}$$

Da x reell und y den kleinsten Wert erhalten soll, so muss offenbar

$$y - 2n^2 = 0$$

angenommen werden, daraus folgt dann

$$y = 2n^2$$

das Minimum der gegebenen Funktion, und dann ist

$$x = n$$

und $2n - x = 2n - n = n$

Es müssen daher die Theile einander gleich gemacht werden, damit die Summe ihrer Quadrate ein Minimum werde.

4. Aufgabe. *Die gegebene Zahl $2n$ in zwei solche Theile zu theilen, dass die Summe der Quotienten, welche man erhält, wenn man die beiden Theile durch einander dividirt, ein Minimum sei.*

Auflösung. Wird der eine Theil mit x bezeichnet, so ist der andere $= (2n - x)$, und die verlangte Funktion:

$$y = \frac{x}{2n - x} + \frac{2n - x}{x}$$

Daraus folgt $x = n \pm n\sqrt{\frac{y - 2}{y + 2}}$

Soll x reell bleiben und die gegebene Funktion zugleich ein Minimum werden, so muss

$$\frac{y - 2}{y + 2} = 0$$

oder $y - 2 = 0$

gesetzt werden, und man erhält

$$y = 2$$

als Minimum der Funktion, folglich

$$x = n$$

und $2n - x = 2n - n = n$

es müssen daher die beiden Theile der gegebenen Zahl einander gleich sein, damit die gegebene Funktion ein Minimum werde.

§. 5.

1. Beispiel. *Es soll untersucht werden, für welchen Wert von* x *die Funktion:*

$$y = \frac{(x+m)(x-n)}{x^2}$$

einen grössten Wert erhält.

Aus der gegebenen Funktion erhält man:

$$x = \frac{-(m-n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4mny}}{2(1-y)}$$

und wenn man die Grösse unter dem Wurzelzeichen dem entsprechenden Verfahren gemäss gleich Null setzt:

$$(m+n)^2 - 4mny = 0$$

so folgt daraus:

$$y = \frac{(m+n)^2}{4mn}$$

das Maximum der Funktion für den Wert der unabhängigen Veränd. x:

$$x = \frac{2mn}{(m-n)}$$

2. Beispiel. *Den Wert von* x *anzugeben, für welchen die Funktion:*

$$y = (\alpha_1 - x)^2 + (\alpha_2 - x)^2 + \ldots + (\alpha_n - x)^2$$

ein Minimum wird.

Man findet aus dieser Funktion:

$$x = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \pm \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^2 - n(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2) + ny}}{n}$$

und setzt man:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^2 - n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2) + ny = 0$$

so erhält man

$$y = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2) - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^2}{n}$$

das Minimum der Funktion, wodurch:

$$x = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$$

wird.

Wenn man daher den Wert einer unbekannten Grösse x durch n gleich gute astronomische oder physikalische Beobachtungen, oder durch n gleich gute unmittelbare Messungen zu bestimmen sucht, und statt der wahren und gesuchten Grösse x der Reihe nach die fehlerhaften α_1 α_2 ... a_n findet, weil diese wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht völlig zusammen fallen können; so muss man, unter der Voraussetzung, dass sämmtlichen Beobachtungen oder Messungen gleiche Zuverlässigkeit zuzuschreiben sei, daraus das arithmetische Mittel nehmen, wenn zufolge der Methode der kleinsten Quadratsummen, die Summe der Quadrate der Fehler:

$$(\alpha_1 - x), (\alpha_2 - x), \ldots (\alpha_n - x)$$

ein Minimum, und folglich der aus diesen Beobachtungen oder Messungen für x gefundene Wert der wahrscheinlichste sein soll.

3. Beispiel. *Die Werte von* x *zu finden, für welche die Funktion:*

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Aus dieser Funktion entspringt:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

und setzt man: $1 - 4y^2 = 0$
so ist: $y = \pm \frac{1}{2}$
und folglich: $x = \pm 1$
Es wird also für $x = +1$
die Funktion $y = +\frac{1}{2}$
ein Maximum, und für $x = -1$
$y = -\frac{1}{2}$ ein Minimum.

Diese Funktion hat daher sowohl einen grössten als auch einen kleinsten Wert.

4. Beispiel. *Aus dem Ausdrucke:*

$$y = \frac{4x^2 + 4x - 3}{6(2x + 1)}$$

hat man:

$$x = \frac{(3y - 1) \pm \sqrt{9y^2 + 4}}{2}$$

x bleibt reell für jeden reellen Wert von y, folglich hat diese Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum.

§. 6.

Es war die Bestimmung des Maximums und des Minimums der Funktionen in den vorhergehenden Aufgaben und Beispielen nicht schwer, da die Funktionen unter dem Wurzelzeichen entweder nur in der ersten oder bloss in der zweiten Potenz, mit constanten Coefficienten verbunden, vorkamen. Schwieriger wird aber die Bestimmung des Max. und des Min. der Funktionen in dem Falle, wenn dieselben unter dem Wurzelzeichen nicht nur in der ersten, sondern auch noch in der zweiten Potenz, mit constanten Coefficienten verbunden, vorkommen, wozu dann die genaue Kentniss des Trinoms des zweiten Grades von der Form:

$$my^2 + ny + p$$

unumgänglich nothwendig ist.

§. 7.

Die Eigenschaften der Trinome des zweiten Grades von der Form: $my^2 + ny + p$.

Setzt man das Trinom des zweiten Grades:

$$my^2 + ny + p$$

gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$my^2 + ny + p = 0$$

Daraus folgt:

$$y = -\frac{n}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{n^2 - 4mp}$$

und man kann in Bezug auf die gefundenen Werte von y folgende drei Hauptvoraussetzungen annehmen:

1) $n^2 - 4mp > 0$
2) $n^2 - 4mp = 0$
3) $n^2 - 4mp < 0$

In ersten Falle sind die beiden Wurzeln von y reell und ungleich, im zweiten reell und gleich, im dritten sind sie imaginär.

I. Findet die erste Bedingung statt: d. h. sind die beiden Wurzeln reell und ungleich, so liefert jede, zwischen den beiden Wurzeln liegende, für y in das Trinom substituirte, reelle Grösse nothwendig ein Resultat, welches mit

dem Coefficienten m das entgegengesetzte Vorzeichen hat; hingegen giebt jede, nicht zwischen den beiden Wurzeln liegende, und für y substituirte, reelle Grösse ein Resultat, welches mit dem Coefficienten m dasselbe Vorzeichen hat.

II. Findet aber die zweite Bedingung statt, d. i. sind die beiden Wurzeln reell und gleich, so giebt jede, für y in das Trinom gesetzte, reelle Grösse (die von den Wurzeln verschieden ist) ein Resultat, welches mit dem Coefficienten m dasselbe Vorzeichen hat.

III. Wenn endlich die beiden Wurzeln imaginär sind, so liefert eine jede, für y in das Trinom gesetzte, reelle Grösse ein Resultat, welches mit dem Coefficienten m dasselbe Vorzeichen hat.

§. 8.

Es soll nun gezeigt werden, wie diese Eigenschaften der Trinome bei der Bestimmung der Maxima und Minima der Funktionen angewendet werden können.

1. Beispiel. *Die Werte von* x *zu bestimmen, für welche die Funktion:*

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Man findet aus dieser Funktion:

$$x = \frac{-(y+1) \pm \sqrt{5y^2 + 2y - 3}}{2(y-1)}$$

und setzt man:

$$5y^2 + 2y - 3 = 0$$

so ist:

$$y_1 = +\tfrac{3}{5} \text{ und } y_2 = -1$$

und folglich:

$$x_1 = +2 \text{ und } x_2 = 0$$

Nachdem die beiden Werte von y reell sind, so folgt aus der ersten Eigenschaft der Trinome, dass der Wert des Trinoms:

$$5y^2 + 2y - 3$$

negativ wird, wenn man in dasselbe für y zwischen $+\frac{3}{5}$ und -1 liegende Werte setzt, weil der Coefficient von y^2 positiv ist; hingegen wird dasselbe positiv, wenn man in dasselbe für y die nicht zwischen $+\frac{3}{5}$ und -1 liegende Werte setzt. Daraus folgt nun, dass

$$y_1 = +\tfrac{3}{5}$$

das Minimum der Funktion ist für $x_1 = +2$; hingegen

$$y_2 = -1$$

das Maximum für

$$x_2 = 0$$

Dies scheint zwar unrichtig zu sein, durch unmittelbare Substitution kann man sich aber von der Richtigkeit der Sache leicht überzeugen.

2. Beispiel. *Die Fälle zu finden, in welchen die Funktion:*

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$$

einen grössten oder kleinsten Wert hat.

Aus dieser Funktion ergiebt sich:

$$x = \frac{-5(y+1) \pm \sqrt{9y^2 + 82y + 9}}{2(y-1)}$$

Soll x reell bleiben und die Funktion dabei einen grössten oder kleinsten Wert erhalten, so muss nach dem angeführten Verfahren:

$$9\,y^2 + 8\,2\,y + 9 = 0$$

gesetzt werden, woraus:

$$y_1 = -\,1/9 \text{ und } y_2 = -\,9$$

folgt, und dann sind die Werte für x:

$$x_1 = +\,2 \text{ und } x_2 = -\,2$$

Da die beiden Wurzeln reell und ungleich sind, so wird nach der ersten Eigenschaft der Trinome das Trinom:

$$9\,y^2 + 8\,2\,y + 9$$

ein negatives Resultat erhalten, wenn man in dasselbe für y zwischen $-\,1/9$ und $-\,9$ liegende Werte setzt, weil der Coefficient von y^2 positiv ist; dagegen erhält dasselbe ein positives Resultat, wenn man in dasselbe für y Werte setzt, die nicht zwischen $-\,1/9$ und $-\,9$ liegen. Daraus ergiebt sich:

$$y_1 = -\,1/9$$

das Minimum der Funktion für

$$x_1 = +\,2, \text{ und } y_2 = -\,9$$

das Maximum derselben für $x_2 = -\,2$.

3. Beispiel. *Es ist die Funktion*:

$$y = \frac{(x+9)\,(x+4)}{x}$$

gegeben; man soll bestimmen, in welchen Fällen sie ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Nach x entwickelt, erhält man:

$$x = \frac{-\,(13 - y) \pm \sqrt{y^2 - 2\,6\,y + 25}}{2}$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, dass x so lange reell bleibt bis

$$y^2 - 26y + 25$$

grösser als Null oder wenigstens gleich Null ist; setzt man also

$$y^2 - 26y + 25 = 0$$

so folgt daraus:

$$y_1 = +\,25 \text{ und } y_2 = +\,1$$

das Minimum und das Maximum der Funktion.

Denn setzt man in das Trinom:

$$y^2 - 26\,y + 25$$

solche Werte, welche zwischen 25 und + 1, oder welche nicht zwischen 25 und + 1 liegen, so wird dasselbe im ersteren Falle ein negatives, und im letzteren Falle ein positives Resultat geben, weil die beiden Wurzeln reell und ungleich sind, und der Coefficient von y^2 positiv ist.

Es wird daher die Funktion für $x_1 = +\,6$
$y_1 = +\,25$ ein Minimum und für
$x_2 = -\,6$
$y_2 = +\,1$ ein Maximum.

4. Beispiel. *Es sei die Funktion*: $y = \dfrac{x^2 - 2\,x}{2x - 4}$

gegeben; man soll die Fälle finden, in welchen dieselbe ein Grösstes oder ein Kleinstes wird.

Es folgt aus dieser Funktion:

$$x = (1 + y) \pm \sqrt{y^2 - 2\,y + 1}$$

und setzt man nach dem angegebenen Verfahren:

$$y^2 - 2\,y + 1 = 0$$

so folgt: $y_1 = +\,1$ und $y_2 = +\,1$

die beiden Wurzeln sind also reell und gleich, und es giebt nach der zweiten Eigenschaft der Trinome das Trinom:

$$y^2 - 2y + 1$$

für jeden reellen Wert von y (welcher von den Wurzeln verschieden ist) ein Resultat, welches mit den Coefficienten von y dasselbe Vorzeichen hat; nun ist aber der Coefficient von y^2 positiv, so wird auch das Trinom positiv, und folglich hat die gegebene Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum.

5. Beispiel. *Es soll untersucht werden, für welche Werte von* x *die Funktion*:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 5}{2x + 3}$$

einen grössten oder kleinsten Wert erhält.

Zu diesem Behufe löst man diese Funktion nach x auf, und findet:

$$x = -(1 - y) \pm \sqrt{y^2 + y + 6}$$

Für reelle Werte von x muss das Trinom unter dem Wurzelzeichen positiv, oder wenigstens gleich Null sein, nimmt man

$$y^2 + y + 6 = 0$$

an, so ergeben sich daraus: $$y = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2}$$

zwei imaginäre Wurzeln, zum Beweise, dass die vorgelegte Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Denn nach der dritten Eigenschaft der Trinome liefert eine jede, für y in das Trinom $$y^2 + y + 6$$

substituirte, reelle Grösse ein Resultat, welches mit dem Coefficienten von y^2 dasselbe Vorzeichen hat; nun ist aber der Coefficient von y^2 positiv, so wird das Trinom $y^2 + y + 6$ für jede reelle Grösse von y positiv, und folglich kann die gegebene Funktion weder einen grössten noch einen kleinsten Wert erlangen.

II Abschnitt.

§. 9.

Von Maximum und Minimum der Entfernungen.

Die Bestimmung der Maxima und Minima der Funktionen ist im allgemeinen ein Gegenstand der höheren Analysis und insbesondere der Variationsrechnung; doch giebt es Funktionen, deren Maxima und Minima mit Hülfe der Elementar-Geometrie meistens auf eine einfache Weise bestimmt werden können.

Gleich am Anfange der Planimetrie findet man eine Menge Lehrsätze, welche zur Lehre der Maxima und Minima gehören; solche sind unter anderen:

1. „Unter allen geraden Linien, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden können, ist das Perpendikel die kürzeste.“

2. „Die Gerade ist die kürzeste unter allen Linien, welche zwischen zwei Punkten in derselben Ebene gezogen werden können. Sie ist daher auch die Entfernung oder Abstand der beiden Punkte.“

3. „Die kürzeste Linie, die man zwischen zwei Parallelen von der einen bis zur anderen ziehen kann, ist die auf beiden Parallelen senkrechte Gerade.“

4. „Die grösste Sehne eines Kreises ist der Durchmesser.“

5. „Unter allen Geraden, welche von einem ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte zum konvexen Theile des Kreises gezogen werden können, ist diejenige die kürzeste, deren Verlängerung durch das Centrum des Kreises geht.“

6. „Unter allen Sekanten, die von einem ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte zum konkaven Theile des Kreises gezogen werden können, ist diejenige die grösste, welche durch das Centrum geht.“

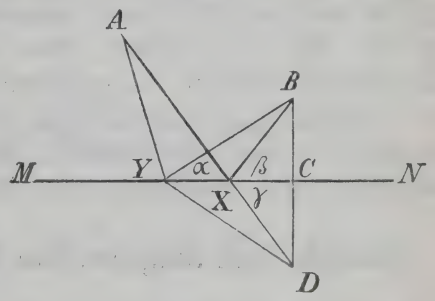
7. „Unter allen Sehnen, welche durch einen innerhalb des Kreises liegenden Punkt gezogen werden können, ist diejenige die kürzeste, welche auf den durch diesen Punkt gehenden Durchmesser senkrecht steht.“

§. 10.

Lehrsatz. *Unter allen geraden Linien, welche von zwei gegebenen Punkten ausserhalb einer gegebenen geraden Linie nach einem und demselben Punkte derselben gezogen werden können, ist die Summe derjenigen am kleinsten, welche mit der gegebenen Geraden im Vereinigungspunkte gleiche Winkel bilden.*

Beweis. Ist MN die gegebene Gerade, sind dann A und B die gegebenen Punkte und X der gesuchte Punkt, und ist $\alpha = \beta$, so ist $AX + XB < AY + YB$. Um dies zu beweisen, fälle man aus B auf die Gerade MN ein Perpendikel und verlängere die Gerade AX, bis dieselbe mit dem verlängerten Perpendikel in Punkte D zusammentrifft; so ist: $\triangle BCX \cong \triangle CDX$, denn es ist $\gamma = \beta$ $CX = CX$, folglich ist: $BC = CD$ und $BX = XD$, und man hat:

$$AX + XB = AD$$



Ferner ist $\triangle BCY \cong \triangle CDY$, weil $BC = CD$ und $CY = CY$, folglich ist $BY = DY$ und man hat:

$$AY + YB = AY + YD$$

und da: $$AD < AY + YD,$$

so ist auch: $$AX + XB < AY + YB$$

Es ist also $(AX + XB)$ ein Minimum.

Zusatz 1. Je weiter der Punkt Y nach der einen oder nach der anderen Seite hin vom Punkte X absteht, um so grösser ist die Summe der Entfernungen und um so grösser zugleich der Unterschied der Neigungswinkel.

Zusatz 2. Nimmt man anstatt der Geraden MN einen Kreis an, so kann man auf ähnliche Weise beweisen, dass unter allen Geraden, welche von zwei ausserhalb des Kreises gelegenen Punkten zu demselben Punkte der Peripherie gezogen werden können, die Summe derjenigen am kleinsten sei, welche mit der Tangente also auch mit dem Radius im Vereinigungspunkte gleiche Winkel bilden; hingegen ist diejenige Summe unter allen Sekanten, welche in demselben Punkte der Peripherie zusammen kommen, am grössten, die mit der Tangente, folglich auch mit dem Radius gleiche Peripherie Winkel machen.

Anmerkung 1) Da das Licht, wenn es von A ausgeht und mittelst des ebenen Spiegels MN nach B zurückgeworfen wird, in der That dem Gesetze gehorcht, dass der einfallende Strahl AX und der zurückgeworfene XB mit MN gleiche Winkel bilden, d. i. dass der Einfalls-Winkel gleich ist dem Reflexions-Winkel: so folgt daraus, dass das Licht auf dem kürzesten Wege, der bei dieser Reflexion möglich ist, von A nach B gelangt, und dass daher das Licht bei dem genannten Übergang auch die kürzeste Zeit gebrauche. Aus dieser Ursache hat man umgekehrt aus dem Satze der kleinsten Wirkung oder der grössten Sparsamkeit, nach welchem bei allen Naturwirkungen der geringste Aufwand an Kraft und Mitteln Statt findet, auch auf die Gesetze der Brechung und Zurückwerfung des Lichtes geschlossen.

2) Man leitete die Gesetze der Reflexion und der Strahlenbrechnung aus der Hypothesis her, dass das Licht von einem Punkte zum anderen auf dem leichtesten Wege gehe. Man muss aber darunter nicht immer den kürzesten Weg verstehen, weil derselbe auch ein Maximum sein kann; denn ist beispielsweise der Spiegel hohl, so ist der Weg, den das Licht hier nimmt, ein Maximum und nicht ein Minimum. Es muss jedoch immer nur eines von beiden stattfinden, so, dass überhaupt auch hier wieder, wie es der Weisheit und Volkommenheit des Schöpfers angemessen ist, die grösste Ordnung herrscht.

§. 11.

Aufgabe. *In einem Dreiecke* $\triangle$ ABC *einen Punkt* X *zu finden, welcher die Eigenschaft hat, dass, wenn man denselben mit den Eckpunkten des Dreiecks durch gerade Linien verbindet, die Summe der drei Linien* (XA + XB + XC) *ein Minimum sei.*

Auflösung. Soll die Summe $(XA + XB + XC)$ ein Minimum werden, so muss, wenn man eine von diesen Entfernungen als bekannt betrachtet, die Summe der beiden anderen ein relati-

ves Minimum sein. Nun erhellet, aus dem Zusatze 2 des vorigen Paragraphes, dass die Summ der beiden Entfernungen, welche nicht als bekannt vorausgesetzt worden sind, dann ein Mini mum sein wird, wenn dieselben mit jenem gleiche Winkel bilden. Nachdem aber ganz in de Willkühr steht, welche immer von den Entfernungen als bekannt vorauszusetzen, so folgt darau dass je zwei von den drei Winkeln, welche die Geraden *XA*, *XB*, und *XC* mit einander bilde gleich sein müssen, folglich ist jeder Winkel $= \frac{4}{3} R = 120^0$.

Zusatz. 1) Ist einer der Winkel des Dreiecks $= \frac{4}{3} R$, so liegt der gesuchte Punkt in de Spitze dieses Winkels. Ist aber ein Winkel grösser als $\frac{4}{3} R$ so ist die Aufgabe unmöglich.

2) Beschreibt man über eine jede Seite des Dreiecks als Sehne einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel von $\frac{4}{3} R = 120^0$ fähig ist, so werden sich diese drei Kreisbögen in der Eben des Dreiecks in demselben Punkte durchschneiden, und dies ist der gesuchte Punkt.

3. Werden anstatt eines Dreiecks oder anstatt 3 Punkte nur 2 Punkte und eine Gerad angenommen, und man suche einen Punkt, der von den gegebenen zwei Punkten und von de gegebenen geraden Linie zusammengenommen am wenigsten entfernt ist; so findet man au gleiche Weise wie früher, dass die 3 Strecken mit einander gleiche Winkel bilden werden, un die eine Strecke auf die gegebene Gerade senkrecht stehen müsse.

Anmerkung. Soll von einem innerhalb des Dreieckes *ABC* liegenden Punkt, der nach Belieben gewähl werden kann, an die drei Punkt *A*, *B* und *C* eine Röhrenleitung geführt werden; so wird man die kleinste An zahl von Röhren benöthigen, wenn man als Vereinigungs-Punkt den oben bestimmten Punkt *X* wählt.

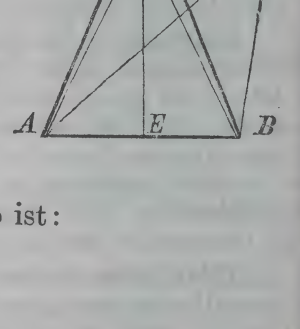
Lehrsätze und Aufgaben über Maxima und Minima des Flächen-Inhaltes und des Umfanges der ebenen Figuren.

§ 12.

Lehrsatz. *Unter allen isoperimetrischen Dreiecken von derselben Grundlinie hat das gleichschenk lige den grössten Flächen-Inhalt.*

Beweis. Es seien *ABC* und *ABD* zwei Dreiecke von gleichem Umfange, welche auf derselben Grundlinie *AB* stehen. Ersteres sei gleichschenklig, letzteres aber nicht. Da sie isoperimetrisch sind und gleiche Basis haben, so ist:

$$AC + CB = AD + DB$$



Man fälle aus der Spitze *C* auf die Basis *AB* ein Perpendikel, ziehe aus *D* zu *BA* eine Parallele, welche das Perpendikel oder ihre Verlängerung im Punkte *F* trifft; so verhält sich nach einem bekannten Satze:

$$\triangle ABC : \triangle ABD = CE : FE$$

Verbindet man die Punkte *A* und *B* mit *F* durch *AF* und *BF*, so ist:

$$\triangle ABD = \triangle ABF$$

Nun ist: $AF + FB < AD + DB$
oder $2AF < AD + DB = AC + CB = 2AC$
oder $AF < AC$
daher $EF < EC$
und folglich: $\triangle ABF = \triangle ABD < \triangle ABC$

Zusatz 1. Unter allen isoperimetrischen Dreiecken hat also das gleichseitige den grösste Flächenraum. Denn wäre *ABC* kein gleichseitiges Dreieck, und wäre beispielsweise *AB* nicht gleich *AC*, so könnte man über *BC* ein gleichschlenkliges, mit dem Dreiecke *ABC* isoperimetri sches Dreieck konstruiren, welches einen grösseren Flächeninhalt hat als das $\triangle ABC$, dessen Sei ten *AB* und *AC* ungleich sind. Daraus folgt nun, dass man nur dann kein anderes Dreieck von gleichem Umfange, und von einem grösseren Flächenraume konstruiren könne, wenn da $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Zusatz 2. Unter allen isoperimetrischen Polygonen von derselben Seitenanzahl ist das gleichseitige am grössten. Gesetzt, es hätte das ungleichseitige Polygon $ABCDE \ldots X$, in welchem die Seite $AB \gtrless BC$ ist, unter allen isoperimetrischen Polygonen, von derselben Seitenanzahl den grössten Flächenraum; so könnte man über die Diagonale AC ein gleichschenkliges $\triangle AMC$ konstruiren, welches mit dem $\triangle ABC$ gleichen Umfang hat, so dass:

$$AB + BC = AM + MC$$

sei; dann wären aber die Polygone $ABCDE \ldots X$ und $AMCDE \ldots X$ isoperimetrisch. Und da:

$$\triangle AMC > \triangle ABC$$

so wäre auch:

$$\text{Polygon } AMCDE \ldots X > \text{Pol. } ABCDE \ldots X$$

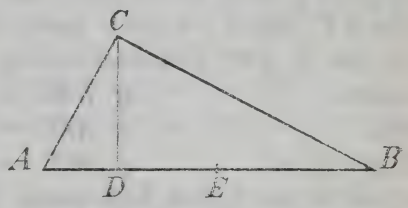
welches der Voraussetzung, dass das Pol. $ABCD \ldots X$ den grössten Flächeuraum hat, widerspricht, folglich muss $AB = BC$ sein. Auf ähnliche Weise findet man, dass auch $BC = CD = DE = \ldots$ sein muss, folglich hat das gleichseitige unter allen isoperimetrischen Polygonen von derselben Seitenanzahl den grössten Flächenraum.

13. §.

Aufgabe. *Es soll unter allen isoperimetrischen Dreiecken, welche auf* AB *als Basis konstruirt werden können, jenes gefunden werden, welches die grösste Fläche besitzt.*

Auflösung. 1. Es sei $AB = a$ die gegebene Grundlinie, so ist, da die Summe der drei Seiten bekannt ist, $AC + CB = b$ auch bekannt.

Fällt man aus der Spitze C des Dreieckes auf die Basis das Perpendikel $CD = y$, halbirt die Basis im Punkte E, und setzt $DE = x$, ferner $AC = z$; so ist:



$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\text{und} \quad CB^2 = BD^2 + CD^2$$

$$\text{oder:} \quad z^2 = (\tfrac{1}{2}a - x)^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$\text{und} \quad (b - z)^2 = (\tfrac{1}{2}a + x)^2 + y^2 \qquad (2)$$

Zieht man die Gleichung (1) von (2) ab, so erhält man:

$$(b - z)^2 - z^2 = (\tfrac{1}{2}a + x)^2 - (\tfrac{1}{2}a - x)^2$$

$$\text{oder} \quad 2bz = b^2 - 2ax$$

$$\text{daraus folgt:} \quad z = \frac{b}{2} - \frac{ax}{b}$$

setzt man diesen Wert von z in (1), so bekommt man:

$$y^2 = \left(\frac{b}{2} - \frac{ax}{b}\right)^2 - (\tfrac{1}{2}a - x)^2$$

$$\text{oder:} \quad y^2 = \frac{(b^2 - a^2)}{b^2}\left[\frac{1}{4}b^2 - x^2\right]$$

Dieser Ausdruck wird offenbar für $x = 0$

$$y^2 = \frac{b^2 - a^2}{4}$$

ein Maximum. Dann ist aber $z = \dfrac{b}{2} = AC$

$$\text{und folglich} \quad CB = \frac{b}{2}$$

d. i. das gesuchte Dreieck muss daher ein gleichschenkliges sein.

Auflösung 2. Es sei die gegebene Seite $AB = a$, der Perimeter $= 2s$, die zweite Seite $= x$, so ist die dritte Seite $= (2s - a - x)$, dann die Fläche des Dreieckes $= y$, so ist nach einer bekannten Formel:

$$y = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-x)\,(a+x-s)}$$

Löst man diese Formel nach x auf, so ergiebt sich:

$$x = -\frac{(a-2s)}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-2s)^2\, s\,(s-a) - 4\,s^2\,(s-a)^2 - 4y^2}{4\,s\,(s-a)}}$$

Soll nun die Funktion y ein Maximum werden, und der Wert von x zugleich reell bleiben, so muss $(a-2s)^2\, s\,(s-a) - 4s^2\,(s-a)^2 - 4y^2 = 0$

gesetzt werden, woraus $y = \frac{a}{2}\sqrt{s\,(s-a)}$

das Maximum der Funktion folgt. Für dieses Maximum entspricht aber der Wert von x:

$$x = s - \frac{a}{2}$$

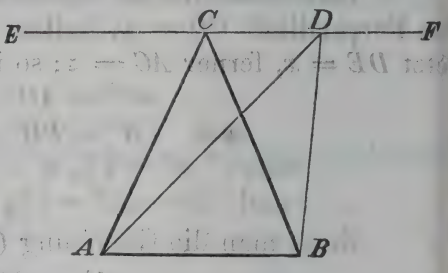
und folglich $2\,s - a - x = s - \frac{a}{2}$

d. i. das gesuchte Dreieck muss ein gleichschenkliges sein.

§. 14.

Lehrsatz. *Unter allen Dreiecken, welche gleiche Basis und gleichen Flächenraum haben, hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.*

Beweis. Nehme man die zwei Dreiecke ABC und ABD an, welche dieselbe Grundlinie AB haben. Da der Annahme nach die beiden Dreiecke gleiche Flächenräume haben, so müssen die Spitzen C und D der Dreiecke ABC und ABD in einer Geraden EF liegen, welche parallel ist zur Grundlinie AB; und ist das $\triangle ABC$ gleichschenklig:



so ist: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$

und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCF$

folglich ist: $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCF$

somit ist nach dem Lehrsatze (§. 10)

$$AC + CB < AD + DB$$

also auch: $AB + AC + CB < AB + AD + DB$

und folglich hat unter allen Dreiecken von derselben Basis und demselben Flächenraume das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

Zusatz 1. Unter allen Dreiecken von demselben Flächenraume hat also das gleichseitige den kleinsten Umfang. Denn das Dreieck, welches den kleinsten Umfang und denselben Flächenraum haben soll, muss gleichschenklig sein, welche Seite man auch als Grundlinie annehmen mag. Demnach müssen in dem Dreiecke vom kleinsten Umfange je zwei Seiten, folglich alle drei Seiten einander gleich sein.

Zusatz 2. Unter allen Polygonen von gleichem Flächenraume und von gleicher Seitenanzahl hat das gleichseitige Polygon $ABCD\ldots X$ den kleinsten Umfang. Denn wäre in dem Polygone $ABCD\ldots X$ AB nicht gleich BC, so könnte man über die Nebenseite AC das gleichschenklige $\triangle AMC = \triangle ABC$ konstruiren, und man hätte dann:

$$AM + MC < AB + BC$$

folglich auch: $AM + MC + CD + DE + \ldots < AB + BC + CD + DE + \ldots$

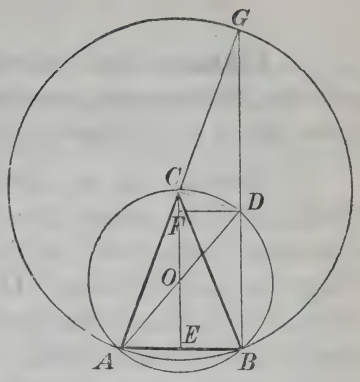
das Polygon $AMCD\ldots X$ hätte also einen kleineren Umfang als $ABCD\ldots X$, welches der Annahme zuwider ist.

§. 15.

Lehrsatz. *Unter allen Dreiecken, welche in einem gegebenen Kreise auf dieselbe Grundlinie errichtet werden können, hat das gleichschenklige den grössten Flächenraum und den grössten Umfang.*

Beweis. Es sei der Kreis $ABDC$ gegeben, man konstruire in demselben auf dieselbe Basis AB die Dreiecke ABC und ABD, so dass das erste ein gleichschenkliges, das zweite ein ungleichseitiges Dreieck sei, so muss:

1) $\triangle ABC > \triangle ABD$
2) $AC + CB > AD + DB$



Um zu beweisen, dass das $\triangle ABC$ einen grösseren Flächenraum hat, als das $\triangle ABD$, braucht man nur aus D eine Parallele DF zur Basis AB zu ziehen, so sind die Höhen der benannten Dreiecke EC und EF, und es verhält sich:

$$\triangle ABC : \triangle ABD = EC : EF$$

da aber $EC > EF$, so ist auch:

$$\triangle ABC > \triangle ABD$$

Zum Beweise der zweiten Behauptung verlängere man die Seite BD, und mache $DG = AD$,
und verbinde C mit D und G, durch die Geraden CD und CG, so ist:

$$\triangle ACD \cong \triangle CDG,$$

weil $DG = AD$ nach der Konstruktion $CD = CD$, und $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDG$,
folglich ist $$CG = CA = CB$$
und somit ist C der Mittelpunkt des Kreises ABG;
nun ist aber: $$BC + CG > BG$$
oder: $$BC + CA > BD + DA$$

Zusatz 1. Unter allen Dreiecken, welche sich in demselben Kreise einschreiben lassen, hat das gleichseitige den grössten Umfang und grössten Flächenraum. Denn das in einem Kreise eingeschriebene Dreieck, welches den grössten Umfang und grössten Flächenraum haben soll, ist gleichschenklig, welche Seite man auch als Grundlinie annehmen mag, folglich müssen je zwei Seiten somit alle drei einander gleich sein.

Zusatz 2. Es hat überhaupt unter allen Polygonen von gleicher Seitenzahl, die in demselben Kreise verzeichnet werden können, das gleichseitige, daher das reguläre den grössten Umfang und Flächenraum.

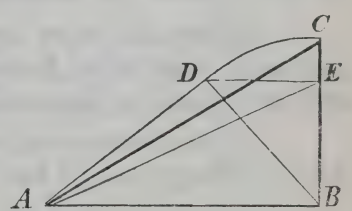
Zusatz 3. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken, welche in einem Halbkreise auf die Hypotenuse als Basis errichtet werden können, hat dasjenige den grössten Flächenraum, welches die beiden Katheten gleich hat.

§. 16.

Lehrsatz. *Sind zwei Seiten eines Dreiecks gegeben, so hat jenes den grössten Flächenraum, in welchem dieselben einen rechten Winkel bilden*

Beweis 1. In den Dreiecken ABC und ABD sei $AB = AB$, $BC = BD$, $\sphericalangle ABC = R$, und $\sphericalangle ABD \gtrless R$; so ist zu beweisen, dass $$\triangle ABC > \triangle ABD.$$

Man ziehe aus D zu AB eine Parallele DE, verbinde E mit A, so ist $\sphericalangle ABE = R$, also auch $$\sphericalangle BED = R, \text{ weil } DE \parallel AB.$$



Mithin ist: $$BD > BE$$
und da: $$BD = BC,$$
so ist auch: $$BC > BE$$
nun ist $$\triangle ADB = \triangle ABE,$$
folglich ist: $$\triangle ABC > \triangle ABD$$

Beweis 2. Bezeichnet man den Winkel, der durch die zwei gegebenen Seiten AB und BC eingeschlossen wird, mit x, so findet man den Flächenraum des Dreiecks ABC durch: $$y = \tfrac{1}{2} AB.\ BC.\ Sinx$$
der Wert dieser Funktion hängt bloss vom veränderlichen Faktor $Sinx$ ab, weil AB und BC konstante Grössen sind. Es wird aber $Sinx$ ein Maximum, wenn $x = 90^0$ ist, folglich müssen die gegebenen Seiten AB und BC einen rechten Winkel bilden, damit das $\triangle ABC$ ein Maximum werde.

§. 17.

Lehrsatz. *Sind alle Seiten eines Polygons mit Ausnahme einer gegeben, so hat dasselbe den grössten Flächenraum, wenn man über der nicht gegebenen Seite einen Halbkreis, welcher durch sämmtlichen Ecken des Polygons geht, beschreibt.*

Beweis. Es sei $ABCDE$ ein Fünfeck, dessen Seiten AB, BC, CD und DE gegeben sind. Wenn dasselbe unter allen Fünfecken, welche dieselben vier Seiten besitzen, den grössten Flächenraum haben soll, so darf dasselbe durch die Verlängerung der nicht gegebenen Seite keine Vergrösserung erleiden. Dies kann aber nur dann geschehen, wenn man über die fünfte Seite AE einen Halbkreis beschreibt, der durch die Eckpunkte B, C und D geht, oder was dasselbe ist, wenn die Winkel ABE, ACE und ADE rechte sind. Sollte einer von diesen etwa ACE kein rechter sein, so kann man denselben mit Beibehalt der Geraden AC und EC und der Dreiecke ABC und CDE zu einem rechten Winkel machen, und dann wird erst das $\triangle ACE$, also auch das Polygon $ABCDE$ den grössten Flächenraum erhalten. Auf ähnliche Weise lässt sich dasselbe von den Dreiecken ABE und ADE erweisen, woraus dann schlieslich folgt, dass der Halbkreis über AE durch die Eckpunkte B, C und D des Polygons, welcher den grössten Flächenraum hat, geht.

Zusatz 1. Es bleibt sich gleich, in welcher Ordnung immer die Seiten auf einander folgen, weil die Summe der Bögen, welche durch die Seiten als Sehnen abgeschnitten werden, konstant ist. Es bleibt auch der Flächenraum des Polygons dadurch unverändert, weil der Halbkreis und die Summe der Sehnen AB, BC, CD und DE unveränderlich ist.

Zusatz 2. Unter allen Polygonen, welche man aus gegebenen Seiten bilden kann, hat dasjenige den grössten Flächenraum, durch dessen sämmtliche Ecken sich ein Kreis beschreiben lässt. Denn es lässt sich das Polygon durch die Konstruktion eines Dreieckes über eine Seite und durch den Durchmesser, welcher diese Seite durchschneidet, immer in zwei Theile theilen, wodurch man auf den eben erwiesenen Lehrsatz zurückgeführt wird.

Zusatz 3. Wenn das im Kreise beschriebene Polygon lauter gegebene Seiten hat, so hängt der Flächenraum desselben nicht von der Anordnung derselben ab, wie dies schon im Zusatze 1 erwähnt wurde. Auch ist noch klar, dass nur ein Kreis existirt, in welchem ein Polygon von gegebenen Seiten eingeschrieben werden kann.

Zusatz 4. Unter allen isoperimetrischen Polygonen von bestimmter Seitenzahl hat das reguläre den grössten Flächenraum. Denn unter allen isoperimetrischen Polygonen von derselben Seitenanzahl ist das gleichseitige, und ferner dasjenige, durch dessen sämmtliche Ecken sich ein Kreis beschreiben lässt, dessen Winkel daher einander gleich sind, am grössten, dieses Polygon ist aber regulär.

§. 18.

Lehrsatz. *Unter allen Polygonen vom gleichen Flächenraume und von bestimmter Seitenanzahl hat das reguläre den kleinsten Umfang.*

Beweis. Es seien zwei Polygone P und P', welche gleiche Flächenräume $P = P'$ und gleiche Anzahl Seiten haben, das erste sei regulär und das zweite irregulär, der Umfang des ersten sei U und der des zweiten U'; so wird $U < U'$

Denn nehme man ein reguläres Polygon P'', welches mit P ähnlich ist, und mit P' gleichen Umfang $u = U'$ hat, wenn u den Unfang der Polygons P'' bedeutet. So ist

$$P' < P''$$

und da $P = P'$

so ist auch: $P < P''$

da ferner $P \sim P''$

so ist $U < u$

und weil $U' = u$

so ist auch $U < U'$.

§. 19.

Lehrsatz. *Von zwei regulären Polygonen, welche in demselben Kreise eingeschrieben werden, hat dasjenige den grösseren Umfang und grösseren Flächenraum, dessen Seitenanzahl grösser ist.*

Beweis. Das Hexagon *ABCDEF* hat einen grösseren Umfang und Flächenraum, als das in demselben Kreise beschriebene Pentagon *AMNPQ*.

1) Denn verbindet man *B* mit *M* durch die Gerade *BM*, so ist:

$$AB + BM > AM$$

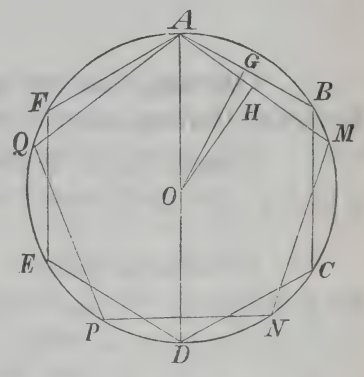
und folglich: Umfang *ABMNPQ* > Umf. *AMNPQ*

Nun ist nach (§. 15 Zusatz 2):

Umfang *ABCDEF* > Umf. *ABMNPQ*

um so mehr ist also:

Umf. *ABCDEF* > Umf. *AMNPQ*.



2) Zieht man die Apotheme *OG* und *OH*, so ist, da:

$$AB < AM,$$
$$OG > OH.$$

Man findet aber den Flächenraum eines regulären Polygons, wenn man den halben Umfang mit dem Apothem multiplicirt. Da nun sowohl der Umfang als auch das Apothem im Hexagon grösser ist als in Pentagon, so ist der Flächenraum des ersteren grösser als des letzteren.

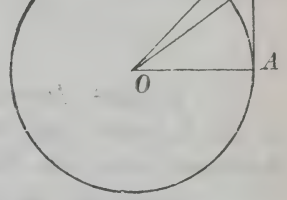
§. 20.

Lehrsatz. *Von zwei regulären, demselben Kreise umgeschriebenen Polygonen hat jenes einen kleineren Umfang und Flächenraum, welches eine grössere Seitenanzahl hat.*

Beweis. *AB* sei die halbe Seite eines dem Kreise umgeschriebenen regulären *n*-ecks, *AC* aber die halbe Seite eines demselben Kreise umgeschriebenen $(n + 1)$-ecks, *A* sei die gemeinschaftliche Mitte beider Polygone, und *O* der Mittelpunkt des Kreises, so sind *AOB* und *AOC* die halben Centriwinkel, und es verhält sich

$$\sphericalangle AOB : \sphericalangle AOC = (n + 1) : n$$

daher $$\sphericalangle BOC : \sphericalangle AOC = 1 : n$$



Theilt man den Winkel *AOC* in *n* gleiche Theile, so wird ein jeder gleich sein dem $\sphericalangle BOC$. Dadurch wird auch die halbe Seite *AB* in $(n+1)$ Theile getheilt, die aber einander nicht gleich sind, sondern nach einem bekannten Satze von *B* nach *A* abnehmen,

folglich ist: $$n \,.\, BC > AC$$

also: $$n \,.\, BC + n\, AC > (n + 1)\, AC$$

folglich: $$n \,.\, 2\, AB > (n+1) \,.\, 2\, AC.$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Umfang des demselben Kreise umgeschriebenen *n*-ecks grösser ist als der des $(n + 1)$-ecks.

Nachdem die beiden demselben Kreise umschriebenen regulären Polygone gleiche Apotheme haben, und die Flächenräume mit dem Umfange proportionirt sind, letztere aber bei wachsenden Seiten abnehmen; so folgt daraus, dass der Flächenraum des regulären $(n+1)$-ecks kleiner ist als der des *n*-ecks.

§. 21.

Lehrsatz. *Von zwei isoperimetrischen regulären Polygonen ist dasjenige das grössere, welches eine grössere Seitenanzahl hat.*

Beweis. Es habe ein reguläres *n*-eck den Umfang *u*, und das Apothem *a*, dann ein reguläres $(n + 1)$-eck den Umfang *u* und das Apothem *b*. Es ist zu beweisen, dass

$$b > a$$

d. i. dass das letztere reguläre Polygon grösser ist als das erstere.

Um dies zu beweisen, beschreibt man einen Kreis im regulären n-ecke, und konstruir dann um denselben ein reguläres $(n + 1)$-eck, dessen Umfang u' sei, so ist nach (§. 20.)

$$u > u'$$

Da aber die beiden regulären $(n+ 1)$-ecke ähnlich sind, so ist

$$u : u' = b : a$$

und nachdem $u > u'$

so ist auch: $b > a$

§ 22.

Lehrsatz. *Von zwei regulären Polygonen, die gleichen Flächenraum haben, hat dasjenige de kleineren Umfang, dessen Seitenanzahl grösser ist.*

Beweis. Es sei P ein reguläres n-eck, und P' ein reguläres $(n + 1)$-eck, deren Umfäng u und u', die Apotheme a und b sind. Da beide gleiche Flächenräume haben, so ist

$$u' < u$$

Zu diesem Behufe konstruirt man ein reguläres Polygon P'' von n Seiten, dessen Um fang u'' gleich u' ist, so folgt nach (§ 21),

dass $P'' < P'$

und weil: $P' = P$

ist, so ist auch: $P'' < P$

und nachdem: $P'' \sim P$

so folgt dass $u' = u'' < u$

Zusatz. Der Kreis hat unter allen Figuren gleichen Umfanges den grössten Flächenraum und unter allen Figuren gleichen Flächenraumes den kleinsten Umfang. Denn es hat unter alle Polygonen von bestimmten Seitenanzahl das reguläre bei gleichem Umfange den grössten Flä chenraum, und bei gleichem Flächenraume den kleinsten Umfang. Es ist daher nur noch zu zeigen, dass der Kreis grösser ist als jedes reguläre Polygon vom gleichen Umfange, und eine kleineren Umfang hat als jedes andere reguläre Polygon von gleichem Flächenraume. Denn wird der Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet, so weiss man, dass unter allen regulären Polygonen gleichen Umfanges jenes das grössere ist, welches mehr Sei ten hat, und unter allen regulären Polygonen gleichen Flächenraumes jenes den kleineren Um fang hat, dessen Seitenanzahl grösser ist.

§ 23.

Aufgabe. *Durch einen innerhalb des Winkels gegebenen Punkt O eine gerade Linie MN bis an die Schenkel des Winkels so zu ziehen, dass das dadurch entstandene Dreieck* BMN *dem Flächenraume nach ein Minimum werde.*

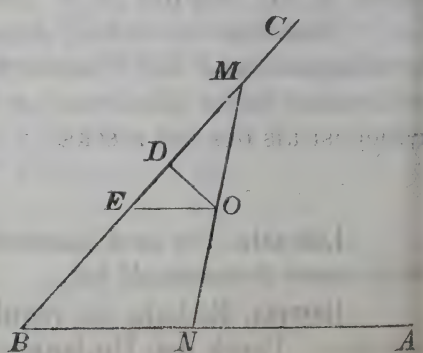
Auflösung. Man fälle aus dem Punkte O auf den Schenkel BC ein Perpendikel OD und ziehe aus O zu AB eine Parallele OE, und setze der Kürze halber:

$$BE = a$$

$$DO = b$$

und um die Lage der Geraden MN zu bestimmen:

$$EM = x.$$



So ist: $$\triangle OEM = \frac{bx}{2}$$

und in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke BMN und OEM, wenn man die Fläche des ersteren Dreieckes mit y bezeichnet, verhält sich

$$y : \frac{bx}{2} = (a + x)^2 : x^2$$

daraus folgt: $$y = \frac{b\,(a + x)^2}{2\,x}$$

Aus dieser Funktion findet man:

$$x = \frac{-(ab-y) \pm \sqrt{y\,(y-2ab)}}{b}$$

Wenn die Funktion y für reelle Werte von x ein Minimum werden soll, so muss

$$y\,(y - 2ab) = 0$$

gesetzt werden, und man hat $y_1 = 0$

und $y_2 = 2\,ab$

für die Werte von $x_1 = -a$

und $x = +a$

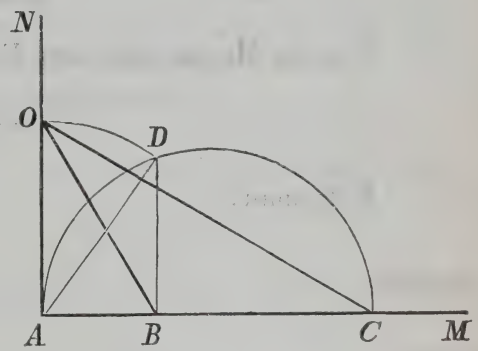
Für $x = -a$ scheint die Funktion ein Maximum zu sein, was jedoch nicht der Fall ist, indem der entsprechende Wert der Funktion $y = o$ kleiner ist als das Minimum $2ab$, und es ist ferner leicht einzusehen, dass die Fläche bis ins Unendliche zunehmen könne, wenn *MN* zuletzt mit *BC* oder *BA* parallel wird.

§. 24.

Aufgabe. *Es sind zwei auf einander senkrechte Geraden* AM *und* AN, *und in der ersteren zwei Punkte* B *und* C *gegeben; man soll in der geraden Linie* AN *den Punkt* O *finden, in welchem die beiden Vereinigungslinien* BO *und* CO *den grössten Winkel einschliessen.*

Auflösung. Man setze der Kürze halber:

$$AB = a$$
$$AC = b$$
$$AO = x$$
$$\sphericalangle\, AOB = v$$
$$\sphericalangle\, AOC = w.$$



So ist: $\text{tang}\, v = \frac{a}{x}$

und $\text{ang.}\, w = \frac{b}{x}$

$$\text{und tang.}\,(w-v) = \frac{\text{tang.}\, w - \text{tang.}\, v}{1 + \text{tang}\, w\, \text{tang}\, v} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}}$$

oder $$\text{tang}\,(w - v) = y = \frac{(a-b)\,x}{ab + x^2}$$

Wird y ein Maximum, so wird auch die tang. $(w - v)$, also auch der Winkel $(w - v)$ ein Maximum.

Sucht man aus dieser Gleichung x, so erhält man:

$$x = \frac{(b - x) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4\,ab\,y^2}}{2y}$$

Wird $(b - a)^2 - 4\,ab\,y^2 = 0$

gesetzt, so folgt daraus: $y^2 = \frac{(b-a)^2}{4\,a\,b}$

oder $y = \pm \frac{(b-a)}{2\sqrt{ab}}$

und folglich ist: $x = \pm\sqrt{ab}$

Der erste Wert macht die Funktion zu einem Maximum, der zweite negative Wert aber lässt dieselbe als Minimum erscheinen. Die geometrische Bestimmung des Punktes *O* ist aus der Figur ersichtlich.

Anmerkung. Wäre *BC* die Breite eines Stromes oder Gartens, und *AN* die Lage eines Hauses oder Thurmes; so muss sich das Auge des Zuschauers in der Höhe *AO* befinden, wenn letzterem diese Breite am grössten erscheinen soll.

§. 25.

Aufgabe. *In einem Dreiecke das grösste Rechteck einzuschreiben.*

Auflösung. Es sei im Dreiecke *ABC* das gesuchte Rechteck *EFGH*, und man setze die Höhe des Dreiecks

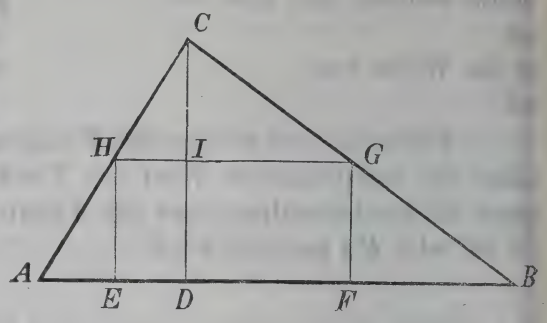
$$CD = h$$

dann $AD = a$

$BD = b$

und die Höhe des Rechteckes

$$DI = x;$$



so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreieckes *ACD* und *CIH* dann *BCD* und *CGI*:

$$h : a = (h - x) : HI$$

und $h : b = (h - x) : IG$

folglich ist die Grundlinie des Rechteckes

$$y = HI + IG = \frac{(a + b)(h - x)}{h}$$

Um das Maximum dieser Funktion zu bestimmen, sucht man daraus x und findet:

$$x = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{hy}{(a+b}}$$

Setzt man: $$\frac{h^2}{4} - \frac{hy}{(a+b)} = 0$$

folglich $$y = \frac{b\,(a + b)}{4}$$

so ist: $$x = \frac{h}{2}$$

Die Fläche und die Höhe dieses grössten Rechteckes ist halb so gross, als die des gegebenen Dreieckes.

§. 26.

Aufgabe. *Einem Quadranten das grösste Rechteck einzuschreiben, so dass eine Seite desselben in den Radius falle.*

Auflösung. Ist der Radius des Kreises $= r$, die Basis des Rechtecks $= x$,

so ist die Höhe $= \sqrt{r^2 - x^2}$

und man hat die Funktion: $y = x\sqrt{r^2 - x^2}$

zu untersuchen. Zu diesem Behufe lösst man dieselbe nach x auf, und findet:

$$x = \sqrt{\frac{r^2}{2} + \sqrt{\frac{r^4}{4} - y^2}}$$

dann setzt man: $$\frac{r^4}{4} - y^2 = 0$$

also $y = \frac{r^2}{2}$, so folgt: $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$

und $$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Es hat daher das Quadrat den grössten Flächenraum.

III. Abschnitt.

§. 27.

Hat man nach den im (§ 1) entwickelten Begriffen eine Gleichung zwischen mehr als zwei Variablen, so wird man allen diesen Variablen, eine ausgenommen, völlig willkührliche Werte beilegen können. Diejenige Variable, deren Wert nicht willkührlich angenommen wird, heisst dann die Funktion der übrigen unabhängigen Variablen.

Sind nur zwei unabhängige Variable x und y vorhanden, welche durch:

$$u = f(x, y)$$

oder

$$\varphi(x, y, u) = 0$$

dargestellt werden können, so bietet noch die Geometrie das Mittel dar, eine Reihefolge der Werte der Funktion u anschaulich zu machen. Wenn aber die Anzahl der unabhängigen Variablen die Zahl zwei übertrifft, so ist es nicht mehr möglich in der Geometrie die Natur und die Eigenschaften einer Funktion durch ein Bild anschaulich darzustellen.

§. 28.

Die gesuchten Werte der unabhängigen Veränderlichen, welche eine Funktion zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, sind sehr oft noch gewissen gegebenen Bedingungen unterworfen, welche durch Gleichungen unter diesen Variablen ausgedrückt werden. Es ist klar, dass die Anzahl dieser Gleichungen nothwendig kleiner sein muss als die Anzahl der Variablen, von denen die vorgelegte Funktion abhängt. Es sei beispielsweise:

$$u = f(x, y) \qquad (1)$$

gegeben, und die unabhängigen Veränderlichen x und y seien noch überdies an die Bedingungsgleichung:

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (2)$$

gebunden. Sucht man nun aus der Funktion (2)

$$y = \psi(x) \qquad (3)$$

und setzt man diesen Wert in die Funktion (1), so erhält man

$$u = f[x, \psi(x)] \qquad (4)$$

eine Funktion in welcher nur eine unabhängige Veränderliche vorkommt.

Wenn diese Funktion nach x quadratisch oder auch biquadratisch ist, so hat man schon (im § 3, § 7 und § 26) ein Verfahren gezeigt, wie der Wert von x und folglich auch der von y bestimmt werden müsse, damit u ein Maximum oder Minimum werde.

Ist aber die gedachte Funktion nach x vom 3-ten Grade oder von einem Grade, welcher auf den 3-ten zurückgeführt werden kann, so verfährt man, wie folgt:

Man löst die gegebene Funktion, deren Max. oder Min. verlangt wird, nach x durch die Cardan'sche Formel auf, und bestimmt dann den Wert derselben so, dass alle 3 Werte von x scheinbar imaginär, in der Wirklichkeit aber reell werden, indem man die Grösse unter dem Quadrat-Wurzelzeichen negativ oder höchstens gleich Null, aber nie positiv annimmt.

Setzt man die gedachte Grösse gleich Null, so kann man daraus beurtheilen, ob der daraus gewonnene Wert der Funktion ein Max. oder Min., oder keines von beiden wird. Dann sind aber die zwei letzteren Werte von x einander gleich, welcher Wert in (3) gesetzt, den Wert für y liefert; für diese Werte von x nnd y wird dann die Funktion ein Max. oder Min.

Parallelepiped.

§. 29.

Aufgabe. *Unter allen Parallelepipeden von gleichem Kubik-Inhalte, die einen gegebenen körperlichen Winkel gleich haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.*

Auflösung. Da ein körperlicher Winkel gegeben ist, so kann man sich in diese Ecke ein achsiges Coordinaten-System so hinein gelegt denken, dass die Achsen mit den Kanten, die i dieser Ecke zusammenkommen, zusammen fallen sollen.

Man setze eine von diesen Kanten beispielsweise die längs der Achse der Z als bekan voraus, und bezeichne diese vor der Hand mit a, die beiden anderen Kanten aber längs der Ach der X und Y sind dann veränderlich und werden beziehungsweise mit x und y bezeichnet. D drei gegebenen Kantenwinkel, welche von den Achsen (XY), (XZ) und (YZ) gebildet werde sollen beziehungsweise α, β und γ heissen; ferner sei der Neigungswinkel zwischen der b kannt vorausgesetzten Kante a und der Ebene (XY) gleich φ und der Kubikinhalt des Para lelepipeds gleick k.

So folgt: $$k = a \,.\, \text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\varphi \,.\, xy \qquad \text{(I)}$$

und die Oberfläche des Parallelepipeds, welche mit u bezeichnet werden soll:

$$u = 2\,\text{Sin}\,\alpha \,.\, xy + 2\,a\,\text{Sin}\,\beta\, x + 2\,a\,\text{Sin}\,\gamma\, y \qquad \text{(II)}$$

und es ist die Bedingung anzugeben, unter welcher diese Funktion ein Minimum wird.

Zu diesem Behufe wird nach (§ 3) aus der Funktion (I) y gesucht, und der Wert derse ben in (II) substituirt, dann nach x geordnet, so erhält man:

$$x^2 - \frac{(a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi \,.\, u - 2k\,\text{Sin}\,\alpha)}{2\,a^2\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\varphi} \,.\, x = -\frac{2ak\,\text{Sin}\,\gamma}{2a^2 \,.\, \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\varphi}$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{(a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi \,.\, u - 2k\,\text{Sin}\,\alpha) \pm \sqrt{(a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi \,.\, u - 2k\,\text{Sin}\,\alpha)^2 - 16\,a^3 k\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}}}{4\,a^2\,\text{Sin}\,\alpha \,.\, \text{Sin}\,\beta \,.\, \text{Sin}\,\varphi}$$

Soll u ein Minimum und x zugleich reell sein, so muss:

$$(a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi\,u - 2\,k\,\text{Sin}\,\alpha)^2 - 16\,a^3\,k\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi > 0$$

oder mindestens gleich Null sein.

Nimmt man:

$$(a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi \,.\, u - 2\,k\,\text{Sin}\,\alpha)^2 - 16\,a^3\,k\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi = 0 \text{ an,}$$

so ist:

$$u = \frac{2k\,\text{Sin}\,\alpha + 4\,a\sqrt{ak\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi}}{a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi}$$

das Minimum der gegebenen Funktion; für welchen Wert:

$$x = \frac{\sqrt{ak\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi}}{a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\varphi}$$

und

$$y = \frac{\sqrt{ak\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi}}{a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi\,\text{Sin}\,\gamma}$$

ist; folglich ist

$$x\,a\,\text{Sin}\,\beta = \frac{\sqrt{ak\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi}}{a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi}$$

$$y\,.a\,\text{Sin}\,\gamma = \frac{\sqrt{ak\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,\gamma\,\text{Sin}\,\varphi}}{a\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\varphi}$$

d. h. *unter allen Parallelepipeden von gleichem Kubik-Inhalte, einem gegebenen körperlichen Win kel und einer als bekannt vorausgesetzten Kante hat dasjenige die kleinste Oberfläche, in welche die beiden Flächen, die an der bekannten Kante liegen, gleich gross sind.*

Zusatz 1. Wenn man von den drei Kanten eines Parallelepipeds von gegebenem kub schen Inhalte und gegebenem körperlichen Winkel welche immer als bekannt annimmt, so wir dasjenige die kleinste Oberfläche haben, dessen zwei Seitenflächen an dieser Kante gleich gros sind; daraus ergiebt sich folgender Satz:

„Unter allen Parallelepipeden von gleichem Kubikinhalte und von gleichem körperlichen Wink hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grenzflächen einander gleich sind.“

Zusatz 2. Setzt man $\varphi = 90^0$ also auch

$$\beta = \gamma = 90^0$$

so ist: $$u = \frac{2k \operatorname{Sin}\alpha + 4a\sqrt{ak \operatorname{Sin}\alpha}}{a \operatorname{Sin}\alpha}$$

das Minimum der Oberfläche und

$$x = \frac{\sqrt{ak \operatorname{Sin}\alpha}}{a \operatorname{Sin}\alpha}$$

$$y = \frac{\sqrt{ak \operatorname{Sin}\alpha}}{a \operatorname{Sin}\alpha}$$

folglich ist: $x = y.$ d. i.

„Unter allen geraden Parallelepipeden, welche einen gleichen Kubikinhalt und gleiche Höhe, dann einen gleichen Winkel in der Grundfläche haben, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Seiten der Grundfläche einander gleich sind.“

Ist ausserdem auch noch $\alpha = 90^0$

so ist: $$u = \frac{2k + 4a\sqrt{ak}}{a}$$

die kleinste Oberfläche

und $$x = \sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$y = \sqrt{\frac{k}{a}}$$

also $x = y$ d i.

„Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleichem Kubikinhalte und gleicher Höhe hat das mit quadratischer Grundfläche die kleinste Oberfläche.“

Man hätte auch eine andere Kante als bekannt annehmen und dann beweisen können, dass die zwei anderen Kanten, welche in derselben Ecke zusammenkommen, unter den genannten Bedingungen einander gleich sein müssen; daraus entspringt folgender Satz:

„Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleichem Kubikinhalte hat der Kubus die kleinste Oberfläche.“

Wird Zusatz 1 und 2 berücksichtigt, so folgt, dass unter allen geraden oder schiefen Parallelepipeden, weche gleichen Kubikinhalt haben, der Kubus die kleinste Oberfläche hat.

§. 30.

Aufgabe. *Unter allen Parallelepipeden, welche eine gegebene Summe der Kanten und einen gegebenen körperlichen Winkel gleich haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Kubikinhalt hat.*

Auflösung. Ist die Summe der drei Kanten, welche in einer Ecke zusammenkommen, gleich s, und wird die eine Kante, welche in der Achse Z liegt als bekannt vorausgesetzt und gleich a angenommen, ferner der Kantenwinkel und Neigungswinkel, welche von den Achsen Z und Y, dann der Achse Z und der Ebene (XY) gebildet werden, beziehungsweise mit α und φ bezeichnet,

so ist: $$s = a + x + y \qquad (1)$$

wenn die beiden anderen Kanten x und y heissen, ferner ist:

$$u = a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi \,.\, xy \qquad (2)$$

der Kubikinhalt, welcher zu einem Maximum gemacht werden soll.

Nach (§ 3) wird aus (1) y gesucht, und der Wert derselben in die Funktion (2) gesetzt, dann diese nach x geordnet; dies giebt:

$$x^2 - (s-a)\,a = -\frac{u}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi}$$

daraus folgt: $$x = \frac{(s-a)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s-a}{2}\right)^2 - \frac{u}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi}}$$

Wenn die Funktion u ein Maximum und x gleichzeitig reell sein soll, so muss:

$$\left(\frac{s-a}{2}\right)^2 - \frac{u}{a \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \varphi} > 0$$

oder mindestens:

$$\left(\frac{s-a}{2}\right)^2 - \frac{u}{a \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \varphi} = 0 \quad \text{gesetzt werden.}$$

Wird die letztere Bedingungs-Gleichung angenommen, woraus

$$u = a \cdot \left(\frac{s-a}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} \varphi$$

das Maximum der Funktion u folgt, so ergiebt sich:

$$x = \left(\frac{s-a}{2}\right)$$

und

$$y = \left(\frac{s-a}{2}\right)$$

folglich:

$$x = y.$$

Wenn daher eine Kante des Parallelepipeds als bekant vorausgesetzt wird, so müssen die beiden anderen Kanten unter den angegebenen Bedingungen einander gleich sein. Da nun jede der drei Kanten als gegeben vorausgesetzt werden kann, so müssen also alle drei Kanten einander gleich sein. Hieraus entspringt folgender Satz:

„Unter allen Parallelepipeden von einer gleichen Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen, und von einem gleichen körperlichen Winkel hat dasjenige den grössten Kubikinhalt, dessen Kanten alle einander gleich sind.“

Zusatz 1. Wird $\varphi = 90^0$ angenommen, so ist:

$$u = a \cdot \left(\frac{s-a}{2}\right)^2 \operatorname{Sin} \alpha$$

und

$$x = \left(\frac{s-a}{2}\right)$$

und

$$y = \left(\frac{s-a}{2}\right)$$

also

$$x = y. \qquad \text{d. i.}$$

„Unter allen geraden Parallelepipeden, welche eine gleiche Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen, und eine gleiche Kante, dann einen gleichen körperlichen Winkel haben, hat dasjenige den grössten Inhalt, dessen beide andere Kanten einander gleich sind.“

Was für eine Kante des Parallelepipeds von gleicher Summe der Kanten und von gleichen körperlichen Winkel man auch als bekannt annehmen mag, so sind die beiden anderen Kanten stets einander gleich. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

„Unter allen geraden Parallelepipeden mit gleicher Summe der Kanten und einem gleichen körperlichen Winkel hat dasjenige den grössten Inhalt, dessen Kanten alle einander gleich sind.“

Wird ausserdem noch

$$\alpha = 90^0$$

angenommen, so ist

$$u = a \left(\frac{s-a}{2}\right)^2$$

und

$$x = \left(\frac{s-a}{2}\right)$$

und

$$y = \left(\frac{s-a}{2}\right)$$

also

$$x = y$$

und da man ebenso eine andere Kante als bekannt hätte voraussetzen können, so folgt daraus, dass alle drei Kanten einander gleich sein müssen, und man erhält folgenden Satz:

„Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen, hat der Kubus den grössten Kubikinhalt.“

§. 31.

Aufgabe. *Aus einem runden Baumstamme von bestimmter Länge einen rechtwinklig parallelepipedischen Balken zu schneiden, welcher den grössten Inhalt hat.*

Auflösung. Die Länge, Breite, Höhe und der Durchmesser des Balkens seien beziehungsweise l, x, y und d, wovon die Grössen l und d constant, x und y aber veränderlich seien, so ist der Kubikinhalt:

$$u = l \,.\, x\, y \qquad (1)$$

dessen grösster Wert zu suchen ist.

Nachdem zwischen den unabhängigen Veränderlichen x und y noch die Bedingungsgleichung:

$$d^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

stattfindet, so wird der grösste Wert der Funktion (1) gefunden, wenn man aus (2) den Wert von y in (1) setzt und dann diese so gewonnene Funktion nach x ordnet; so bekommt man:

$$x^4 - d^2 x^2 = -\frac{u^2}{l^2}$$

Hieraus folgt:

$$x = \sqrt{\frac{d^2}{2} \pm \sqrt{\frac{d^4}{4} - \frac{u^2}{l^2}}}$$

Der grösste Wert der Funktion (1) wird bekanntlich gefunden, wenn man in dieser letzten Formel

$$\frac{d^4}{4} - \frac{u^2}{l^2} = 0$$

setzt, woraus dann das gewünschte Resultat

$$u = \frac{d^2 l}{2}$$

folgt, dann ist aber

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

und

$$y = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

also

$$x = y \quad \text{d. i.}$$

„Unter allen rechtwinklig parallelepipedischen Balken von einer bestimmten Länge, welche aus einem gegebenen runden Baumstamme geschnitten werden können, hat derjenige den grössten Kubikinhalt, dessen Querschnitt ein Quadrat ist.“

Anmerkung. Man wird daher dort, wo die absolute oder rückwirkende Festigkeit des Balkens in Anspruch genommen wird, Balken von quadratischem Querschnitte am besten anwenden können.

§. 32.

Aufgabe. *Aus einem runden Stück Bauholz den stärksten Balken zu schneiden* (Wenn sich die bezüglichen Festigkeiten parallelepipedischer Balken von einerlei Länge wie die Breiten und wie die Quadrate der Höhen und umgekehrt wie die Länge verhalten.)

Auflösung. Es sei r der Radius des Querschnittes, x die Breite, y die Höhe und l die Länge des daraus zu hauenden vierkantigen Balkens. So wird dessen Tragvermögen, wenn es auf die hohe Kante gestellt wird, durch:

$$u = \frac{m \,.\, x\, y^2}{l} \qquad (1)$$

ausgedrückt, worin m einen konstanten Coefficienten vorstellt. Ausserdem hat man noch folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$4r^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Um den grössten Wert der Funktion (1) zu finden, sucht man aus (2) y, und substituirt dessen Wert in (1) und ordnet nach x, so erhält man:

$$x^3 - 4r^2 x + \frac{lu}{m} = 0$$

eine Funktion nach x vom 3-ten Grade. Löst man diese nach x auf, so ist nach der Cardan'schen Formel:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{lu}{2m} + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4}{27}(4r^2)^3 + \frac{l^2u^2}{m^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{lu}{2m} - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4}{27}(4r^2)^3 + \frac{l^2u^2}{m^2}}}$$

Soll die Funktion u ein Maximum und x zugleich imaginär werden, so muss nach (§ 28)

$$-\frac{4}{27}(4r^2)^3 + \frac{l^2u^2}{m^2} < 0$$

oder höchstens gleich Null sein. Setzt man:

$$\frac{l^2u^2}{m^2} - \frac{4}{27}(4r^2)^3 = 0$$

so ist:

$$u = \frac{16 . mr^3\sqrt{3}}{9}$$

das Maximum der Funktion u, folglich ist:

$$x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{lu}{m}} = -\frac{4r}{3}\sqrt{3}$$

und

$$x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}r\sqrt{3}\right) = +\frac{2}{3}r\sqrt{3}$$

ferner:

$$y = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{9}r^2 . 3} = +\frac{2r}{3}\sqrt{6}$$

Um den Querschnitt des Balkens zu konstruiren hat man:

$$x : y = \frac{2}{3}r\sqrt{3} : \frac{2}{3}r\sqrt{6}$$
$$= 1 : \sqrt{2}$$

Theilt man daher den Diameter in 3 gleiche Theile und errichtet in den Theilungspunkten Senkrechte auf verschiedenen Seiten des Durchmessers und verbindet man die gewonnenen vier Punkte in der Peripherie durch Gerade, so erhält man den gesuchten Querschnitt des Balken, für welchen derselbe die grösste Tragkraft besitzt.

Prisma.

§. 33.

Aufgabe. *Unter allen dreiseitigen Prismen, welche eine gleichliegende Ecke und Kante, dann die Grundflächen und eine Seitenfläche und noch den Kubikinhalt gleich haben, dasjenige zu finden, dessen Oberfläche am kleinsten ist.*

Auflösung. Legt man in die gegebene Ecke ein dreiachsiges Coordinaten System so, dass die Achsen desselben mit den 3 Kanten zusammen fallen, und bezeichnet man die 3 Kantenwinkel, dann den Neigungswinkel, welche von den Achsen X und Y, X und Z, Y und Z, dann von der Achse Z und der Ebene (XY) gebildet werden, beziehungsweite mit α, β, γ und φ, ferner die gegebene Kante längs der Achse der Z mit a, die beiden andern mit x und y, die Grundfläche mit q, die Seitenfläche, welche nicht an der gegebenen Ecke liegt, mit q', und endlich den Kubikinhalt mit k, so hat man

$$k = \tfrac{1}{2}\, x\, y \operatorname{Sin}\alpha \,.\, a \sin\varphi \qquad (1)$$

und

$$u = 2q + q' + x\, a \operatorname{Sin}\beta + y\, a \operatorname{Sin}\gamma \qquad (2)$$

worin u die Oberfläche des Prisma vorstellt.

Wird nun der Wert von y aus der Funktion (1) gesucht, und in (2) gesetzt, dann diese nach x geordnet, so ergiebt sich:

$$x^2 - \frac{x\,(au - 2q - q')}{a^2 \operatorname{Sin}\beta} = -\frac{2\,k \operatorname{Sin}\gamma}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\varphi}$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{(au - 2q - q')}{2a^2 \operatorname{Sin}\beta} \pm \sqrt{\frac{(au - 2q - q')^2}{4a^4 \operatorname{Sin}^2\beta} - \frac{2k \operatorname{Sin}\gamma}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\varphi}} \qquad (3)$$

Da die Aufgabe möglich sein soll, so muss:

$$\frac{(au - 2q - q')^2}{4a^4 \operatorname{Sin}^2\beta} - \frac{2k \operatorname{Sin}\gamma}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\varphi} > 0$$

oder mindestens gleich Null sein. Nimmt man daher:

$$\frac{(au - 2q - q')}{4a^4 \operatorname{Sin}^2\beta} - \frac{2k \operatorname{Sin}\gamma}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\varphi} = 0$$

an, so ist:

$$u = \frac{(2q + q') \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi + 2a\sqrt{2\,ak \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi}$$

der kleinste Wert der Funktion (1), und dann hat man:

$$y = \frac{(au - 2q - q')}{2a^2 \operatorname{Sin}\beta} = \frac{\sqrt{2ak \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\varphi}$$

und

$$y = \frac{\sqrt{2ak \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}}{a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}$$

Aus den zwei letzten Formeln folgt

$$x\,a\,.\,\operatorname{Sin}\beta = \frac{\sqrt{2ak \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi}$$

und

$$y\,a \operatorname{Sin}\gamma = \frac{\sqrt{2ak \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma \operatorname{Sin}\varphi}}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi}$$

d. i.

„Unter allen dreiseitigen Prismen, welche eine gleichliegende Ecke, eine gleichliegende Kante, die Grundflächen, eine Seitenfläche, (die der gegebenen Kante gegenüber liegt), *und noch den Kubikinhalt gleich haben, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen beide Seitenflächen an der gegebenen Kante gleich gross sind.“*

Man hätte eben so gut eine andere Ecke in der Grundfläche als bekannt voraussetzen können, woraus dann folgt, dass je zwei und folglich alle drei Seitenflächen einander gleich sein müssen, und es ergiebt sich folgender Satz:

„Unter allen dreiseitigen Prismen, welche eine gleichliegende Ecke und Kante, die Grundflächen und den Kubikinhalt gleich haben, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Seitenflächen alle gleich gross sind“

Zusatz 1. Dieser Satz lässt sich auf Prismen von beliebig vielen Seiten ausdehnen. Denn ist eine Ecke eine Kante, die Grundflächen, die Seitenflächen mit Ausnahme zweier, (die an der obbenannten Kante liegen) und der Kubikinhalt gegeben; so hat unter allen Prismen dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Seitenflächen an der gegebenen Kante einander gleich sind. Da aber in der Willkühr steht, welche immer von den körperlichen Winkeln an der Grundfläche als bekannt anzunehmen; so ergiebt sich daraus, dass je zwei, also auch alle Seitenflächen unter sonst gleichen Umständen einander gleich sein müssen. Wodurch man auf folgenden Satz geleitet wird:

„Unter allen Prismen von gleichem körperlichen Winkel, gleicher Kante, gleichen Grundflächen, und von gleichem Kubikinhalte hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Seitenflächen alle gleich gross sind.“

Zusatz 2. Ist $\varphi = 90$ also auch $\beta = \gamma = 90^0$

so ist: $$u = \frac{(2q + q') \operatorname{Sin} \alpha + 2a \sqrt{2ak \operatorname{Sin} \alpha}}{a \operatorname{Sin} \alpha}$$

und $$x = \frac{\sqrt{2ak \operatorname{Sin} \alpha}}{a \operatorname{Sin} \alpha}$$

und $$y = \frac{\sqrt{2ak \operatorname{Sin} \alpha}}{a \operatorname{Sin} \alpha}$$

folglich ist: $x = y.$ d. i.

„Unter allen geraden dreiseitigen Prismen von gleichem Kubikinhalte, gleichen Grundflächen einer gleichen Seitenfläche, gleicher Ecke nebst einer gleichen Kante hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen beide andere Kanten der gegebenen Ecke einander gleich sind.“

Hätte man eine andere Ecke der Grundfläche angenommen, so würde dann daraus folgen, dass je zwei, also alle drei Seiten der Grundflächen einander gleich sein müssen, und man hat folgenden Satz:

„Unter allen geraden dreiseitigen Prismen von gleichem Kubikinhalte, gleichen Grundflächen und gleichen Höhen hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grundfläche ein reguläres Dreieck ist.“

Hieraus lässt sich folgender Satz herleiten:

„Unter allen geraden Prismen vom gleichen Kubikinhalte, vom gleichen Grundflächen, gleicher Anzahl der Seitenflächen und gleicher Höhe hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grundfläche ein reguläres Vieleck ist.

§. 34.

Aufgabe. *Unter allen dreiseitigen Prismen, welche eine gegebene Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen, und eine Ecke gleich haben, dasjenige zu finden, dessen Kubikinhalt ein Maximum ist.*

Auflösung. Wird auf ganz ähnliche Weise aufgelöst wie die Aufgaben in § (30), und man kommt auf den Satz:

„Unter allen dreiseitigen Prismen, welche eine gleiche Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen, und eine gleiche Ecke haben, hat dasjenige den grössten Inhalt, dessen Kanten gleich gross sind.“

Dann auf folgenden Satz:

„Unter allen dreiseitigen geraden Prismen, welche eine gegebene Summe der Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen, haben, hat dasjenige den grössten Inhalt, dessen Kanten alle einander gleich sind.“

Dieser Satz lässt sich auch auf Prismen von beliebig vielen Seiten ausdehnen, und man findet folgenden Satz:

„Unter allen nicht geraden oder geraden Prismen, welche eine gleiche Summe der Kanten, die in einer Ecke znsammenstossen, haben, hat dasjenige den grössten Inhalt, dessen Kanten alle einander gleich sind.“

Cylinder.

§. 35.

Aufgabe. *Unter allen geraden Cylindern von gleichem Kubikinhalte denjenigen zu finden, dessen Oberfläche ein Minimum ist.*

Auflösung. Es sei x der Radius der Grundfläche, y die Höhe, a^3 der Kubikinhalt und u die Oberfläche des geraden Cylinders; so hat man:

$$a^3 = \pi x^2 . y \qquad (1)$$

und $$u = 2\pi x . y + 2\pi x^2 \qquad (2)$$

Nach dem Verfahren (§ 28) sucht man aus (1) den Wert für y und setzt diesen in (2), und ordnet dann die gesuchte Funktion nach x, so erhält man:

$$x^3 - \frac{u}{2\pi} . x + \frac{a^3}{\pi} = 0$$

welche kubische Gleichung nach der Cardan'schen Formel die Wurzel:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{a^3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{a^6 - \frac{u^3}{54\pi}}} + \sqrt[3]{-\frac{a^3}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{a^6 - \frac{u^3}{54\pi}}}$$ gibt.

Soll die Funktion u ein Minimum und x reell sein, so muss:

$$a^6 - \frac{u^3}{54\pi} < 0$$

oder höchstens gleich Null sein.

Nimmt man: $$a^6 - \frac{u^3}{54\pi} = 0.$$

an, so folgt daraus:

$$u = 3\, a^2 \sqrt[3]{2\pi}$$

der kleinste Wert der Funktion.

Dann ist aber: $$x_1 = -\frac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

und $$x_2 = -\tfrac{1}{2}\left(-\frac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = +\frac{a\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$$

und $$x_3 = -\tfrac{1}{2}\left(-\frac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = +\frac{a\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$$

und $$y = \frac{a\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$$

und folglich ist $$y = 2x$$ d. i.

„Unter allen geraden Cylindern vom gleichen kubischen Inhalte hat derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche“

Da ferner noch $u = 3 \cdot 2\pi x^2 = 6\pi x^2$ ist,

so folgt daraus, *dass die kleinste Oberfläche gleich ist der sechsfachen der Grundfläche.*

Zusatz 1. Wird die obere Grundfläche nicht zur Oberfläche gerechnet, so folgt nach einer ähnlichen Rechnung, *dass unter allen geraden Cylindern vom gleichen kubischen Inhalte derjenige die kleinste Oberfläche habe, dessen Höhe gleich ist dem Radius der Grundfläche.“*

Anmerkung. Hier findet also auch die grösst mögliche Regelmässigkeit statt. Will man einen hohlen Cylinder sammt Boden und Deckel verfertigen lassen; so wird man diesem die gleichseitige Form geben müssen, um bei einem bestimmten Inhalte die grösste Ersparung an Materiale zu erzwecken. — Soll aber der hohle Cylinder keinen Deckel haben, so muss die Höhe gleich dem Radius der Grundfläche genommen werden, damit der Cylinder bei einem bestimmten Inhalte den geringsten Aufwand an Materiale erfordern soll.

§. 36.

Aufgabe. *Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche denjenigen zu suchen, dessen Kubikinhalt ein Maximum ist.*

Auflösung. Wenn der Radius der Grundfläche mit x, die Höhe mit y, die Oberfläche mit s und der Kubikinhalt des geraden Cylinders mit u bezeichnet wird, so ist:

$$s = 2\pi x \cdot y + 2\pi x^2 \qquad (1)$$

und $$u = \pi x^2 y \qquad (2)$$

Um das Maximum der letzteren Funktion zu finden, sucht man aus (1) den Wert für y und substituirt diesen in (2) hinein, dann ordnet man diese Funktion nach x, so ergiebt sich:

$$x^3 - \frac{s}{2\pi} \cdot x + \frac{u}{\pi} = 0$$

Daraus folgt:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{u}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{u^2 - \frac{s^2}{54\pi}}} + \sqrt[3]{-\frac{u}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{u^2 - \frac{s^2}{54\pi}}}$$

und setzt man: $$u^2 - \frac{s^2}{54\pi} = 0$$

so ist $$u = \frac{s}{3}\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$$

das Maximum der Funktion.

Dann is aber $$x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{u}{2\pi}} = -2\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$$

und $$x_2 = -\tfrac{1}{2}\left(-2\sqrt{\frac{s}{6\pi}}\right) = +\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}\left(-2\sqrt{\frac{s}{6\pi}}\right) = +\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$$

und $$y = \frac{s - 2\pi x^2}{2\pi x} = 2\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$$

folglich ist $$y = 2x.$$ d. h.

„Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche hat der gleichseitige den grössten Kubikinhalt."

Pyramide.

§. 37.

Aufgabe. *Es ist der Kubikinhalt, ein körperlicher Winkel, eine Kante, eine Seitenfläche, welche der gegebenen Kante gegenüber liegt, einer dreiseitigen Pyramide gegeben. Man suche diejenige, welche die kleinste Oberfläche hat.*

Auflösung. Es sei der Kubikinkalt $= k$, die drei Kanten und ein Neigungswinkel der gegebenen Ecke, welche von den Axen X und Y, X und Z, X und Z, dann von der Axe Z und der Ebene XY gebildet werden, beziehungsweise α β γ und φ, die Kante gleich a, die dieser gegenüber liegende Fläche gleich q, die beiden andern Kanten $= x$ und y und die Oberfläche u; so findet man: $$k = \tfrac{1}{6}\, a \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\varphi \,.\, xy$$

und $$u = q + \tfrac{1}{2}\, a\, x \operatorname{Sin}\beta + \tfrac{1}{2}\, ay \operatorname{Sin}\gamma$$

Wenn nun diese beiden Funktionen nach dem in (§ 28) angegebenen Verfahren behandelt werden, so ergiebt sich folgender Satz:

„Unter allen dreiseitigen Pyramiden vom gleichen kubischen Inhalte, einer gleichen körperlichen Ecke, einer gleichen Kante und Seitenfläche hat diejenige die kleinste Oberfläche, deren beiden Seitenflächen an der Kante einander gleich sind."

Nachdem man aber die gegebene Ecke und die Kante beliebig wählen kann, so folgt daraus, dass die an der gegebenen Kante liegenden Flächen stets einander gleich sein müssen und man hat den Satz:

„Unter allen dreiseitigen Pyramiden vom gleichen kubischen Inhalte, hat diejenige die kleinste Oberfläche deren Grenzflächen alle einander gleich sind."

Setzt man die drei Kantenwinkel einander gleich, so folgt, dass

„Unter allen dreiseitigen Pyramiden vom gleichen Kubikinhalte die reguläre (Tetraeder) *die kleinste Oberfläche habe."*

Zusatz 1. Es lässt sich weiter leicht nachweisen, dass *„unter allen Pyramiden vom gleichen Kubikinhalte und gleicher Anzahl der Seitenflächen die gleichseitige, die kleinste Oberfläche habe."*

§. 38.

Aufgabe. *Unter allen dreiseitigen Pyramiden, welche eine Ecke, eine Kante und dieser Kante gegenüber liegenden Seitenfläche, die Grundfläche und die Oberfläche gleich haben, diejenige zu finden, deren Kubikinhalt ein Maximum ist.*

Auflösung. Schlägt man einen ähnlichen Weg wie im (§ 37) ein, so erhält man folgenden Satz:

„Unter allen dreiseitigen Pyramiden, welche eine Ecke, eine Kante, und dieser gegenüber liegenden Seitenfläche, die Grundfläche und die Oberfläche gleich haben, hat diejenige den grössten Kubikinhalt, deren zwei Seitenflächen an der gegebenen Kante gleich gross sind.“

Da die Wahl der Ecke wilkürlich ist, so folgt daraus, dass

„Unter allen dreiseitigen Pyramiden, welche eine Ecke, eine Kante und die Oberfläche gleich haben diejenige den grössten Inhalt habe, deren Grenzflächen alle gleich gross sind.“

Zusatz. Es ist auch nicht schwer darzuthun, dass

„Unter allen Pyramiden, welche eine gleiche Anzahl Seitenflächen, ein reguläres Polygon als Grundfläche und gleiche Oberfläche haben, die gleichseitige den grössten Kubikinhalt habe.“

Setzt man $\alpha = \beta = \gamma$, so folgt der Satz:

„Unter allen dreiseitigen Pyramiden, welche gleiche Kantenwinkel und Oberfläche haben; hat das Tetraeder den grössten Kubikinhalt.“

Kegel.

§. 39.

Aufgabe. *Unter allen geraden Kegeln* (von kreisförmiger Basis) *denjenigen zu finden, welcher bei einem gegebenen Kubikinhalte die kleinste Oberfläche hat.*

Auflösung. Es sei der gegebene Kubikinhalt $= k$, der veränderliche Halbmesser der Grundfläche $= x$ und die Höhe des geraden Kegels $= y$; so ist, wenn die veränderliche Oberfläche mit u bezeichnet wird,

$$u = \pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2 + y^2}$$

Es ist aber der Kubikinhalt:

$$k = \tfrac{1}{3}\,\pi\, x^2 y$$

Sucht man aus der letzteren Funktion y und substituirt den Wert in die erste, und ordnet diese nach x, so hat man:

$$x^4 - \frac{u}{2\pi} \cdot x^2 = -\frac{9k^2}{2\pi u}$$

Daraus folgt:

$$x = \sqrt{\frac{u}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16\pi^2} - \frac{9k^2}{2\pi u}}}$$

Setzt man:

$$\frac{u^2}{16\pi^2} - \frac{9k^2}{2\pi u} = 0$$

so ist:

$$u = 2\sqrt[3]{18\,\pi\,k^2}$$

dann ist aber:

$$x = \sqrt{\frac{u}{4\pi}} = \sqrt{\frac{2\sqrt[3]{18\,\pi k^2}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3k}{2\pi}}$$

und

$$y = \frac{3k}{\pi x^2} = \frac{3k\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{9k^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{3k}{2\pi}}$$

und folglich ist:

$$y = 2x$$ d. i.

„Unter allen geraden Kegeln von kreisförmiger Grundfläche und vom gleichen Kubikinhalte hat derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche.“

usatz. Nimmt man anstatt der Oberfläche des geraden Kegels nur die krumme Mantelfläche, so ergiebt sich folgender Satz:

„Unter allen geraden Kegeln vom gleichen Inhalte hat derjenige die kleinste krumme Mantelfläche, dessen Höhe sich zum Halbmesser der Grundfläche verhält, wie $\sqrt{2}$ zu 1.“

§ 40.

Aufgabe. *Unter allen geraden Kegeln von kreisförmiger Grundfläche und von gleicher Mantelfläche denjenigen zu suchen, dessen Kubikinhalt ein Maximum ist.*

Auflösung. Setzt man die gegebene Mantelfläche eines geraden Kegels $= s$, den Radius der Grundfläche $= x$, die Höhe $= y$ und den Kubikinhalt $= u$, so ist:

$$s = \pi x \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

und

$$u = \pi x^2 \cdot \frac{y}{3} \qquad (2)$$

sucht man aus (1) den Wert für y und substituirt diesen in (2), ordnet dann nach x die Funktion, so erhält man:

$$x^6 - \frac{s^2}{\pi^2} x^2 + \frac{9k^2}{\pi^2} = 0$$

setzt man für einen Augenblick $x^2 = \xi$ folglich $x^6 = \xi^3$,

so hat man:

$$\xi^3 - \frac{s^2}{\pi^2} \xi + \frac{9u^2}{\pi^2} = 0$$

Daraus folgt:

$$\xi_1 = \sqrt[3]{-\frac{9u^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{81\,u^4 - \frac{4}{27}\frac{s^6}{\pi^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{9u^2}{2\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{81u^4 - \frac{4}{27}\frac{s^6}{\pi^2}}}$$

Wird

$$81u^4 - \frac{4}{27}\frac{s^6}{\pi^2} = 0$$

angenommen, woraus

$$u = \frac{s}{3}\sqrt{\frac{2s}{3\pi\sqrt{3}}}$$

das Maximum der Funktion (2) folgt.

Dann ist aber:

$$\xi_1 = -2\sqrt[3]{\frac{9u^2}{2\pi^2}}$$

$$\xi_2 = \xi_2 = \sqrt[3]{\frac{9u^2}{2\pi^2}}$$

Folglich

$$x_1 = \sqrt{-2\sqrt[3]{\frac{9u^2}{2\pi^2}}}$$

$$x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{9u^2}{2\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{3u}{\pi\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{s}{\pi\sqrt{3}}}$$

und

$$y = \frac{1}{\pi x}\sqrt{s^2 - \pi^2 x^4} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{3u}{\pi\sqrt{2}}}}\sqrt{s^2 - \pi^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{(3u)^4}{\pi^4 (\sqrt{2})^4}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2s}{\pi\sqrt{3}}}$$

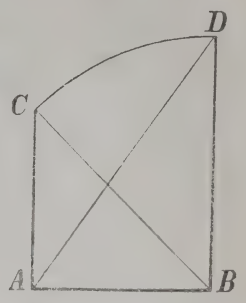
folglich ist:

$$x : y = 1 : \sqrt{2}, \text{ also } y = x\sqrt{2}$$

d. i.

„Unter allen geraden Kegeln von gleicher Mantelfläche hat derjenige den grössten Kubikinhalt, dessen Höhe gleich ist dem Radius der Grundfläche multiplicirt mit $\sqrt{2}$.

Anmerkung. Ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABC, $AB = AC = 1$, so ist das Perpendikel $BD = \sqrt{2}$. Es entsteht also durch die Umdrehung des $\triangle ABD$ um die Höhe als Achse ein gerader Kegel, der bei einer gegebenen Mantelfläche den grössten Kubikinhalt, oder bei gegebenen Kubikinhalte die kleinste Mantelfläche besitzt. Dann ist ber der Winkel an der Spitze $\sphericalangle ADB = 35^0\ 15'\ 51{\cdot}8''$.



§. 41.

Aufgabe. *Aus einem gegebenen geraden Kegel den grössten Cylinder zu schneiden.*

Auflösung. Es sei die Höhe des geraden Kegels $= h$ der Radius der Grundfläche $= r$, die Höhe des gesuchten Cylinders $= y$ der Radius der Grundfläche desselben $= x$, und der Inhalt des Cylinders $= u$; so ist:

$$u = \pi x^2 y$$

und

$$y = \frac{h(r - x)}{r}$$

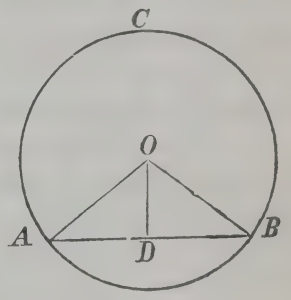
Werden diese Funktionen nach dem angegebenen Verfahren (§ 28) behandelt, so ergiebt sich, dass der grösste Cylinder die Höhe $= \frac{1}{3} h$, und der kleinste $= h$ haben müsse.

§. 42.

Aufgabe. *Man soll aus einem Kreise vom Radius r einen Sektor dergestalt ausschneiden, dass der gerade Kegel, welcher den Rest zur Mantelfläche bekommt, den grösstmöglichen Inhalt erhalte.*

Auflösung. Es sei die Länge des Bogens ACB, oder der Umfang des so entstandenen Kegels $= x$, so ist der Radius dieser Kreisfläche oder Basis $= \frac{x}{2\pi}$ und da $AO = OB = r$ die Seite des Kegels ist, so ist die Höhe:

$$OD = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$



Es sei ferner der Kubikinhalt $= u$, so ist

$$u = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

oder

$$u = \frac{x^2}{24\pi^2} \sqrt{4r\pi^2 - x^2}$$

Behandelt man diese Funktion nach dem Verfahren (§ 3), so ergiebt sich

$$u = \frac{2}{27}\pi r^3 \sqrt{3}$$

das Maximum der Funktion, und dann:

$$x = \frac{2}{3}\pi r \sqrt{6}$$

der gesuchte Bogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, welcher in Graden $293{\cdot}9388^0$ giebt, und folglich ist

$$\sphericalangle AOB = 360 - 293{\cdot}9388$$
$$= 66{\cdot}0612 -$$
$$= 66^0\ 3'\ 40''.$$

Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium.

a. Beschreibung des Laboratoriums.
b. Über die praktischen Arbeiten der Schüler.
c. Über einen neuen Schwefelwasserstoff-Apparat.
d. Über eine neue Darstellungsweise des Chlorsauren Barytes.
e. Über Benutzung des Leucht-Gases anstatt des Weingeistes zu den Flammen-Reaction

Beschreibung des Laboratoriums.

Im Folgenden gebe ich die Beschreibung des chemischen Laboratoriums unserer Schu einerseits um einen neuen Beweis zu liefern, dass die Pester Commune mit edlem Freisinn ke Opfer scheut, wenn es sich darum handelt durch Bildung der Jugend zur Beförderung des a gemeinen Wohles beizutragen; andererseits um über die Verwendung der mir grossmüth zur Verfügung gestellten Mittel öffentlich Rechenschaft zu geben. Dabei kann ich nicht unterla sen jenen edlen Männern des löblichen Magistrats-Rathes und Gemeinderathes, deren Bemühu gen die Besiegung von vielen im Wege stehenden Hindernissen hauptsächlich zuzuschreiben is dann meinem verehrten Herrn Direktor für seine freundliche Unterstützung und Ermuthigun meinen innigst gefühlten Dank hiemit auszusprechen.

Vor allem war mir darum zu thun ein Laboratorium herzustellen, welches bei möglich geringen Kosten in einer dem gegenwärtigen Zustand unserer Hilfsmittel entsprechenden Weis nicht nur die Ausführung von Analysen, sondern auch die Darstellung von Präparaten unte besonderer Berücksichtigung jener, welche grössere Apparate erfordern, in der Art möglic macht, dass zu keiner Zeit der Ordnung und Reinlichkeit Abbruch gethan werde.

In Folge dessen mussten wegen leichterer Überwachung die verschiedensten von Sch lern auszuführenden Operationen auf einen möglichst kleinen Raum jedoch so zusammeng drängt werden, dass nicht eine Operation der anderen hinderlich im Wege stehe. Dies gilt u mittelbar bezüglich der Arbeiten der Schüler selbst, ausserdem musste noch ein anderer Un stand ganz lokaler Art berücksichtiget werden: Es besteht bis jetzt in Pest noch keine einzig Handlung, welche die zu chemischen Arbeiten nöthigen Apparate und Reagentien zu einem mä sigen Preise und vollständig liefert. Ich musste mich desshalb darauf einrichten alle Reagentie selbst darzustellen, und diese so wie alles dem Schüler sonst nöthige aus dem Vorrath des L boratoriums gegen Vergütung der Gestehungs-Kosten abzuliefern. Dieser Vorgang ist zwar m vielen Unannemlichkeiten, Mühe und Zeitverlust für den Professor verbunden, aber fast ebens viel Zeit erspart dadurch jeder einzelne Schüler, der sonst die einzelnen Geräthe aus allen Stad theilen zusammenholen muss, wodurch oft unwillkürlich häufig aber auch absichtlich Störun gen herbei geführt werden.

Es ist nun leicht ersichtlich, dass der durch diesen Umstand bedingte grössere Vorrat an Glas, Porzellan und anderen Geräthen, dann an Präparaten und Reagentien, eine mehr als ge wöhnlich grosse Menge von Kasten und anderen Einrichtungs-Stücken erfordert. Das Geschäf der Einrichtung hat noch während des Schuljahres etwa 3 Monate in Anspruch genommen. Fü

2.

Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Andreas-Real-gymnasiums zu Berlin. Ostern 1893.

Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht.

Von

Max Koppe.

Mit fünf Figuren.

BERLIN 1893.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1893. Progr. No. 93.

Einleitung.

Von jeher ist die Notwendigkeit strenger Beweise in der Mathematik anerkannt. Sätze über Zahlen und geometrische Figuren, die sich nur auf das Zeugnis grofser Autoritäten, wie Fermat's oder Steiner's, stützen oder nur durch Induktion aus vielen Einzelfällen gefunden sind, finden keine Aufnahme in das System der Wissenschaft. Eine blofse historische Mitteilung mathematischer Lehren würde auch im Unterricht nicht auf kurzem Wege zu den Höhen des Erkennens, sondern ins Leere führen, da die Begriffe, welche bei dem allmählichen Wachstum der Mathematik sich naturgemäfs gebildet und organisch entwickelt haben, nur verstanden werden können, wenn das Denken an der Lösung der Aufgaben geübt wird, aus denen sie hervorgingen. Es giebt aber ein Gebiet, wo man zum Schaden des Verständnisses und der zu erreichenden mathematischen Bildung den Grundsatz, dafs der Lernende nur auf selbst erkannten Wahrheiten weiter bauen dürfe, nicht streng anwendet, bisweilen ihn völlig verleugnet. Dies geschieht bei der Behandlung der numerischen Tafeln, nämlich der Sinustafel, die wir dem Ptolemaeus (150 n. Chr.) verdanken, und der Tafel der Logarithmen, die, 1614 von Neper entdeckt, ihre jetzige Form von Briggs 1618 erhielten.

In vielen Lehrbüchern der Trigonometrie wird von der Berechnung der Sinus, deren Zahlenwerte die Grundlage für die Lösung jeder trigonometrischen Aufgabe bilden, gar nicht oder nur beiläufig gehandelt, wohl aber wird unter dem Namen Goniometrie ein Heer von Formeln und Transformationen aufgestellt, in denen der Anfänger nur leere Spiele der Rechnung sehen kann, da die Aufgaben, zu deren Lösung einige von ihnen verwandt werden können, erst später an ihn herantreten. Ja die Berechnung der Dreiecke ist, wenn Sinus-Tafeln vorliegen, etwas fast selbstverständliches und läfst sich ohne goniometrische Formeln durch Zerlegung der Dreiecke in rechtwinklige in jedem Falle ausführen. Daher ist denn auch in Ptolemaeus' Almagest und in Copernicus' Buch „De revolutionibus orbium coelestium", die beide einen Abschnitt über Trigonometrie enthalten, das Hauptgewicht auf die Berechnung der Sinus-Tafel gelegt, und zu diesem Zwecke war es nötig, eine Reihe geometrischer Sätze herbeizuziehen, die in Formeln verwandelt unsere Goniometrie bilden. Sie ist also ein Werkzeug, dessen zweckmäfsiger Bau am besten unter dem Gesichtspunkt der Hauptaufgabe erkannt wird, für die es geschaffen ist. Man findet häufig die Meinung, dafs die numerische Berechnung der Tafeln nach elementaren Methoden eine überaus grofse, im Vergleich zur aufzuwendenden Zeit unfruchtbare, Mühe verursache, und dafs es deshalb gerechtfertigt sei, auf die

Methoden der sog. höheren Mathematik als Ersatz auch dann schon hinzuweisen, wenn ein Verständnis derselben noch unmöglich ist. Diese Ansicht beruht auf einer falschen Wertschätzung der Reihenentwickelungen. Es ist zwar richtig, dafs Newton's Reihe für $\sin x$ einen bestimmten Sinus, besonders bei kleinem Winkel, ohne viel Mühe finden lehrt, aber die Berechnung einer Tafel nach dieser Formel allein wäre unmöglich. Als vor 100 Jahren die Bestrebungen, welche auf eine unserem Zahlensystem entsprechende Einteilung des Quadranten gerichtet waren, einen Erfolg zu versprechen schienen, den sie leider nicht gehabt haben, waren Hobert und Ideler die ersten, welche eine neue umfangreiche logarithmisch-trigonometrische Tafel erscheinen liefsen, die sie in kurzer Frist allein berechnet hatten. Dabei erwies sich ihnen ihre ursprüngliche Absicht, nach Euler's Reihe für $\log \sin x$ zu rechnen, als undurchführbar, sie benutzten ein Verfahren der Einschaltung nach Differenzen, wie es ähnlich auch Briggs vor Entdeckung der Reihen angewandt hatte.

Wenn man nicht gerade Wert darauf legt, den Sinus als Quotienten mit gleicher Berechtigung und Veränderlichkeit von Zähler und Nenner, also als Funktion zweier Variabeln zu betrachten, so ist es leicht möglich, am Kreise eine Anschauung der Gesamtheit aller Sinus und ihres stetigen Zusammenhanges zu gewinnen. Dagegen kann die entsprechende Aufgabe für die Logarithmen nur durch Berechnung eines zusammenhängenden Systems von Werten gelöst werden. Geschieht dies nicht, so bleibt „log" ein leeres interesseloses Symbol. Scheinbar gelingt es allerdings, ohne lebendige Anschauung der Werte des Logarithmus alle Regeln abzuleiten, wider die bei der Anwendung nicht gefehlt werden darf. Aber die Beweis-Schemata gehen nicht auf den inneren Grund zurück, sondern enthalten nur den Nachweis, dafs die Logarithmen-Sätze andere Ausdrucksweisen für die Potenzsätze sind, z. B. dafs $\log ab = \log a + \log b$ identisch ist mit $10^{\alpha+\beta} = 10^{\alpha} \cdot 10^{\beta}$, sie lösen also die Schwierigkeit nicht wirklich, sondern legen ihr nur einen anderen Namen bei, und es bleibt die Frage bestehen, wie der Begriff der allgemeinen Potenz so aufzuklären ist, dafs die formalen Operationen mit demselben auf mehr beruhen als einer unsichern Analogie mit den wirklich begriffenen Eigenschaften der gewöhnlichen Potenz. Das Voraufschicken der allgemeinen Potenz entspricht übrigens nicht der historischen Entwickelung, denn gerade die Betrachtung der Logarithmen gab den Anstofs zur allgemeinen Einführung von Potenzen mit gebrochenem Exponenten, und es ist nicht leicht, mit Anfängern, die eben begriffen haben, was a^2 und $\sqrt[3]{a}$ bedeuten, die Frage zu erörtern, ob sich mit $a^{2/5}$ auch irgend etwas abkürzen lasse. Aus einer natürlichen Entwicklung der allgemeinen Potenz müfste die Giltigkeit der Potenz-Sätze für den erweiterten Begriff von selbst folgen, nicht dürfte sie als eine unerwartete, umständlich zu beweisende Merkwürdigkeit hinzutreten.

Man kann dazu nach Kepler an die Euklidische Messung und Zusammensetzung der Verhältnisse anknüpfen. Denken wir uns einen Pantographen, der so eingestellt ist, dafs er Kopieen im 10fachen Mafsstabe liefert. Seine zweimalige Anwendung vergröfsert das Original im Mafsstabe 1 : 100, man könnte daher einem anderen Zeichenapparat, dessen einmalige Anwendung schon ein so grofses Bild lieferte, die Stärke 2 zuschreiben, und dies durch $100 = 10^2$ andeuten. Eine Thätigkeit 1/5mal ausführen, bedeutet immer eine andere vollziehen, deren 5malige Wiederholung der ursprünglichen gleichwertig ist.

Demnach würde man die Stärke 1/5 einem Vergrößerungs-Apparate beilegen, der fünfmal nach einander anzuwenden ist, bis die Dimensionen des Originals im Bilde auf 10 steigen. Vergrößerte derselbe im Verhältnis $1 : x$, so müßte also $x^5 = 10$, $x = \sqrt[5]{10}$ sein. Die normale Vergrößerung, d. h. die, welche verzehnfacht, 2/5mal ausführen, bedeutet endlich, die eben definierte schwache Vergrößerung, deren Stärke $= 1/5$ war, zweimal hinter einander vollziehen, so kommt man auf $10^{2/5} = (\sqrt[5]{10})^2$. Zerlegt man den von 1 auf 10 führenden Prozeß der Vergrößerung nicht in 5, sondern in dreimal mehr Stufen, deren jede eine Vergrößerung von 1 auf $\sqrt[15]{10}$ hervorbringt, so erkennt man, daß jede dritte Stufe mit einer der früheren zusammenfällt, also 2/5 von der Thätigkeit der normalen Vergrößerung, wie es sein muß, mit 6/15 zusammenfällt. Man kann daher irgend zwei Potenzen, z. B. $a^{1/3}$, $a^{2/5}$, indem man die Exponenten auf gleichen Nenner bringt, als Glieder einer einzigen, nach Potenzen von $a^{1/15}$ fortschreitenden Reihe ansehen, wodurch die Giltigkeit der gewöhnlichen Potenzsätze ohne weiteres einleuchtet. Um den Begriff von 10^{-2} zu finden, hat man die Thätigkeit, die zu der normalen vergrößernden die umgekehrte ist und sie aufhebt, zweimal auszuführen, d. h. man hat von 100 auf 1 zu verkleinern, oder im Maßstab $1 : 1/100$ zu vergrößern. Wenn man von diesem Beispiel, welches den gedanklichen Inhalt der Überlegungen recht klar vor Augen stellen sollte, abstrahiert, so erkennt man, daß es im wesentlichen auf Gegenüberstellung der arithmetischen Reihe 0, 1, 2, 3, ... und der geometrischen 1, 10, 100, 1000, ... ankommt, die durch gleichmäßige Fortsetzung und Einschaltung so erweitert werden, daß jene eine arithmetische, diese eine geometrische Reihe bleibt. Man wird nun auch leicht die Gleichung $3 = 10^{0{,}47712}$ auf folgende, eine Kontrolle ihrer Richtigkeit gestattende Form bringen $3 = x^4 y^7 z^7 u^1 v^2$, wo $x = \sqrt[10]{10}$, $y = \sqrt[10]{x}$, $z = \sqrt[10]{y}$ ... ist.

Das übliche Verfahren der Definition von $a^{2/5}$ durch die Ausdehnung eines Satzes, der auf $a^{20/5} = \sqrt[5]{a^{20}}$ berechtigte Anwendung findet, giebt zwar viel schneller den Wert irgend einer Potenz außerhalb des Zusammenhangs, läßt aber das Fortbestehen der früheren Potenzsätze nur schwer erkennen. Es führt auf die Deutung $a^{2/5} = \sqrt[5]{a^2}$, welche zwar richtig aber weniger natürlich als die obige ist, sie schließt wegen des Überganges auf a^2 eine Extrapolation in sich statt der obigen Interpolation, die dem Wesen des Bruchs 2/5 entspricht. Für $10^{0{,}47712}$ ergäbe sich so die 47712te Wurzel aus einer 1 mit 100 000 Nullen, eine ganz unvorstellbare Zahlenoperation. Es ist auch diese Art der Einführung leicht dem Mißverständnis ausgesetzt, als ob Formeln, d. h. die abgekürzte Darstellung von Gedanken, aus sich selbst noch einen Wert besäßen und weiter lebten, wenn die Gedanken untergegangen sind. Diese falsche Auffassung finden wir in Baltzer's Elementen, wo gezeigt wird, daß man die Wurzelsätze leicht aus der — nicht weiter gerechtfertigten — Anwendung der Potenz-Sätze auf Potenzen mit Bruchexponenten erhält.

Da die allgemeinen Potenzen nur zu dem Zweck behandelt werden, Beweismaterial für die Logarithmen zu liefern, so können sie aus dem Anfangs-Unterricht ganz wegfallen, wenn es, wie wir zeigen werden, einen direkten Weg giebt, auf dem die Werte der Logarithmen bestimmt, ihr Zusammenhang klar gelegt, und eine sichere Überzeugung von

der Richtigkeit der für sie giltigen Regeln erzielt wird. Bisher gründete sich das Vertrauen auf die Unfehlbarkeit logarithmischer Berechnungen oft mehr nach physikalischem Erkennen auf das Gelingen vieler Zahlen-Experimente, als auf theoretische Einsicht. Die Berechnung der Logarithmen galt für einen wenig ersprieſslichen Abschnitt, dem möglichst wenig Zeit gewidmet werden sollte, nur aus mathematischer Gewissenhaftigkeit, weil es doch einmal Brauch sei, nichts auf Treu und Glauben annehmen zu lassen, wurde er nicht ganz übergangen[1]), sondern eine der elementaren Methoden von abschreckender Länge und geringer Ergiebigkeit durch ein Beispiel erläutert. Auf diese Weise kann man allerdings die staunenswerte Arbeitskraft und den Fleifs der ersten Berechner in helles Licht stellen, aber in weit höherem Mafse hat ihr Scharfsinn und mathematischer Blick Anspruch auf Bewunderung. Diesem verdankten sie die Methoden, welche die Mühe der Berechnung aufserordentlich verringerten. Lange bevor die jetzt durch Gerhardt entschiedene Streitfrage auftauchen konnte, ob die Anwendung des Zeichens d die Erfindung der Differentialrechnung wäre, hatte Neper seine Funktion log x durch die Differentialgleichung $dy = dx/x$ definiert, und nicht nur, was heut in ähnlichen Fällen ausreicht, ihre Existenz und Stetigkeit bewiesen, sondern sie auch durch Aufstellung einer Tafel zu allen Anwendungen geschickt gemacht. In Briggs Trigonometria Britannica (1633) findet man viele Sätze, die man gewöhnlich einer weit späteren Zeit zuschreibt. Nicht Newton (1642—1727) hat gefunden, dafs die Binomial-Koeffizienten der $n$ten Potenz die Werte $n/1$, $n(n-1)/1 \cdot 2$, $n(n-1)(n-2)/1 \cdot 2 \cdot 3$ etc. haben, sondern Briggs, der für seinen abacus παγχρησιος zwar nicht diese Formeln, aber entsprechende Sätze aufstellt. Das Verdienst Newtons beschränkt sich darauf, dafs er die Bedeutung der Binomial-Entwicklung für gebrochne Werte von n erkannte. Briggs zeigte ferner den Zusammenhang dieser Koeffizienten mit denjenigen, die auftreten, wenn man die Sehnen vielfacher Bogen durch die der einfachen ausdrückt. Ja er vermochte, aus der Formel für die Sehne des 3, 5, 7fachen Bogens umgekehrt die Sehne des einfachen Bogens zu finden, wenn die des gröfseren bekannt war, indem er ohne irgend welches Näherungsverfahren, Ziffer für Ziffer, die Wurzel der Gleichung 3, 5, 7ten Grades auf viele Stellen berechnete. Sein Verfahren ist dasselbe, welches wir heute auf die Berechnung von Kubikwurzeln beschränken. (S. Anh. 1.) Er schuf ferner eine Methode, mit Hilfe von Differenzen zu interpolieren, die später von Cotes reproduziert wurde, und die heute sehr unbekannt ist. Sie besteht darin, dafs man aus den ersten und höheren Differenzen irgend einer Tafel, die durch Interpolation auf ein 3, 5, 7mal kleineres Intervall gebracht werden soll, die Differenzen der gesuchten neuen Tafel herleitet, und aus diesen durch blofses Addieren die Tafelwerte entstehen läfst. (S. Anh. 2.) Dagegen wenden die heutigen Interpolations-Methoden die Differenzen der ursprünglichen Tafel an, indem sie den aus ihnen hergestellten Ausdruck für das $n$te Glied auch für Bruchwerte von n gelten lassen. Sie erfordern daher nicht blofse Addition, sondern auch Multiplikationen mit den nicht ganzzahligen Binomial-Koeffizienten.

Die historische Mitteilung mathematischer Wahrheiten, die für die Tafeln der Logarithmen und der Sinus üblich ist, droht weiter um sich zu greifen. Ein neuerer Vorschlag geht dahin, auch die Berechnung des Kreises durch die ein und umschriebenen Polygone nur noch historisch mitzuteilen, um die damit verbundenen langweiligen

---

[1]) S. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht, Berlin 1886.

Rechnungen zu vermeiden. Wir meinen dagegen, dafs diese Mühen sich reichlich dadurch lohnen, dafs der Lernende einen wirklichen Einblick in eine der gröfsten Entdeckungen des Archimedes erhält. Es giebt keinen mühelosen königlichen Weg zu den Wissenschaften.

Die Logarithmen.

Um die Eigenschaften der Logarithmen einfach zu verdeutlichen, kann man, wie schon Briggs that, etwa von der Reihe

$$5 = 5^1,\ 25 = 5^2,\ 125 = 5^3,\ 625 = 5^4,\ 3125 = 5^5,\ 15625 = 5^6 \ldots$$

ausgehen, die durch wiederholtes Multiplizieren mit 5 entsteht, und zeigen, dafs man Zahlen, die sich darin finden, multiplizieren kann, indem man nur die zur Summe der Exponenten gehörige Zahl aufsucht. Dieses Verfahren ist aber nur für wenige Zahlen anwendbar, weil die Tabelle sehr grofse Zwischenräume aufweist, ein Übelstand, dem sich abhelfen läfst, wenn man statt der Zahl 5 eine andere wählt, die nur wenig gröfser als 1 ist. Neper bemerkt, dafs man arithmetische Reihen immer leicht berechnen könne, geometrische aber nur dann, wenn der beständige Multiplikator sich von 1 um eine dezimale Einheit oder auch um die Hälfte einer solchen unterscheidet. So berechnete Neper selbst Potenzen von $(1 - 1/100)$, ferner von $(1 - 1/2000)$, endlich auch von $(1 - 10^{-7})$. Der Schweizer Byrg, dessen Progressions-Tafeln 1620 in Prag erschienen, legte eine nach dem Verhältnis $(1 + 10^{-4})$ fortschreitende Reihe zu Grunde. Uns genügt eine Reihe der Potenzen von $(1 + 1/100)$.

Wir knüpfen diese an eine leicht verständliche Aufgabe an. Es ist schon bemerkt worden[1]), dafs die mit den natürlichen Logarithmen zusammenhängende Zahl $e = \lim (1 + 1/n)^n \quad (n = \infty)$ den Wert eines zu 100% ausgeliehenen Kapitals nach Jahresfrist darstelle, wenn die Zinsen beständig zum Kapital fliefsen. In dieser Form ist aber der Vergleich wegen des ungebräuchlichen Zinsfufses wenig anschaulich. Wir betrachten daher ein Kapital, welches zu 1% bei jährlichen Zinsterminen ausgeliehen ist. Aus einigen Beispielen, die das Wachstum eines bestimmten Kapitals verfolgen, indem die Zinsen Jahr für Jahr berechnet und zu dem Kapital gelegt werden, ergiebt sich bald, dafs man hier nicht fragen mufs, „um wieviel", sondern „wieviel mal" wird das Kapital gröfser, wenn die Antwort einheitlich ausfallen soll. Auch erkennt man bald, dafs sich der wesentliche Teil der immer wiederkehrenden Rechnungen ein für allemal ausführen und durch eine Tabelle ersetzen läfst. Da diese auf den jedesmaligen zufälligen Wert des Kapitals keine Rücksicht nehmen kann, so liegt es nahe, eine einzige Mark als Kapital zn Grunde zu legen. Die unten folgende Tabelle (A) giebt also an, auf wieviel ein Kapital von 1 Mark nach 1, 2, 3, ... Jahren durch Zinseszins zu 1% anwächst. Sie ist mit sehr geringer Mühe berechnet, indem man zu jedem Gliede immer seinen 100ten Teil zulegte. Da dieser sich durch blofse Verschiebung des Komma gegen die Ziffern oder der Ziffern gegen das Komma bilden läfst, so kann man beim Anblick des einen Gliedes das folgende sofort hinschreiben, indem man von rechts nach links jede Ziffer um die zweite voraufgehende vermehrt. Da immer auf eine etwaige Erhöhung

[1]) Ed. Fischer, Elementar-Mathematik, Berlin, 1891, Teil I, S. 116.

der letzten Stelle Rücksicht genommen ist, so beträgt auch in den letzten Gliedern die Unsicherheit nicht mehr als drei bis vier Einheiten der 8ten Stelle. Es ergiebt sich z. B. nach dem binomischen Lehrsatz $1{,}01^{100} = 2{,}7048\,1383$ und $1{,}01^{200} = 7{,}3160\,1785$.

Tabelle A.

Jahre.	Mark.	Jahre.	Mark.	Jahre.	Mark.	Jahre.	Mark.
0	1	23	1,2571 6300	46	1,5804 5884	69	1,9868 9441
1	1,01	24	1,2697 3463	47	1,5962 6343	70	2,0067 6335
2	1,0201	25	1,2824 3198	48	1,6122 2606	75	2,1091 2844
3	1,0303 01	26	1,2952 5630	49	1,6283 4832	80	2,2167 1519
4	1,0406 0401	27	1,3082 0886	50	1,6446 3180	85	2,3297 8994
5	1,0510 1005	28	1,3212 9095	51	1,6610 7812	90	2,4486 3265
6	1,0615 2015	29	1,3345 0386	52	1,6776 8890	95	2,5735 3753
7	1,0721 3535	30	1,3478 4890	53	1,6944 6579	100	2,7048 1381
8	1,0828 5670	31	1,3613 2739	54	1,7114 1045	110	2,9877 9719
9	1,0936 8527	32	1,3749 4066	55	1,7285 2455	120	3,3003 8688
10	1,1046 2212	33	1,3886 9007	56	1,7458 0980	130	3,6456 8038
11	1,1156 6834	34	1,4025 7697	57	1,7632 6790	140	4,0270 9921
12	1,1268 2502	35	1,4166 0274	58	1,7809 0058	150	4,4484 2288
13	1,1380 9327	36	1,4307 6877	59	1,7987 0959	160	4,9138 2638
14	1,1494 7420	37	1,4450 7646	60	1,8166 9669	170	5,4279 2131
15	1,1609 6894	38	1,4595 2722	61	1,8348 6366	180	5,9958 0199
16	1,1725 7863	39	1,4741 2249	62	1,8532 1230	190	6,6230 9554
17	1,1843 0442	40	1,4888 6371	63	1,8717 4442	200	7,3160 1788
18	1,1961 4746	41	1,5037 5235	64	1,8904 6186	210	8,0814 3522
19	1,2081 0893	42	1,5187 8987	65	1,9093 6648	220	8,9269 3215
20	1,2201 9002	43	1,5339 7777	66	1,9284 6014	230	9,8608 8674
21	1,2323 9192	44	1,5493 1755	67	1,9477 4474	231	9,9594 9561
22	1,2447 1584	45	1,5648 1073	68	1,9672 2219	232	10,0590 9057

Wir erkennen aus der Tabelle, dafs das Kapital nach etwa 70 Jahren sich verdoppelt nach 110 Jahren sich verdreifacht, nach 139 Jahren 4 mal, endlich nach 231 Jahren etwa 10 mal gröfser wird. Für den vorliegenden Zweck ist es ausreichend, die Tabelle auf 4 Stellen durch abgekürzte Multiplikation zu berechnen, oder sogar, wie in folgenden Auszug (B) sie auf 3 Dezimalstellen abzukürzen.

In Tabelle B stehen die Zehner der die Ausleihefrist darstellenden Zahl von Jahren links am Rande, die zugehörigen Einer sind am oberen Rande aufzusuchen. Die Zahl welche angiebt, auf wieviel 1 M., oder in welchem Verhältnis jedes beliebige Kapital gewachsen ist, steht am Kreuzungspunkt von Zeile und Kolonne.

Es ist wesentlich, bei der Anwendung dieser Tabelle von Potenz-Sätzen keinen Gebrauch zu machen. Es sei $a = 2{,}548$ und $b = 1{,}909$. Ein Kapital wird a mal gröfser in $\alpha = 94$ Jahren, b mal in $\beta = 65$ Jahren. Soll nun ab gefunden werden, so sei das Kapital auf einen Zeitraum ausgeliehen, der sich aus α und β oder aus β und α zusammensetzt, also 159 Jahre beträgt. In diesem wird erst aus 1 M. a M., nachher aus jede

der a M. wieder b M., im ganzen also aus 1 M. ab M. Man findet daher unter 159 Jahr das Resultat $ab = 4{,}865$, welches durch abgekürzte Multiplikation zu bestätigen ist.

Tabelle B.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	1,010	1,020	1,030	1,041	1,051	1,062	1,072	1,083	1,094
1	1,105	1,116	1,127	1,138	1,149	1,161	1,173	1,184	1,196	2,208
2	1,220	1,232	1,245	1,257	1,270	1,282	1,295	1,308	1,321	1,335
3	1,348	1,361	1,375	1,389	1,403	1,417	1,431	1,445	1,460	1,474
4	1,489	1,504	1,519	1,534	1,549	1,565	1,580	1,596	1,612	1,628
5	1,645	1,661	1,678	1,694	1,711	1,729	1,746	1,763	1,781	1,799
6	1,817	1,835	1,853	1,872	1,890	1,909	1,928	1,948	1,967	1,987
7	2,007	2,027	2,047	2,068	2,088	2,109	2,130	2,152	2,173	2,195
8	2,217	2,239	2,261	2,284	2,307	2,330	2,353	2,377	2,400	2,424
9	2,449	2,473	2,498	2,523	2,548	2,574	2,599	2,625	2,652	2,678
10	2,705	2,732	2,759	2,787	2,815	2,843	2,871	2,900	2,929	2,958
11	2,988	3,018	3,048	3,078	3,109	3,140	3,172	3,203	3,235	3,268
12	3,300	3,333	3,367	3,400	3,434	3,469	3,503	3,538	3,574	3,610
13	3,646	3,682	3,719	3,756	3,794	3,832	3,870	3,909	3,948	3,987
14	4,027	4,067	4,108	4,149	4,191	4,233	4,275	4,318	4,361	4,404
15	4,448	4,493	4,538	4,583	4,629	4,675	4,722	4,769	4,817	4,865
16	4,914	4,963	5,013	5,063	5,113	5,164	5,216	5,268	5,321	5,374
17	5,428	5,482	5,537	5,592	5,648	5,705	5,762	5,819	5,878	5,936
18	5,996	6,056	6,116	6,177	6,239	6,302	6,365	6,428	6,493	6,558
19	6,623	6,689	6,756	6,824	6,892	6,961	7,031	7,101	7,172	7,244
20	7,316	7,389	7,463	7,538	7,613	7,689	7,766	7,844	7,922	8,001
21	8,081	8,162	8,244	8,326	8,410	8,494	8,579	8,664	8,751	8,839
22	8,927	9,016	9,106	9,197	9,289	9,382	9,476	9,571	9,667	9,763
23	9,861	9,959	10,059							

Z 10,000 = 231,41 Jahre = 1 Cyklus.

Um a/b zu finden, nimmt man an, das Kapital von 1 M. sei zunächst auf ε Jahre ausgeliehen worden, so dafs man erwarten konnte, a M. dafür zurückzuerhalten. Die Ausleihefrist wird aber durch spätere Verabredung um β Jahre verkürzt. Da jede Mark in diesen β Jahren auf den b fachen Wert hätte anwachsen können, was nun nicht

geschieht, so ist der Endwert des Kapitals nur der $b$te Teil des erwarteten, also finde sich unter $\alpha - \beta = 29$ Jahr der gesuchte Wert $a/b = 1{,}335$, der durch abgekürzt Division zu bestätigen ist.

Um a^2 zu finden, denkt man sich ein Kapital erst auf die Periode α, dan abermals das erhaltene Endkapital auf eine gleiche Periode ausgeliehen, es wird dadurc a mal und wieder a mal gröfser, also findet sich a^2 bei dem Zeitraum $2\alpha = 188$ Jah und ist $= 6{,}493$.

Ist endlich $\sqrt{a}$ zu berechnen, so zerlegt man die Zeit α in 2 gleiche Perioder wächst das Kapital in einer von diesen auf den x-fachen Wert, so wird es in beide zusammen x^2 mal gröfser, also ist $x^2 = a$, $x = \sqrt{a}$. Man findet also unter $\frac{1}{2}\alpha = 47$ de Wert $\sqrt{a} = 1{,}596$, der durch abgekürztes Ausziehen der Quadratwurzel zu bestätigen is

Um die Tabelle auch für Zahlen brauchbar zu machen, die nicht in ihr vor kommen, könnte man sich etwa denken, dafs sie nur einen Auszug aus einer vierma reichhaltigeren Tabelle darstellte, welche die Werte eines Kapitals mit vierteljährige Zinsterminen enthielte. Der Zinsfufs dürfte dann streng genommen nicht 1% sein, sonder müfste so gewählt werden, dafs der Wert von 1 M. nach 4 Zinsterminen auf 1,01 M. käm Man sieht aber in unserer Tabelle, wenn man die Zinsen während eines Jahres m denen während des folgenden vergleicht, dafs diese fast gleich sind, dafs also für di Zeit von zwei Jahren die Zinseszins-Berechnung von einer einfachen Zinsrechnung kaun verschieden ist. Um so mehr würde dies in der erwähnten, auf Vierteljahre ausgedehnte Tabelle der Fall sein, wenn man das Wachstum während verschiedener Quartale desselbe Jahres mit einander vergleicht. Man kann daher in der Tabelle B, sogar auch in eine auf 4 Dezimalstellen ausgedehnten Tafel die Einschaltungen so vornehmen, als ob di Zinsen während des Jahres gleichmäfsig wüchsen und einem festen, nicht beständig ver änderlichen, Kapitalswerte, der am Anfang des Jahres vorhanden war, entsprächen. E wird nicht nötig sein, dies gleich anfangs genau zu begründen, begnügt man sich doc auch bei den Sinus-Tafeln mit einer linearen Interpolation, die man aus dem Anblic der Tafel, nicht aber aus dem wahren Verhalten der Sinus-Funktion rechtfertigt.

Wird z. B. der Wert des Kapitals von 1 M. nach 40,7 Jahren gesucht, so finde man, unter $Z = 40$, $W = 1{,}489$. Die Buchstaben Z und W sind Abkürzungen für Ze und Wachstum. Während des 41ten Jahres wächst das Kapital von 1,489 auf 1,504, di Zinsen dieses Jahres betragen also 15 Einheiten der dritten Dezimalstelle, auf 0,7 Jahr entfallen also $0{,}7 \cdot 15 = 11$ Einheiten, der für $Z = 40{,}7$ gesuchte Wert von W ist als $= 1{,}500$. Hierbei ist ein Vorzug augenfällig, den unsere Tafel für das Einschalten bietet man braucht, nach der Art des Aufbaus der Tafel, die Tafeldifferenzen nicht wirklic zu berechnen, sondern erhält sie, wenn man nur von der kleineren Zahl die beiden letzte Ziffern abstreicht. Es erinnert dies an die Eigenschaft der Exponential-Funktion, da sie mit ihrem Differential-Quotienten übereinstimmt.

Es sei umgekehrt ein in der Tabelle nicht enthaltener Wert von W gegeben und es werde die Zeit Z gesucht. Z. B. sei gefragt, wann ein Kapital genau de 10fachen Wert erreicht. Eine Ausleihefrist von 231 Jahren ist zu klein, von 232 Jahre zu grofs. In der Zwischenzeit wächst das Kapital von 9,959 auf den folgenden Wer also um $99{,}5 = 100$ Einheiten der letzten Stelle, es würde um 1 Einheit in 1/100 Jah

oder in etwa $3^1/_2$ Tagen wachsen. Soll das Kapital von 9,959 auf 10,000, d. h. um 41 Einheiten letzter Stelle zunehmen, so mufs jene kleine Frist von 1/100 Jahr 41 mal verfliefsen, also ist im ganzen $Z(10{,}000) = 231^{41}/_{100} = 231{,}41$ Jahr. Dieser Zeitraum ist sehr wichtig, er ermöglicht erst die Berechnung von Aufgaben, deren Zahlen den Rahmen der Tabelle überschreiten. Wird ein beliebiges Kapital, z. B. 3,456 M. auf 231,41 Jahre ausgeliehen, so wächst es durch Werte hindurch, die mit den verschiedensten Ziffern geschrieben werden, bis es schliefslich den Wert 34,56 M. erreicht, der wieder die ursprünglichen Ziffern zeigt, die nur ihre Stellung gegen das Komma um einen Platz verschoben haben. Nach abermals 231,41 Jahren geht der Kapitalswert, der nun $= 345{,}6$ geworden ist, wieder durch die früheren Ziffern hindurch, so jedoch, dafs jede wieder die nächst höhere Einheit bedeutet. Aus diesem Grunde scheint es gerechtfertigt, diesem Zeitraum von 231,41 Jahren den Namen Cyklus beizulegen. Nach jedem Cyklus kehrt der Wert des Kapitals in gewissem Sinne wieder zu seinem Ausgang zurück und wiederholt von neuem die in unserer Tabelle dargestellte Entwicklung.

Es sei beispielsweise der Wert eines seit Chr. Geb. zu 1% ausgeliehenen Kapitals von 1 M. für das Ende des Jahres 1892 zu bestimmen. In diesem Zeitraum ist ein Cyklus 8mal und aufserdem die Zeit von 40,7 Jahren enthalten. In 8 Cyklen wächst das Capital auf 100000000 M., in 40,7 Jahren wird es, wie oben gefunden, noch 1,500 mal gröfser, der Endwert ist also 150000000 M. — Wäre es zu 4% ausgeliehen, so wüchse es in 1 Jahr in dem Mafse, wie unter den Annahmen der Tabelle erst in $3^{10}/_{11}$ Jahren oder genauer nach den 4stelligen Werten, in $3^{97}/_{103}$ Jahren. Es erreicht also denselben Endwert, wie wenn es unter den Bedingungen der Tabelle $1892 \cdot 3^{97}/_{103} = 7457$ Jahre ausgeliehen wäre. Dieser Zeitraum umfafst 32 Cyklen und 52 Jahre, das Endkapital ist also $= 1{,}68 \cdot 10^{32}$ M.

Wird der Wert von a^2 für $a = 6{,}543$ gesucht, so ergiebt sich die zu a gehörige Zeit α oder $Z(a) = 188^{50}/_{65} = 188{,}77$ Jahr, also $Z(a^2) = 2\alpha = 377{,}54$ Jahr. Da diese Zeit über den Bereich der Tabelle hinausgeht, so zerlegt man sie in einen Cyklus und 146,13 Jahre, und findet so $a^2 = 10 \cdot 4{,}281 = 42{,}81$, was wieder mit dem Resultate der Multiplikation zu vergleichen ist.

Endlich sei a/b für $a = 2{,}705$, $b = 8{,}927$ zu berechnen. Hierzu gehören $\alpha = 100$, $\beta = 220$. Nimmt man an, dafs das Kapital bei Beginn unserer Zeitrechnung ausgeliehen sei, so ist es am Ende des Jahres 100 auf den $a$fachen Wert gestiegen. Um diesen nach dem früheren Verfahren $b$mal zu verkleinern, müfste man um β Jahre zurückgehen, d. h. auf den Zeitpunkt $\alpha - \beta = -120$ gelangen. Da dieser vor dem Beginn unserer Zeitrechnung liegt, so sind wir gezwungen, anzunehmen, dafs das zu Grunde gelegte Kapital, welches bei Chr. Geb. 1 M. betrug, schon in den vorangegangenen Zeiten sich allmählich durch Zinseszinsen aus kleinen Anfängen entwickelt habe, dafs es zur Zeit — 231,41 nur 0,1 M., zur Zeit — 462,82 nur 0,01 M. u. s. f. betragen habe. Wir finden dann die gesuchte Zahl innerhalb des unserer Tabelle vorausgehenden Cyklus bei dem Zeitpunkt — 120, der also 120 Jahre vom Ende jenes Cyklus entfernt ist. Um unsere Tabelle B benutzen zu können, müssen wir aber die Zeit vom Anfang des betreffenden Cyklus zählen, das geschieht, indem wir 120 durch 111,41 zu einem vollen Cyklus ergänzen, oder kurz, es ist umzusetzen $\alpha - \beta = -120$ Jahr in $\alpha - \beta = -1$ Cyklus $+ 111{.}41$ Jahr.

Das Kapital, welches bei Chr. Geb. = 1 M. ist, beträgt aber einen Cyklus früher 0,1 M und wird in den folgenden 111,41 Jahren 3,030 mal gröfser, folglich ist $a/b = 0{,}303($

Der letzte Abschnitt zeigte die Notwendigkeit, jede Anzahl von Jahren in ein positive oder negative Zahl von Cyklen, und in eine positive Zahl von Jahren zu zer legen, die nur einen Bruchteil eines Cyklus ausmacht. Jener Bestandteil bildet di Charakteristik, ein schon von Briggs angewandtes Wort, dieser die Mantisse, d. h. Zugabe eine Bezeichnung, deren Urheber noch unbekannt ist (s. Anh. 3), die aber sehr geschick gewählt ist, da es in dem Wesen einer Zugabe liegt, immer ein positiver Bruchteil de zugemessenen Mafses zu sein. Die Ausdrucksweise, dafs man die negativen Mantisse von briggischen Logarithmen in positive verwandeln müsse, ist daher unstatthaft, auc darf man nicht sagen, der log nat 20 = 2,996 habe die Charakteristik 2 und die Mantiss 0,996. Denn diese Bezeichnungen sind nicht überflüssige Synonyma für Ganze un Decimalstellen, sondern deuten darauf hin, dafs man irgend welchem Logarithmensyster eine für unser Zahlensystem passende Einrichtung gegeben hat.

Da auch Byrg seine Progressionstafel, d. h. eine nach dem Verhältnis 1,000 fortschreitende geometrische Reihe nur so weit fortgesetzt hat, bis aus 1 nahezu 1 wurde, so müssen die im obigen entwickelten Gedanken auch ihn geleitet haben.

Um im Unterricht den Nutzen der Tafel hervortreten zu lassen, wird man si nicht nur auf die beschriebenen einfachen Aufgaben anwenden, die sich oft direkt leichte lösen lassen, sondern auch zusammengesetzte Ausdrücke, wie $w = \sqrt[7]{a\,b^2/c^3}$ nach $Z(w = (\alpha + 2\beta - 3\gamma)/7$ berechnen. Immerhin aber erscheint es mifslich, dafs man so o eine Zahl von Cyklen, die nach Jahren ausgedrückt immer als 5ziffrige Zahl sich da stellt, den Zahlen der Tafel hinzufügen mufs, da z. B. $Z(1893) = Z(1{,}893) + 3$ Cykle zu setzen ist. Eine Hilfstafel enthaltend die Vielfachen eines Cyklus würde diese Rechnunge zwar etwas abkürzen, aber der Gedanke liegt nahe, sie ganz zu beseitigen, indem man ei für alle Male die ganze Tabelle so umrechnet, dass die zu jedem W von 1,00, 1,01 ... bi 10,00 gehörenden Zeiten nicht in Jahren, sondern in Cyklen gemessen werden. Daz sind alle Zahlen, die eine Menge von Jahren bedeuten, durch 231,41 zu dividieren, ode mit dem reciproken Wert 0,004 321 4 zu multiplizieren. So wird

$Z\,9{,}000 = 220^{73}/_{89}$ J. = 220,82 J. = 0,954 24 Cyklen,
$Z\,1{,}893 = 64^{3}/_{19}$ J., genauer $= 64^{26}/_{189}$ J. = 64,138 J. = 0,277 16 Cyklen,
$Z\,2{,}000 = 69^{13}/_{20}$ J., genauer $= 69^{131}/_{199}$ J. = 69,658 J. = 0,301 02 Cyklen.

Die genaueren Bestimmungen für kleine Zahlen ergeben sich aus der früher erwähnte Tabelle mit 4 Dezimalstellen. Die 5. Dezimalstelle ist nicht immer sicher.

Nach dieser Umwandlung gehört zu $W = 10$ die Zeit von 1 Cyklus, zu $W = 10($ und 1000 also die Zeit von 2 oder 3 Cyklen. Wie man nun diese nach 2 und 3 Cykle bestehenden Werte abkürzend mit 10^2 und 10^3 bezeichnet, so kann man mit 10^α allgemei den Wert nach α Cyklen bezeichnen, dann wird $10^{-1} = 1/10$, $10^{2\frac{3}{5}}$ der Wert nac $2^3/_5$ Cyklen $= 10^2\,(\sqrt[5]{10})^3$. Die jetzt in Cyklen ausgedrückten Zeiten sind also die Briggi schen Logarithmen. Unsere Tafel B bildet daher die Grundlage einer 5stellige Logarithmentafel.

Der Name Logarithmus, Zahl der Verhältnisse, ist am leichtesten verständlich für die Zahlen Z unserer ursprünglichen Tabelle. Ist $Z(2{,}007) = 70$, so wird ein Kapital dadurch 2,007 mal gröfser, dafs es 70 mal im Verhältnis 1 : 1,01 vergröfsert wird, oder es steckt in dem Verhältnis 1 : 2,007 das normale Verhältnis siebenzig mal. Man wird den Zahlen den Namen Logarithmus auch dann nicht entziehen, wenn man das Mafs der Zeit verändert, nur ist dann die nach 1 Cyklus erreichte Vergröfserung von 1 auf 10 als normales Verhältnis anzusehen, durch welches sich teils in ganzen Zahlen, teils in Bruchzahlen andere messen lassen. In diesem Sinne hatte das erste System die Basis 1,01, das Briggische die Basis 10.

Eine andere Wahl des Zeitmafses bringt unser System dem natürlichen sehr nahe. Mifst man die Zeit nach Jahrhunderten (H), so wird

$$Z(2) = 0{,}696\,58\,H \qquad Z(9) = 2{,}2082\,H \qquad Z(10) = 2{,}3141\,H$$

während $\log \text{nat } 2 = 0{,}693\,15$ $\log \text{nat } 9 = 2{,}1972$ $\log \text{nat } 10 = 2{,}3026$ ist.

Als Basis hat man dann das Wachstum des Kapitals zu betrachten, welches nach 1 Jahrhundert erreicht ist, also die Zahl $1{,}01^{100} = 2{,}705$, welche der Zahl $e = 2{,}718$ nahe kommt.

Durch eine an Nepers Gedankengang sich anschliefsende Betrachtung leitet man hieraus die natürlichen Logarithmen selbst ab. Um nämlich für noch genauere Rechnungen, als sie sich mit unserer Tafel leisten lassen, eine Grundlage zu haben, müfste man statt der Potenzen von $(1 + 1/100)$ etwa mit Byrg die von $(1 + 1/10\,000)$ berechnen. Man kann auch eine solche Tafel durch eine Zinseszinsaufgabe deuten. Die Zinsen müfsten je nach 1/100 Jahr oder 1/10 000 Jahrhundert zum Kapital fliefsen, und müfsten für diese kurze Zeit auf 1/10 000 des Kapitals normiert werden. Dies würde, nach einfacher Zinsrechnung, für 1 Jahr unsern Zinsfufs von 1 % ergeben, thatsächlich kommt es wegen der Zinseszinsen auf einen etwas höheren Zinsfufs hinaus. Diese Tafel enthielte etwa 100 mal mehr, aufserdem längere Zahlen als die unsrige, oder auch, die unsrige ist nahezu ein Auszug aus der Byrgschen, immerhin mit geringen Unterschieden wegen des ein wenig verschiedenen Zinsfufses. Wenngleich nun unsere Tafel praktisch besser ist als jener Auszug, da nur sie die Tafeldifferenzen auf den ersten Blick, ohne Subtraktion, zeigt, so würde doch vom theoretischen Standpunkte jener Auszug vollkommener erscheinen, und in noch höherem Grade ein Auszug aus einer Tafel der Potenzen von $(1 + 10^{-7})$ oder von $(1 + 10^{-n})$ für noch gröfsere Werte von n.

Man kann nun unsere Tafel in jenen Auszug einer vollkommenen Tafel verwandeln. Auch in letzterer würde das Kapital einmal von 1 auf 1,01 wachsen, dazu wäre aber nicht ganz 1 Jahr nötig. Denn wenn ein Kapital wächst, so wachsen in demselben Mafse auch die Zinsen, die es trägt, wächst es allmählich von 1 auf 1,01, so nimmt auch der Zinsertrag in diesem Verhältnis zu, und er ist im Durchschnitt so grofs, als ob das Kapital weder, wie zu Anfang, $= 1$, noch, wie zu Ende, $= 1{,}01$ gewesen wäre, sondern als ob es den mittleren Wert $(1 + 1/200)$ gehabt hätte, d. h. es wird schon nach einer $(1 + 1/200)$ mal kürzeren Zeit, als 1 Jahr ist, den Wert 1,01 erreichen. So werden auch zur Erreichung des Wertes $1{,}01^{\alpha}$ nicht α Jahre, sondern $\alpha/(1 + 1/200)$ Jahre $= \alpha/100\,(1 + 1/200)$ Jahrhunderte nötig sein. Kurz man hat alle Zahlen, welche eine Zeit angeben, durch $(1 + 1/200)$ zu dividieren. So werden aus den obigen, nach

Jahrhunderten ausgedrückten Werten von $Z(2)$, $Z(9)$, $Z(10)$ die darunter stehenden natürlichen Logarithmen erhalten. Als Basis hat jetzt dasjenige Wachstums-Verhältnis des Kapitals zu gelten, welches nach früherer Zählung zu $(1+1/200)$ Jahrhundert $= 100{,}5$ Jahren gehörte. Da findet man $2{,}7183 = e$.

Unser Verfahren bietet also einen natürlichen Weg zu den natürlichen Logarithmen. Die gewöhnliche Definition, sie seien die Logarithmen, welche zu der nicht einmal genau angebbaren Basis 2,718.. gehörten, kann das Wesen der Sache unmöglich erfassen. In der That sind auch nicht die natürlichen Logarithmen zuerst mit Rücksicht auf irgend eine Basis definiert worden, sondern haben erst aus sich den Begriff der letzteren entstehen lassen. Baltzer rechtfertigt den Namen „natürliche Logarithmen“ durch die Behauptung, sie seien die einzigen, die sich direkt ohne Eingrenzung berechnen liefsen. Aber jede Berechnung einer konvergenten Reihe ist doch auch nur eine Annäherung, und wie die natürlichen, so sind auch die künstlichen Logarithmen durch Reihen darzustellen, da der unterscheidende Faktor selbst als ein natürlicher Logarithmus aufzufassen ist.

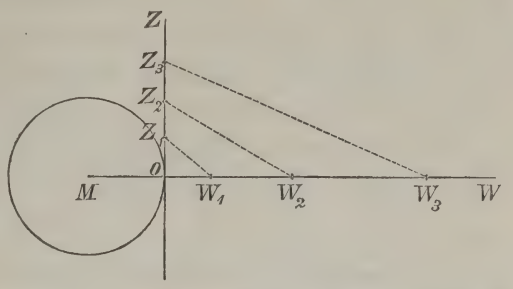
Nepers natürliche Logarithmen.

Es ist sehr verdienstlich, dafs Wittstein durch die Bemerkungen in der Einleitung zu seiner Tafel zur Verbreitung geschichtlicher Kenntnisse über die Logarithmen beiträgt. Die scheinbare Verschiedenheit zwischen unseren jetzigen natürlichen Logarithmen und den Neperschen beruht nach seiner Darstellung grofsenteils darauf, dafs man ehemals, wenn man auch beim Rechnen die ganzen Zahlen durch Dezimalstellen verlängerte, doch in den fertigen Tafeln das Komma möglichst vermied, und deshalb stillschweigend statt der wahren Einheit eine abgeleitete dezimale Einheit zu Grunde legte. So wurde in siebenstelligen Sinustafeln gedruckt: $\sin 30° = 5\,000\,000$, darunter werden Teile verstanden, deren das Ganze, der Radius oder Sinus totus, 10 000 000 enthält. Wer wollte deshalb behaupten, die damaligen Sinus seien von unserer heutigen Funktion durchaus verschieden, damals sei 1 der Sinus von 1/50″ gewesen, heute von 90°? Auch heute stehen in unsern logarithmisch-trigonometrischen Tafeln viele Logarithmen, deren Zahlen 10^{10}mal zu grofs angenommen sind. Ähnlich würde Neper nicht die Zahl 2,000 000 0 dem Logarithmus 0,693 1472 zuordnen, sondern ohne Komma den Numerus gleich 20 000 000 den Logarithmus $= 6\,931\,472$ setzen.

Wittstein glaubt aber noch einen zweiten praktisch geringfügigen, aber doch wesentlichen Unterschied zu finden, indem er fälschlich annimmt, Nepers Logarithmen seien als Exponenten der Grundzahl 1,000 000 1 aufzufassen. Dann bestände in der That ein ähnliches Verhältnis wie wir es oben bei der Umwandlung unserer Tafel der Potenzen von 1,01 in eine natürliche Logarithmentafel darlegten. Um diesen weit verbreiteten Irrtum, den schon Kästner und Klügel bekämpft haben, zu beseitigen, werden wir Nepers Verfahren im folgenden, dem Wesen nach, möglichst kurz, darlegen. Das Vorherrschen der irrigen Auffassung ist wohl dadurch zu erklären, dafs Nepers nachgelassenes, von seinem Sohne 1619 herausgegebenes Werk Mirifici logarithmorum canonis constructio, in dem er sein Verfahren genau darlegt, wenig verbreitet war, die der ersten Ausgabe seiner Tafeln 1614 beigegebene Descriptio aber nur eine Anweisung

zum Gebrauche der fertigen Zahlen enthielt. Vor 3 Jahren ist die Constructio von William Rae Macdonald (Edinburg und London 1889) in englischer Übersetzung neu herausgegeben.

Wir knüpfen nach Neper an eine Bewegungsaufgabe an. Auf der Linie MW, die vom Mittelpunkt eines Kreises von 1 Meile Radius ausläuft, und auf der Linie OZ, die ihn in O berührt, bewegen sich zwei Wanderer, so dafs sie gleichzeitig die Station O passieren, oder zugleich von ihr aufbrechen. Der eine (Z) legt in jeder Stunde 1 Meile zurück, der andere hat anfangs dieselbe Geschwindigkeit, doch soll er sie beständig verändern, so dafs sie proportional bleibt seinem Abstande vom Punkt M.



Beziehen sich $OZ = z$ und $MW = w$ auf 2 gleichzeitige Orte der beiden Wanderer, so ist die Zeit, in welcher der eine die Strecke dz zurücklegt, $= dz$ Stunden, der zweite legt die Strecke dw mit der Geschwindigkeit w, also in dw/w Stunden zurück. Also ist die Nepersche Annahme nur eine Umschreibung für $dz = dw/w$, und sie kann daher nur zu den echten natürlichen Logarithmen führen.

Sind z_1 und w_1, ferner z_2 und w_2 zusammengehörige Werte, so wächst von der Zeit 0 bis zur Zeit z_1 der Abstand MW von dem Werte $MO = 1$, auf $MW_1 = w_1$, also im Verhältnis $1 : w_1$. Es ist leicht zu erkennen, dafs dies allgemein gilt; welchen Abstand auch der Wanderer W zu irgend einer Zeit von M haben mag, nach z_1 Stunden wird er durch seine Bewegung diesen Abstand w_1 mal gröfser gemacht haben. War er z. B. zur Zeit z_2 in W_2, so wird er zur Zeit $z_1 + z_2 = z_3$ in W_3 stehen und es wird sein $MW_3 = MW_2 \cdot w_1 = w_1 w_2$. Durch diese Eigenschaft, die mittels der Bezeichnung $z = \log w$ auf die Formel $\log w_1 w_2 = \log w_1 + \log w_2$ führt, ist der Zusammenhang zwischen z und w vollständig charakterisiert, wenn es nur noch gelingt, zu einem einzigen Werte von w den zugehörigen von z zu finden. Dies soll für $w = 1 + 10^{-7}$ geschehen. Während der Wanderer von O aus in den Punkt W vordringt, also die Strecke 10^{-7} auf der wagerechten Geraden zurücklegt, ist seine Geschwindigkeit nicht ganz konstant, sondern ändert sich von 1 bis $1 + 10^{-7}$ und zwar fast gleichmäfsig, im Mittel beträgt sie also $(1 + 1/2 \cdot 10^{-7})$ Meilen für die Stunde, die Zeit, welche der Wanderer braucht, ist daher nicht $= 10^{-7}$, sondern mit aufserordentlicher Genauigkeit $= 10^{-7}/(1 + 1/2 \cdot 10^{-7})$ oder $10^{-7} \cdot (1 - 1/2 \cdot 10^{-7})$ zu setzen. Es ist also $\log (1 + 10^{-7}) = 0{,}00000\ 00999\ 999950$. Erhebt man die Zahl $1 + 10^{-7} = 1{,}00000\ 01$, der man noch 9 Nullen anhängt, durch fortgesetztes Zufügen ihres 10 000 000 ten Teiles oder nach dem binomischen Satz in die 100 te Potenz, so wird

$$p = (1 + 10^{-7})^{100} = 1{,}00001\ 00000\ 4950, \quad (\text{fast} = (1 + 10^{-5}))$$

und $$\log p = 100 \log (1 + 10^{-7}) = 0{,}00000\ 99999\ 9950.$$

Wenn zwei Zahlen, w und w', einander so nahe liegen, wie hier p der Zahl 1,00001, so kann man den Unterschied ihrer Logarithmen, $z' - z$, leicht bestimmen. Denn da die Geschwindigkeit des Wanderers, während sein Abstand vom Kreismittelpunkt von w in w' übergeht, in gleichem Verhältnis wächst, so liegt die Zeit, in der er den Raum $w' - w$ durchläuft, zwischen $(w' - w)/w$ und $(w' - w)w'$. Der genaueste für sie anzugebende Wert ist $z' - z = (w' - w)/\frac{1}{2}(w' + w)$. Demnach ist

$$\log p - \log 1{,}00001 = 0{,}00000\ 00000\ 4950 : 1{,}00001$$
$$= 0{,}00000\ 00000\ 4950$$

also $$\log 1{,}00001 = 0{,}00000\ 99999\ 500.$$

Ebenso erheben wir uns von log 1,00001 zu log 1,00050. Durch eine mühelose Folge von Multiplikationen oder durch Anwendung des binomischen Satzes wird

$$q = (1 + 10^{-5})^{50} = 1{,}00050\ 01225\ 196, \text{ (fast gleich } 1{,}0005)$$

also $$\log q = 50 \log 1{,}00001 = 0{,}00049\ 999750$$

$$\log q - \log 1{,}0005 = 0{,}00000\ 01225\ 196 : 1{,}00050\ 006 = 0{,}00000\ 01224\ 58$$

demnach $$\log 1{,}0005 = 0{,}00049\ 98750\ 42.$$

Endlich kommen wir durch die leichte Berechnung der 20ten Potenz von $1{,}0005 = (1 + 1/2000)$ nahe an 1,01. Es ist:

$$r = (1 + 1/2000)^{20} = 1{,}01004\ 76428\ 0, \text{ (nahezu} = 1{,}01)$$

$$\log r = 20 \log 1{,}0005 = 0{,}00999\ 75008\ 4$$

$$\log r - \log 1{,}01 = 0{,}00004\ 764280 : 1{,}010024 = 0{,}00004\ 71700$$

folglich $$\log 1{,}01 = 0{,}00995\ 03308.$$

Dieser Logarithmus, in Verbindung mit dem vorhergehenden log 1,0005, dient nun zur Herstellung der Grundtafel, aus der man den Logarithmus jeder Zahl entnehmen kann. Denken wir uns eine Tafel mit doppeltem Eingang. Am oberen Rande mögen als Überschriften der 20 Kolonnen die Potenzen stehen

$$1{,}0005,\ 1{,}0005^2,\ 1{,}0005^3,\ \ldots\ 1{,}0005^{20}$$

von welchen die letzte nahezu $= 1{,}01$ ist. Am linken Rande mögen als Anfänge der Zeilen die Potenzen stehen

$$1{,}01,\ 1{,}01^2,\ 1{,}01^3,\ 1{,}01^4\ \ldots\ldots\ 1{,}01^{69}\ \ldots$$

Jedes Fach der Tabelle ist bestimmt, zwei Zahlen aufzunehmen, das Produkt des Zeilen- und des Kolonnenanfangs, und den zugehörigen Logarithmus. Die Zahlen der ersten Art bilden zeilenweis geometrische Reihen mit dem Verhältnis $(1 + 1/2000)$, kolonnenweis solche mit dem Verhältnis 1,01. Die erste Kolonne enthält z. B. die von uns in Tafel A auf 8 Dezimalstellen angegebene Reihe der Potenzen von 1,01. Sind die Zahlen zeilenweis berechnet, so lassen sich, wenn man sie kolonnenweis betrachtet, etwaige Rechenfehler entdecken.

Die zugehörigen Logarithmen lassen sich durch Addition der Logarithmen finden, die zu dem ersten Glied der Zeile und der Kolonne gehören. Und da die Logarithmen der ersten Zeile und der ersten Kolonne die Vielfachen von log 1,01 und log 1,0005 sind, so bilden wieder sämtliche Logarithmen sowohl nach Zeilen wie nach Kolonnen arithmetische Reihen. Man kann daher auch diesen Teil der Tabelle durch wiederholtes Hinzufügen fester Zahlen leicht auf 2 Arten berechnen.

Endlich ist zu beachten, dafs die letzte Zahl irgend einer Zeile mit der ersten der folgenden fast übereinstimmt.

Alle in die Grundtafel aufzunehmenden Zahlen werden auf 8 Dezimalstellen abgerundet. Das anfängliche Rechnen mit vielen Dezimalstellen hatte nur den Zweck, die aus der Rechnung mit unvollständigen Dezimalzahlen entspringenden Ungenauigkeiten

die sich durch die vielen Multiplicationen anhäufen, von den 7 ersten Stellen fern zu halten.

Soll nun log w gefunden werden, so sucht man die nächste Zahl w' der Tabelle, die von w höchstens um 1/4000 ihres Wertes verschieden ist, und entnimmt ihren Logarithmus $= z'$. Der gesuchte Logarithmus z ergiebt sich dann, wenn man zu z' die Differenz $(z - z')$ hinzulegt, für die man nach Belieben $(w - w')/w$ oder $(w - w')/w'$ setzen kann. Wir sehen also, dafs der schliefsliche Wert des Logarithmus durchaus ohne jede empirische Interpolation zu Stande kommt, und nur auf den Eigenschaften des natürlichen Logarithmus beruht.

Will man beispielsweise log nat 2 bestimmen, so benutzt man aus der Zeile, die mit $1{,}01^{69}$ beginnt, die Felder, welche zu den Kolonnen $1{,}0005^{13}$ und $1{,}0005^{14}$ gehören:

	(13) ⋮	(14) ⋮	
(69) ...	$w = 1{,}99984\ 804$ $z = 0{,}69307\ 120$	$w = 2{,}00084\ 796$ $z = 0{,}69357\ 108$	...

Dann ist $\log 2 = 0{,}69307\ 120 + 0{,}00015\ 196 : 2{,}00000 = 0{,}69314\ 718$.

In solchen Rechnungen ist der Keim für die Bildung von Begriffen wie $\lim (n = \infty)$ enthalten, die uns jetzt meist unvermittelt entgegentreten. Sie sind aus der wirklichen Ausführung von Rechnungen mit sehr grofsen und sehr kleinen Zahlen erwachsen, welche notwendig auf eine vereinfachende Bezeichnung und geschmeidige Ausdrucksweise hinführen mufste.

Auch die Reihenausdrücke sind notwendige Folgen der Neperschen Betrachtungsweise. Will man aus einer Zahl w die $n$te Wurzel ziehen, so hat man das zugehörige z durch n zu dividieren. Ist aber z/n sehr klein, so ist der Numerus $= 1 + z/n$, also ist $\sqrt[n]{w} = 1 + z/n$. Hieraus folgt entweder $w = (1 + z/n)^n$, und diesen Ausdruck hätte schon Briggs für bestimmte beliebig grofse Werte von n entwickeln können, oder es folgt $z = n(\sqrt[n]{w} - 1)$. Dafs man auch hier $\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{1 + (w - 1)}$ durch den binomischen Satz nach $(w - 1)$ entwickeln kann, fand Newton. Die Neperschen Formeln $\log w - \log w' = (w - w')/\frac{1}{2}(w + w')$ und $\log(1 + \varepsilon) = \varepsilon/(1 + \varepsilon/2)$ sind Anfänge der Reihenentwicklung. Die Basis der betrachteten Logarithmen ist offenbar $\lim (1 + 1/n)^n = 2{,}7182818 = e$.

Wir haben uns gestattet, Nepers Betrachtungen mit einer geringen Veränderung darzulegen, um die Ähnlichkeit und die Unterschiede zwischen Neper und Byrg klar vor Augen zu stellen. Thatsächlich hat Neper nicht Potenzen von $(1 + 10^{-7})$, $(1 + 10^{-5})$, $(1 + 1/2 \cdot 10^{-3})$, $(1 + 10^{-2})$, sondern von $(1 - 10^{-7})$, $(1 - 10^{-5})$, $(1 - 1/2 \cdot 10^{-3})$, $(1 - 10^{-2})$ zur Ausführung seines Werkes benutzt. Er liefs den Wanderer W nicht von O in die Ferne schweifen, sondern entgegengesetzt von O nach M sich bewegen, so dafs dessen Geschwindigkeit in demselben Mafse sank, wie das Ziel näher rückte. Denn er, der Entdecker von Sätzen und Berechnungsarten der sphärischen Trigonometrie (s. Anh. 4.), wollte die Logarithmen vor allem zur Erleichterung der hier vorliegenden Aufgaben benutzen. Er hat deshalb seine von 1,000 0000 auf 0,500 0000 abnehmende Grundtafel überhaupt nicht ausführlich veröffentlicht, sondern nur die ihr entnommenen Logarithmen

der Sinus von Minute zu Minute, es ist z. B. $\log \sin 30° = \log 1/2 = 0{,}693\,1469$, als Basis hat man bei dieser Anordnung nicht e, sondern das umgekehrte Verhältnis $1/e$ anzusehen. Es darf nicht verschwiegen werden, dafs sich, wie William Rae Macdonald, der Übersetzer der Constructio, fand, in Nepers Berechnung von $(1-10^{-5})^{50}$ ein Fehler von fast 2 Einheiten der 10ten Dezimalstelle eingeschlichen hat, der die Endziffern seiner Grundtafel ungenau gemacht hat, so dafs auch die von ihm veröffentlichte 7stellige Tafel von log sinus in der letzten Stelle unzuverlässig ist.

In dem sehr reichhaltigen und brauchbaren Handbuch der Astronomie, welches Rudolf Wolf, der berühmte Entdecker des Zusammenhangs der Sonnenflecke mit dem Erdmagnetismus. herausgiebt, findet sich auch eine gedrängte, aber nicht genaue Geschichte der Logarithmen, nach welcher für Wolfs Landsmann, den Schweizer Jobst Byrg, dessen Progressions-Tafeln 1620, also später als Nepers Constructio, und ohne Gebrauchsanweisung herauskamen und fast unbenutzt blieben, das Verdienst in Anspruch genommen wird, erster Entdecker der Logarithmen zu sein. Obwohl Wolf die Constructio kennt, hält er doch Nepers Logarithmen für künstliche, nämlich für Exponenten der Zahl $(1-10^{-7})$, die Übergänge von dem Logarithmus einer Zahl auf den einer einfacheren benachbarten hält er für empirische Interpolation, er schliefst sich endlich dem angeblichen Urteil Biots an, Neper hätte durch fortlaufende Berechnung der Potenzen von $(1-10^{-7})$, nach dem Muster Byrgs, sein Ziel einfacher und besser erreichen können. Welche Zeit hätte ihm dazu wohl bewilligt werden sollen? Und welche Kontrolle der Rechnung wäre möglich gewesen?

In Sigm. Günthers „Vermischten Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik“ findet sich ein Aufsatz über Logarithmen, der sich nicht auf die Quellen, sondern auf Abhandlungen von Karsten, Kästner, Mollweide (gemeint ist vielmehr Klügel, der erste Herausgeber, nicht Mollweide, der Fortsetzer des mathematischen Wörterbuchs), Biot und vielen anderen stützt. Der Verfasser glaubt seine Gewährsmänner richtig zu verstehen, wenn er zu dem Schlusse kommt, die Neperschen und die aus analytischen Gründen erst später betrachteten Logarithmen seien nicht identisch. Welchen Wert seine Excerpte beanspruchen dürfen, zeige folgende Stelle: „Wenn man den Gedankengang Nepers, der an keine Basis gedacht habe, in unsere Denkweise übertrage, so könne man nur soviel festsetzen, dafs seine Grundzahl zwischen den Zahlen 1,000 0000 und 1,000 0001 liege, also etwa gleich dem Mittel beider sei!“ Wie mag sich der Autor ein Logarithmen-System mit der Basis 1,000 0000 vorstellen?

Selbständige Berechnung einzelner Logarithmen.

Die früheren Betrachtungen gestatten zwar alle Logarithmen unter Benutzung ihres Zusammenhanges mit geringer Mühe, jeden einzelnen aber nur bis auf die einmal festgesetzte Genauigkeitsgrenze des ganzen Systems zu berechnen. Briggs entwickelt in seiner Arithmetica logarithmica (Londini 1624) viele Methoden, um den Logarithmus einer vorgelegten Zahl auf beliebig viel Ziffern zu finden. Sie gehen entweder ganz direkt auf das Ziel los oder verlangen, dafs vorher eine beschränkte Reihe von Hilfszahlen mit entsprechender Genauigkeit berechnet werde.

Eine bekannte Art, Briggische Logarithmen zu berechnen, besteht darin, dafs man den gesuchten Logarithmus in bekanntem Mafse vervielfacht, indem man die Zahl durch fortgesetztes Quadrieren zu einer sehr hohen Potenz erhebt, und sie dann durch Abzählen der Ziffern zwischen zwei Potenzen von 10 einschliefst. (S. Mehler, Hauptsätze d. Elem.-Math.) Da hierbei aber unübersehbare Rechnungen auszuführen wären, so rückt man in jeder berechneten Potenz das Komma hinter die erste geltende Ziffer, kompensiert diese Änderung indem man eine Potenz von 10 als Faktor hinzufügt, und führt alle Multiplikationen abgekürzt, mit einer nicht zu beschränkten Zahl von Ziffern aus. Hutton[1]) hält dieses Verfahren, offenbar ohne es versucht zu haben, für ein sehr bequemes, man brauche nur wenig Ziffern beizubehalten, weil es ja nicht auf den wahren Wert der Produkte, sondern nur auf die Zahl ihrer Ziffern ankomme. Das ist ein Irrtum. Wenn man eine genau bekannte Zahl etwa auf 5 Ziffern abrundet, z. B. e auf 2,7183, so wird ihre Bedeutung unbestimmt, sie kann jetzt jeden Punkt der Zahlenstrecke 2,71825 ... 2,71835 darstellen, ihr Logarithmus wird dadurch so unsicher, dafs seine äufsersten Werte einen Unterschied von $1{,}6 \cdot 10^{-5} = 1/60\,000$ haben. Geht man zu einer höheren als der 60 000ten Potenz, so ist also die Anzahl ihrer Ziffern notwendig um 1, thatsächlich wegen der Abrundung oft noch mehr, unsicher. Man könnte auf diese Art $\log e$ nicht auf 5 Dezimalstellen finden. Wenn die Anfangsziffern einer Zahl mit denen von $\sqrt{10}$ nahe übereinstimmen, mufs man sie sehr genau kennen, um zu entscheiden, mit wie viel Ziffern ihr Quadrat geschrieben wird. Da sich bei Rechnung mit einer geringen Zifferzahl schwer angeben läfst, wie weit die aus dem Abrunden entspringende Ungenauigkeit sich erstreckt, so ist es notwendig, dieses Verfahren, wenn es als Muster eines zwar mühsamen, aber sicheren Weges gelten soll, so abzuändern, dafs man alle Produkte in zwei Grenzen einschliefst, indem man bei der Potenzierung der unteren Grenze nie, bei der der oberen Grenze überall, auch wenn nur 0, 1, 2, 3, 4 die nächste fortfallende Ziffer ist, erhöht. Man ersieht dies aus folgendem Beispiel für log 2.

$$2^{16} = 655\,36 \text{ liegt zwischen } 6{,}55 \cdot 10^4 \text{ und } 6{,}56 \cdot 10^4.$$

Daraus folgt, dafs 2^{32} zwischen $42{,}9025 \cdot 10^8$ und $43{,}0336 \cdot 10^8$ liegt, oder

$$2^{32} = (4{,}29 \ldots 4{,}31)\, 10^7$$

wenn $(a \ldots b)$ einen Mittelwert zwischen a und b bedeutet; daraus folgt weiter:

$$2^{64} = (1{,}84 \ldots 1{,}86) \cdot 10^{19},\quad 2^{128} = (3{,}38 \ldots 3{,}46)\, 10^{38},\quad 2^{256} = (1{,}14 \ldots 1{,}20)\, 10^{77},$$
$$2^{512} = (1{,}29 \ldots 1{,}44) \cdot 10^{154},\quad 2^{1024} = (1{,}66 \ldots 2{,}08)\, 10^{308},\quad 2^{2048} = (2{,}75 \ldots 4{,}33)\, 10^{616}.$$

Da bei nochmaligem Quadrieren die Zahl der Ziffern beider Grenzen verschieden würde, so lohnt es sich nicht, um des noch möglichen geringen Zuwachses an Genauigkeit willen das Verfahren fortzusetzen. Man würde es vielmehr bei erstrebter gröfserer Genauigkeit mit mehr Ziffern durchführen. Aus der letzten Ungleichheit folgt, dafs log 2 sicher zwischen die beiden dyadischen Brüche 616/2048 und 617/2048 fällt, also $= 0{,}301$ ist. Nach der gewöhnlichen Darstellung (s. die Anmerkung bei Mehler) erscheint der Schlufs unsicher.

---

[1]) K. Hutton, mathematical tables with a large and original history, 1785. Die gegen John Newton (1658) gerichtete Kritik ist unbegründet und trifft den Verfasser selbst.

Bei Briggs erscheint dieses Verfahren in etwas veränderter Gestalt, so dafs es direkt zu Dezimalbrüchen für den Logarithmus führt. Er erhebt nämlich die gegebene Zahl a in die Potenzen a^2, a^4, a^8, geht dann auf $a^{10} = a^8 \cdot a^2 = b$ über, und schreitet von hier zu b^2, b^4, b^8, $b^{10} = c$ u. s. w. fort, so dafs $a^{10} = b$, $a^{100} = c$, $a^{1000} = d \ldots$ wird.

Hätte man statt der oben herausgegriffenen Potenzen der Zahl 2 oder a alle ihre Potenzen zur Verfügung, so könnte man eine solche auswählen, die einer Potenz von 10 möglichst nahe liegt. Wäre z. B. 2^n nahezu $= 10^m$, so wäre der Wert $\log 2 = m/n$ von der Wahrheit um viel weniger als $1/n$ verschieden, vielleicht nur um $1/n^2$. Solche Potenzen lassen sich nach einer Regel aufsuchen, die Euler in seiner Algebra andeutet, sie liefert für den Logarithmus genau die Näherungswerte der Kettenbrüche, ohne dafs es nötig wäre, diese selbst formal aufzustellen. Die Art, wie gewöhnlich die Theorie der Kettenbrüche in die Berechnung der Logarithmen hineingezogen wird, erscheint dem Anfänger fremdartig, ein Umstand, der Fischer (El.-Math.) veranlafst hat, in seinem System die Kettenbrüche den Logarithmen voraufzuschicken.

Man geht von zwei Potenzen aus, von denen die eine nicht weit unter, die andere wenig über irgend welcher Potenz von 10 liegt, und multipliziert diese mit einander. Das Resultat wird mit derjenigen unter den letzten voraufgehenden Potenzen multipliziert, die nach entgegengesetztem Sinne von der ihr nahen Potenz von 10 abwich. Dies zeigt folgendes Beispiel:

$2 \cdot 10^0 = 2^1$	$2^{23} = 0{,}838 \cdot 10^7$	$2^{93} = 0{,}991 \cdot 10^{28}$
$2^2 = 0{,}4 \cdot 10^1$	$2^{33} = 0{,}858 \cdot 10^{10}$	$1{,}015 \cdot 10^{31} = 2^{103}$
$2^3 = 0{,}8 \cdot 10^1$	$2^{43} = 0{,}879 \cdot 10^{13}$	$1{,}006 \cdot 10^{59} = 2^{196}$
$1{,}6 \cdot 10^1 = 2^4$	$2^{53} = 0{,}901 \cdot 10^{16}$	$2^{289} = 0{,}997 \cdot 10^{87}$
$1{,}28 \cdot 10^2 = 2^7$	$2^{63} = 0{,}923 \cdot 10^{19}$	$1{,}003 \cdot 10^{146} = 2^{485}$
$1{,}024 \cdot 10^3 = 2^{10}$	$2^{73} = 0{,}945 \cdot 10^{22}$	$2^{774} = 1{,}000 \cdot 10^{233} = 2^{774}$
$2^{13} = 0{,}819 \cdot 10^4$	$2^{83} = 0{,}968 \cdot 10^{25}$	

Je nachdem die Potenzen von 2 unter oder über der benachbarten Potenz von 10 liegen, findet man ihren Exponenten links oder rechts angegeben. Die Tabelle wird daher fortgeführt, indem man immer die letzten, am linken und am rechten Rande benannten, Potenzen multipliziert. Die 3 letzten Näherungswerte für $\log 2$ sind:

$$87/289 = 0{,}30103, \qquad 146/485 = 0{,}30103, \qquad (233/774) = 0{,}30103.$$

Der Grund des Verfahrens liegt darin, dafs, wenn man nach einer ähnlichen Regel durch Additionen die Vielfachen von $\alpha = 0{,}30103$ bildet, und sie in 2 Klassen teilt, je nachdem sie die benachbarte ganze Zahl übertreffen oder nicht, sich ohne Vermittlung des Kettenbruchs dessen Näherungswerte ergeben:

$0{,}30103 = \alpha$	$23\alpha = 6{,}92369$	$83\alpha = 24{,}98549$
$3\alpha = 0{,}90309$	$33\alpha = 9{,}93399$	$93\alpha = 27{,}99579$
$1{,}20412 = 4\alpha$	$43\alpha = 12{,}94429$	$31{,}00609 = 103\alpha$
$2{,}10721 = 7\alpha$	$53\alpha = 15{,}95459$	$59{,}00188 = 196\alpha$
$3{,}01030 = 10\alpha$	$63\alpha = 18{,}96849$	$289\alpha = 86{,}99767$
$13\alpha = 3{,}91339$	$73\alpha = 21{,}97519$	$485\alpha = 145{,}99955$

Diese Berechnungsart ist nicht auf Briggische Logarithmen beschränkt, sondern ebenso

direkt auf jede von 10 verschiedene Basis anzuwenden. Sie bietet ein neues Beispiel für die früher von mir hervorgehobene natürliche Entstehungsweise der Kettenbrüche[1]).

Während beim Potenzieren einer verkürzten Dezimalzahl ihre relative Genauigkeit abnimmt, steigt sie beim Radizieren. Man nähert sich daher einem Logarithmus sicherer durch die Methoden, die eine fortgesetzte Wurzelausziehung erfordern. Briggs berechnet von zwei Zahlen mit bekanntem Logarithmus, zwischen denen die gegebene Zahl liegt, die mittlere Proportionale und deren Logarithmus. Diese und die eine der früheren Zahlen bilden dann zwei nähere Grenzen der bezeichneten Art, mit denen die Rechnung fortgesetzt wird, bis die Grenzen schliefslich zusammenfallen. Als Ausgangspunkt werden zwei benachbarte Potenzen von 10 gewählt. So bestimmt man log 5 durch folgenden Prozefs:

$A = 1{,}000\,000$, $B = 10{,}000\,000$, $\sqrt{AB} = 3{,}162\,277 = C$, $\sqrt{BC} = 5{,}623\,413 = D$, $\sqrt{CD} = 4{,}216\,964 = E$, $\sqrt{DE} = F$, $\sqrt{DF} = G$, $\sqrt{FG} = H$, $\sqrt{FH} = I$, $\sqrt{HI} = K$, $\sqrt{IK} = L$, $\sqrt{KL} = M$, $\sqrt{KM} = N$, $\sqrt{KN} = O$, $\sqrt{NO} = P$, $\sqrt{OP} = Q$, $\sqrt{OQ} = R$, $\sqrt{OR} = S$, $\sqrt{OS} = T$, $\sqrt{OT} = V$, $\sqrt{TV} = W$, $\sqrt{VW} = X$, $\sqrt{VX} = Y$, $\sqrt{XY} = Z = 5{,}000\,000$.

Sind a, b, c ... die Logarithmen von A, B, C ..., so folgt aus $\sqrt{AB} = C$ die Gl. $c = (a + b)/2$ und viele ähnliche. Berechnet man hiernach aus $a = 0$, $b = 1$ die folgenden Logarithmen, so erhält man auf immer mehr Ziffern den folgenden dyadisch geschriebenen Bruch $z = [0{,}1011\ 0010\ 1110\ 1111\ 1011\ 01] = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} \ldots$ oder

$$\log 5 = z = 2\,931\,693/4\,194\,304 = 0{,}698\,9701.$$

Derselbe dyadische Bruch wäre Ziffer für Ziffer entstanden, wenn man nach dem ersten Verfahren 5 ebenso oft quadriert, wie hier 10 radiziert, und jeden Näherungswert dyadisch ausgedrückt hätte.

Die Form des für log 5 gefundenen Bruches deutet auf eine neue Art hin, aus dem Werte des Numerus die dyadischen Ziffern des Logarithmus zu finden. Es ist $= 10^{[0,1011001]} = \sqrt{10} \cdot \sqrt[8]{10} \cdot \sqrt[16]{10} \cdot \sqrt[128]{10} \ldots$ Hätte man also eine Tafel für die Werte aller Wurzeln, die aus 10 durch wiederholtes Ausziehen der Quadratwurzel hervorgehen, nämlich $\sqrt{10}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[8]{10}, \sqrt[16]{10} \ldots$, so wäre nur nötig zu bestimmen, welche von ihnen als Faktoren auszuwählen sind, um ein der 5 sich annäherndes Produkt zu geben. Dazu würde man 5 durch die höchste Zahl der Tabelle, welche < 5 ist, dividieren, den Quotienten durch die Zahl der Tabelle dividieren, die seinem Werte von unten her am nächsten kommt u. s. f. (S. Baltzer, Elemente, Allgem. Arithmetik, § 20.)

In ähnlicher Weise gestattet eine Hilfstafel, welche die 1te bis 9te Potenz der Wurzeln enthält, die sich durch fortgesetztes Ausziehen der 10ten Wurzel aus 10 ergeben, den Logarithmus irgend einer Zahl als Dezimalbruch Ziffer für Ziffer zu berechnen. Dies ist die Methode von Long (1714). Wenn man mit Fischer (Elem.-Math.) anerkennen mufs, dafs sie dem Logarithmieren eine gewisse Ähnlichkeit mit den 4 Spezies und dem

[1]) Mathematische Annalen, Bd. XXIX, S. 187 — 233. — Hierher gehört auch die von Nicolas Chuquet (1484) gelehrte numerische Auflösung der Gleichungen, sie führt direkt zu den Näherungswerten, mit Einschlufs der intermediären, die man nach Lagranges Kettenbruchverfahren erhielte. Vgl. M. Cantor, Bd. II, S. 323.

Potenzieren und Radizieren giebt, so steht sie doch in der Ausführung einer ähnlich Methode von Briggs nach. (S. auch Meier-Hirsch, herausg. v. Bertram.) Briggs berechn auf 15 Dezimalstellen die Logarithmen von 1, 2, ... 9, ferner von 1,1, 1,2 ... 1,9, da von 1,01, 1,02, ... 1,09, u. s. f., allgemein für $1 + k \cdot 10^{-n}$, wo $k = 1, 2, \ldots 9$ und beliebig ist. Diese liefert Faktoren, aus denen man jede Zahl zusammensetzen kan deren Logarithmus dann die Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren ist. Z. B. i

$$1{,}893\,00 = 1{,}8 \cdot 1{,}05167 = 1{,}8 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}0016 = 1{,}8 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}001 \cdot 1{,}0006.$$

Endlich hat Briggs noch einen Weg gezeigt, der zunächst für natürliche Log rithmen brauchbar ist. Zieht man aus einer Zahl a die Quadratwurzel, aus dies wieder u. s. f., und findet man schliefslich einen Wert $\sqrt[n]{a} = 1 + A$ von solcher Art, da der Dezimalbruch A zur Hälfte aus Nullen besteht, so läuft die Fortsetzung der Rechnu auf ein blofses wiederholtes Halbieren von A hinaus. Dann ist log nat $(1 + A) =$ also $\log \sqrt[n]{a} = A$, $\log a = n \cdot A$. Briggs, der die Rechnung mit 32 Dezimalstellen au führte, um einen auf 14 Stellen richtigen Logarithmus zu erhalten, hat nun bemerkt, da man das beschwerliche Radizieren schon lange vor Erreichung des Zieles durch ei rationelle Übertragung der Differenzen-Methode ersetzen könne. Er beweist sein Verfahr durch Anwendung der Formel für $(a+b)^2$, wir können es etwas kürzer aus folgenden ih ferner liegenden Betrachtungen ableiten. Es sei $\sqrt[n]{a} = e^{\alpha}$, also

$$\begin{array}{lll}
\sqrt[n]{a} = e^{\alpha} = 1 + \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{6}\alpha^3 + \cdots = 1 + A_1 & & \\
\sqrt[2n]{a} = e^{\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \alpha/2 + \tfrac{1}{2}(\alpha/2)^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha/2)^3 + \cdots = 1 + A_2 & B_1 & \\
\sqrt[4n]{a} = e^{\frac{1}{4}\alpha} = 1 + (\alpha/4) + \tfrac{1}{2}(\alpha/4)^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha/4)^3 + \cdots = 1 + A_4 & B_2 & C_1 \\
\sqrt[8n]{a} = \cdots\cdots\cdots\cdots = 1 + A_8 & B_4 & C_2 \quad D_1 \\
\sqrt[16n]{a} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

Bildet man $\frac{1}{2}A_1 - A_2 = B_1$ und ähnlich $\frac{1}{2}A_2 - A_4 = B_2$, $\frac{1}{2}A_4 - A_8 = B_4$, ... so beginnt offenbar die Entwickelung von B_1 erst mit α^2, folglich die von $B_1/4 - B_2 =$ mit α^3, endlich fällt aus $C_1/8 - C_2$ auch noch das Glied mit α^3 fort. Die Zahlen A_1, B_1, C_1, D_1 werden daher bei kleinem A_1, also auch kleinem α, innerhalb des Bereiches d beibehaltenen Ziffern schnell zu 0 abnehmen. Ist etwa $D_1 = 0$, und um so me $D_2 = D_4 = \ldots = 0$, so läfst sich die Reihe der C von C_2 aus nach unten fortsetzen dur $C_4 = C_2/8$, dann läfst sich die Reihe der B fortsetzen, da $B_8 = B_4/4 - C_4$ ist, endli hat man $A_{16} = \frac{1}{2}A_8 - B_8$. Es ist z. B.

	$1 + A$	B	C	D
$10^{1/128}$	$= 1{,}0181\,51722$			
$10^{1/256}$	$= 1{,}0090\,35044$	$0{,}0000\,40817$		
$10^{1/512}$	$= 1{,}0045\,07364$	$0{,}0000\,10158$	$0{,}0000\,00046$	
$10^{1/1024}$	$= 1{,}0022\,51148$	$0{,}0000\,02534$	$0{,}0000\,00006$	0

Hieraus bildet man durch gesetzmäfsige Fortsetzung der Reihen D, C, B, A:

$$10^{1/32768} = 1{,}0000\,70273.$$

Also $$\log \text{nat}\, 10 = 32768 \cdot 0{,}0000\,70273 = 2{,}3027.$$

Um briggische Logarithmen beliebiger Zahlen zu finden, hat man zunächst auf iese Art jedesmal ihren log nat zu berechnen, und die Resultate behufs Änderung des Iafsstabes durch den eben gefundenen log nat 10 zu dividieren.

Die Sinus-Tafel.

Die Einführung in die Trigonometrie bestand bisher oft darin, dafs mit der gleich-eitigen Definition von vier oder mehr Winkelfunktionen begonnen, dann ihr Zusammen-ang für einfache und vielfache Winkel durch viele Formeln dargestellt wurde, ehe noch gend eine Aussicht auf das gar nicht so ferne Ziel eröffnet war. Wenn noch dazu in den päteren Anwendungen nie die Funktionswerte selbst erschienen, sondern von Anfang an urch schwer begreifliche Logarithmen vertreten wurden, so konnte die richtige Auffassung er Lehren leicht ganz vereitelt werden. Es wäre gewifs sehr nützlich anzuordnen, dafs die ogarithmen erst nach der Trigonometrie durchgenommen würden[1]). Der Lernende würde etrennte Schwierigkeiten leichter besiegen. Daher ist auch anzuerkennen, dafs in den eutigen Tafeln wieder die Sinus selbst, nicht nur die Logarithmen stehen, und dafs auch ehrbücher (wie die von Mehler und Fischer) der Theorie eine Tafel der Werte beifügen. as Folgende soll einen Gang darlegen, nach dem das Wichtigste aus der Trigonometrie ch als ein organisch gegliedertes Ganzes, nicht als Sammlung von vereinzelten Formeln id schattenhaften Symbolen darstellt.

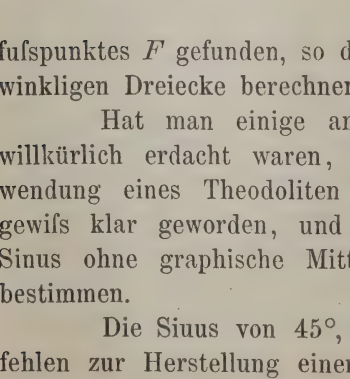
Als Vorbereitung wird nach Schellbachs, in Mehlers Leitfaden mitgeteiltem, Ver-hren an Aufgaben über entfernte irdische Gegenstände, wie Türme, Luftballons, Berge, er Zusammenhang zwischen Entfernung und scheinbarer und wirklicher Gröfse zur An-hauung gebracht, Daten für die Rechnungen werden durch einfache Visier-Instrumente it einer wenige Grade umfassenden Kreisteilung beschafft, die Auflösung geschieht ittels der Zahl 57°,295 7795 und ihres reciproken Wertes 0,017 45329 = arc 1°. Auch tronomische Begriffe werden herbeigezogen, um zu bewirken, dafs Grad und Minute enso sichere Vorstellungen werden wie Meter und Centimeter.

Handelt es sich um die Höhe eines jenseits einer weiten Wasserfläche sichtbaren rms, so kann man seine Axe für die Berechnung als Teil eines Kreises ansehen, der in m Standpunkt des Beobachters seinen Mittelpunkt hat. Kommt man dem Turm aber her, so fragt es sich, ob man den Kreis schlagen soll mit der Entfernung bis zur itze oder mit der bis zum Fufspunkt als Radius. In jenem Fall würde der Turm zur ngente, in diesem würde er mit seinem Spiegelbild zusammen zu einer Sehne des reises. Wir entscheiden uns aus historischen Gründen zunächst für den letzteren. Die ntfernung bis zur Spitze des Turmes kann etwa aus der scheinbaren und wirklichen Gröfse s unverkürzt gesehenen wagerechten Armes eines auf ihm stehenden Kreuzes ermittelt sein. nkt man sich den Radius des Kreises als ein Mafs, indem man seine Endpunkte mit 0 und 1 zeichnet, und eine Teilung in 10tel und 100tel hinzufügt, so ist die Höhe des Turmes nach esem Mafsstabe gleich dem Werte der halben Sehne des doppelten Höhenwinkels, wofür man it Peurbach (1423—62) und Regiomontan (1436—76) das unverständliche Wort Sinus

[1]) Diesen Vorschlag begründet auch A. Schülke, Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht, XIV, S. 1—10.

anwendet. (S. Anh. 5.) Eine Sammlung aller Sinuswerte sowie eine Anschauung ihre Abhängigkeit von dem Wachstum des Winkels kann man zunächst graphisch erhalten indem man, wie auf der letzten Seite von Mehlers Leitfaden, einen in Grade geteilte Kreis-Quadranten mit einer Schar paralleler Linien überzieht, die vom Anfangsradiu um je 1/10 oder 1/100 seiner Länge entfernt sind. Hieraus kann man eine auf 3 Stelle genaue Tafel entnehmen und sich so auch allenfalls die Entstehung der vierstellige Tafel mit dem Intervall von 10′ bei Mehler und Fischer vorstellen. Ist nun der al vorläufiges Mafs angesehene Radius $= h$ Meter, so mufs man auch die Turmhöhe, di vorläufig gleich dem Sinus der scheinbaren Höhe α ist, mit h multiplizieren, um si in gebräuchlichem Mafse zu erhalten. Aus der Behandlung mehrerer derartiger Zahlen beispiele ergiebt sich der zusammenfassende Satz, dafs die Kathete gleich dem Produk aus der Hypotenuse und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist, wofür ma nach häufiger Anwendung die weitere Abkürzung $k = h \sin \alpha$ einführt. Die wagerecht Kathete des Dreiecks wird ebenso $k' = h \sin \alpha'$, wenn wir mit α' den Winkel an de Turmspitze bezeichnen. Mit α' soll durchgehend das Komplement eines Winkels α be zeichnet werden, da dieses sehr häufig in Rechnungen neben α auftritt. Sind dagege k und h bekannt, so ergiebt sich α dadurch, dafs $\sin \alpha$ gleich der Kathete, gemesse mit der Hypotenuse, ist, oder $\sin \alpha = k/h$.

In drei Hauptfällen der Dreiecksberechnung ist es leicht, eine Höhe so zu ziehe dafs von den beiden entstehenden rechtwinkligen Dreiecken erst das eine, dann auch da andere sich vollständig mit Hilfe der Sinus berechnen läfst, allenfalls unter Hinzuziehun des Pythagoreischen Lehrsatzes, wenn von dem rechtwinkligen Dreieck k und k' bekan sind. Nur die Berechnung aus den drei Seiten wird nicht so einfach. Schlägt man na Gellibrand (1597—1637, Herausgeber von Briggs' Trigonometria Britannica, Goudae 163 um die Spitze des Dreiecks C mit dem kürzeren Schenk CA einen Kreis, so schneidet dieser auf der Grundlin eine Strecke $BD = x$ ab, die zur Basis $AB = c$ in d Wechselbeziehung steht, dafs die eine aus den Höhe segmenten AF und FB durch Addition hervorgeh dagegen die andere durch Subtraktion. Die Anwendun des Sekanten-Satzes auf die von B aus an den Kre gezogen Sekanten ergiebt $c \cdot x = (a - b)(a + b)$, dan ist die Lage des Punktes D, also auch des Höhe fufspunktes F gefunden, so dafs sich wieder die beiden durch die Höhe gebildeten rech winkligen Dreiecke berechnen lassen. Es ist $FA = \frac{1}{2}(c - x)$, $FB = \frac{1}{2}(c + x)$.



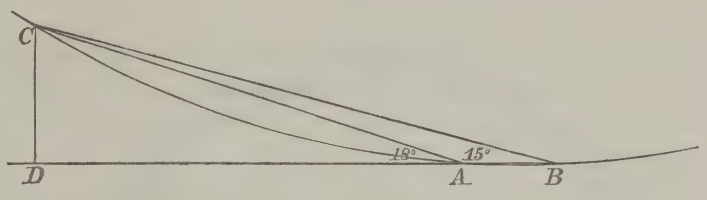
Hat man einige angewandte Dreiecksaufgaben berechnet, deren Daten nic willkürlich erdacht waren, sondern auf wirklichen Messungen, am besten unter A wendung eines Theodoliten beruhten, so ist der praktische Nutzen der Sinustafe gewifs klar geworden, und es stellt sich nun das theoretische Bedürfnis heraus, d Sinus ohne graphische Mittel auf beliebige Genauigkeit durch geometrische Sätze bestimmen.

Die Siuus von 45°, 30°, 60° sind leicht zu finden. Nur die von 15° und 7 fehlen zur Herstellung einer ersten den Quadranten nach gleichen Intervallen durc schreitenden Tafel. Trägt man in einen Halbkreis AB vom Radius 1 die sich ergänzend

Sehnen AC und BC von 30° und 150° ein, so sind diese das Doppelte der gesuchten Sinus. Sie sind aber auch Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhenfufspunkt vom Mittelpunkt entfernt ist um eine Strecke, die, wenn man noch den Radius nach der Spitze zieht, dem Komplement von 30° gegenüberliegt, also gleich dem bekannten Sinus von 60° ist. Jene Katheten lassen sich also als mittlere Proportionalen zu der ganzen Hypotenuse 2 und je einem Abschnitt $(1 \pm \sin 60°)$ berechnen.

Eine andere nach Fünfteln des Quadranten fortschreitende Tafel ergiebt sich aus dem regulären Zehneck. Spaltet man das Bestimmungsdreieck desselben durch Halbierung eines Basiswinkels in zwei gleichschenklige Dreiecke, so haben diese an den Spitzen die Winkel 36° und 108°. Da Basis und Schenkel bekannt sind, so führt die Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke auf sin 18° und sin 54°. Die Sinus der Komplemente folgen nach dem Pythagoreischen Lehrsatz aus rechtwinkligen Dreiecken mit der Hypotenuse 1, nämlich $\sin 72° = \sqrt{1 - \sin 18°^2}$ und $\sin 36° = \sqrt{1 - \sin 54°^2}$.

Man kennt jetzt die Sinus von 0°, 15°, 18°, 30°, 36°, 45°, 54°, 60°, 72°, 75°, 90°, eine Reihe, deren Glieder an zwei Stellen nur 3° Abstand haben. Wir suchen sie so zu ergänzen, dafs sie gleichmäfsig nach diesem Intervall fortschreitet. Zunächst ist der Sinus des Winkels 3° oder 18° — 15° zu finden. Trägt man an die Linie BA und ihre Verlängerung Winkel von 15° und von 18° an, so entsteht ein Dreieck ABC, das an der Spitze den Winkel von 3° hat.



Beschreibt man um dieses einen Kreis, dessen Radius $= r$ sei, so ist AB Sehne eines Bogens von 6°, AC ist Sehne eines Bogens von 30°, BC gehört daher zu einem Bogen von 36°. Demnach ist $AB = 2r \sin 3°$, $AC = 2r \sin 15°$, $BC = 2r \sin 18°$. Zieht man von C die Höhe CD, so zerfällt die Grundlinie in zwei Abschnitte, die in rechtwinkligen Dreiecken mit bekannten Hypotenusen den Komplementen von 18° und 15° gegenüberliegen, also $= AC \sin 72°$ und $= BC \sin 75°$ sind. Setzt man AB aus diesen Abschnitten zusammen, so folgt:

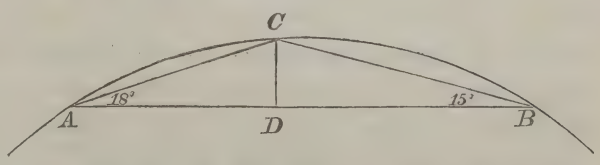
$$\sin 3° = \sin 18° \sin 75° - \sin 15° \sin 72°.$$

Ähnlich lassen sich die Sinus von $6° (= 36° - 30°)$, von $9° (= 54° - 45°)$, von $12° (= 72° - 60°)$ finden, und man erkennt nach wiederholter Zeichnung der entsprechenden Figuren, dafs alle Berechnungen nach der einen Formel

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \sin\beta' - \sin\beta \sin\alpha'$$

anzustellen sind, wo α' und β' Komplemente zu α und β bedeuten.

Für einige Winkel, zuerst für 33° (= 15° + 18°), ist die Ableitung ein wenig zu verändern. Man konstruiert den Winkel von 33° als Aufsenwinkel eines Dreiecks, welches an der Grundlinie BA Winkel von 15° und 18° hat.



Dann gehört AC als Sehne zu dem Bogen 30°, BC zu 36°, also AB zu 66°. Daher ist $AB = 2r \sin 33°$, $AC = 2r \sin 15°$, $BC =$

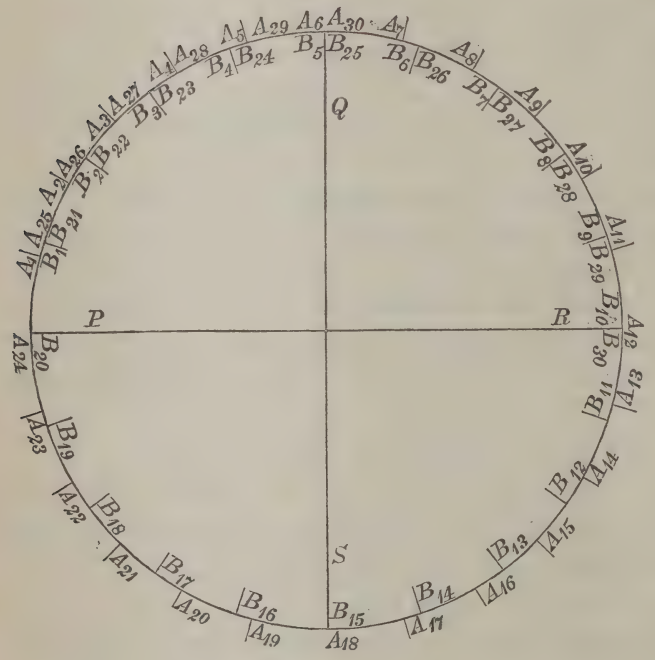
$2r \sin 18°$. Durch die Höhe CD zerfällt die Grundlinie AB in zwei Abschnitte AD und BD, welche den Komplementen von 18° und von 15° gegenüberliegen. Setzt man sie daraus zusammen, so wird:

$$\sin 33° = \sin 18° \sin 75° + \sin 15° \sin 72°.$$

Ähnlich läfst sich der Sinus von 48° (= 30° + 18°) finden, und man erkennt die allgemeine Formel

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \sin\beta' + \sin\beta \sin\alpha'.$$

Auf die erste oder die zweite Art lassen sich die Sinus aller Winkel, die man in der Reihe noch vermifste, aus denen der nach 15° und nach 18° fortschreitenden Grundreihen zusammensetzen. Denn wenn man vom Anfangspunkt P einer Kreisteilung erstens die Vielfachen von 15° bis zu den Punkten A_1, A_2, A_3, ... A_{30}, ferner die Vielfachen von 18° bis B_1, B_2, B_3, ... B_{30} abträgt, so ist irgend ein Vielfaches von 3° zwischen den Endpunkten der gleichen Vielfachen von 15° und von 18° enthalten. Der Abstand zweier Punkte A und B von gleichem Index ist stets kleiner als 90°, es liegen also entweder beide Punkte innerhalb desselben Kreisquadranten, oder zwischen ihnen liegt nur einer der Punkte P, Q, R, S, welche die Kreisquadranten von einander trennen. Rechnet man die Entfernungen der Punkte A und B von der zunächst liegenden Grenze eines Quadranten aus, so stellt sich AB als Summe oder Differenz eines Vielfachen von 15° und eines Vielfachen von 18° heraus, z. B. ist



$$87° = 29 \cdot 3° = A_{29}B_{29}$$
$$= A_{29}Q + QB_{29}$$
$$= 15° + 72°$$
$$57° = 19 \cdot 3° = A_{19}B_{19}$$
$$= A_{19}P - B_{19}P$$
$$= 75° - 18°.$$

Nachdem hieraus die Möglichkeit der Zerlegung erkannt ist, läfst sich die wirkliche Auffindung derselben in jedem Falle durch ein Hilfsmittel nach Art des Nonius erleichtern. Man trage längs der geraden Ränder zweier Streifen starken Papieres von der Mitte aus nach links und rechts je eine Strecke ab, welche die Länge des Quadranten = 90° darstellen soll, teile auf dem einen Papierstreifen den Quadranten in fünf, auf dem andern in sechs Teile, und deute durch schwächere Striche auch noch eine Teilung von 3° zu 3° an. Legt man dann die Teilungen der beiden Streifen so aneinander, dafs zwischen den Nullpunkten ein Abstand von 84° liegt, so wird sich zeigen, dafs an einer Stelle zwei Striche koinzidieren, hier ist die Brücke, die man benutzen mufs, um den Weg von dem einen Nullpunkt zum

andern in eine Anzahl von Fünfteln und eine Anzahl von Sechsteln des Quadranten als Abschnitte zu zerlegen. Es würde sich zeigen, dafs dieser Übergang 30° vom einen, 54° vom andern Nullpunkt entfernt ist.

Die so zu findenden Zerlegungen sind in nebenstehender Tabelle angegeben:

Die mit einem Stern versehenen Zahlen sind je nach dessen Stellung durch Addition der oben und links oder der unten und rechts in derselben Kolonne und Zeile zu findenden Zahlen, die übrigen sind durch Subtraktion jener Zahlen zu erhalten. Will man die fortlaufende Reihe 3°, 6°, 9°.. in der Tabelle verfolgen, so hat man beständig die Richtung der einen Diagonale inne zu halten, bis man an den Rand der Tafel kommt, alsdann sucht man die letzte Zahl am gegenüberliegenden Rande und bewegt sich nun in Richtung der andern Diagonale weiter.

	α						
	0	18	36	54	72	90	
	15	3	*51	39	*87	75	
	30	*48	6	*84	42	60	
β	45	27	*81	9	63_*	45	β'
	60	*78	24	66_*	12	30	
	75	57	69_*	21	33_*	15	
	90	72	54	36	18	0	
		α'					

In der nächsten Tabelle findet man die durch abgekürzte Multiplikation berechneten Produkte der früher bestimmten Sinus der ersten Grundreihe in die der zweiten. Aus ihr lassen sich daher die Sinus der Winkel von 3° zu 3° durch Addition oder Subtraktion je zweier Glieder finden. Von diesen steht das eine in der Reihe, das andere in der Kolonne des Feldes, welches den Winkel in der ersten Tabelle enthält, und zwar zu jenem symmetrisch, z. B.:

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \sin 75° - \sin 15° \sin 72° = 0{,}29849 - 0{,}24615 = 0{,}05234$$
$$\sin 33° = \sin(18° + 15°) = \sin 18° \sin 75° + \sin 15° \sin 72° = 0{,}29849 + 0{,}24615 = 0{,}54464.$$

Das dargestellte Verfahren bestimmt jeden Sinus direkt aus den Grundreihen, also alle mit gleicher Genauigkeit. Wollte man nur sin 3° so bestimmen, und hieraus die Sinus der anderen Winkel nach den Formeln für die Sinus vielfacher Winkel ableiten, so nähme die Genauigkeit bei jedem Schritt, um den man weiter ginge, erheblich ab.

	sin 18°	sin 36°	sin 54°	sin 72°
sin 15°	0,07998	0,15213	0,20939	0,24615
sin 30°	0,15451	0,29389	0,40451	0,47553
sin 45°	0,21851	0,41563	0,57207	0,67251
sin 60°	0,26762	0,50904	0,70063	0,82365
sin 75°	0,29849	0,56776	0,78145	0,91865

Mittelst eines rechtwinkligen Dreiecks im Halbkreise, dessen eine Kathete Sehne zu dem Bogen $\alpha = 3°$ ist, kann man nun, um das jetzige Intervall zu halbieren, $2 \sin 1\frac{1}{2}°$ und $2 \sin 87\frac{1}{2}°$ als mittlere Proportionalen berechnen, wie früher bei $\alpha = 30°$. Es wird $\sin 1\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sin 87°)}$ und $\sin 88\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sin 87°)}$. Allein man erhält so $\sin 1\frac{1}{2}°$ und bei fortgesetztem Halbieren die Sinus noch kleinerer Winkel nicht auf 5 Stellen

genau, und, da die ersten von diesen sich mit Nullen füllen, mit sehr geringer relativer Genauigkeit. Dies wird vermieden, wenn wir zur Berechnung von $\sin 1\frac{1}{2}°$ den Inhalt des erwähnten rechtwinkligen Dreiecks auf zwei Arten ausdrücken, dies giebt $\sin 3° = 2 \sin 1\frac{1}{2}° \sin 87\frac{1}{2}°$, also $2 \sin 1\frac{1}{2}° = \sin 3° : \sin 87\frac{1}{2}°$.

Erst jetzt wird es nötig, ein Zeichen zu haben, welches auf den Sinus des Komplementes von α hindeutet, ohne dieses wirklich als α' darzustellen. Wir setzen daher nach dem Engländer Gunter (1623) $\cos \alpha$ für $\sin \alpha'$. Da, bei wachsendem Winkel α, das Komplement α' abnimmt, so ist klar, dafs auch $\cos \alpha$ bei zunehmendem Winkel kleiner wird. Mit dieser Bezeichnung wird

$$\cos 1\tfrac{1}{2}° = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 3°)},\quad 2 \sin 1\tfrac{1}{2}° = \sin 3° : \cos 1\tfrac{1}{2}°$$

und allgemein $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$, $2 \sin \frac{1}{2}\alpha = \sin \alpha : \cos \frac{1}{2}\alpha$.

Hieraus folgt ferner $4 \sin \frac{1}{4}\alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha : \cos \frac{1}{4}\alpha$, $8 \sin \frac{1}{8}\alpha = 4 \sin \frac{1}{4}\alpha : \cos \frac{1}{8}\alpha$ u. s. w. Denkt man sich einen elastischen Faden als Sehne des Bogens $\alpha = 3°$, so ist seine Länge $= 2 \sin \frac{1}{2}\alpha$, zieht man die Mitte des Fadens herüber nach der Mitte des Bogens, so dafs der Faden jetzt zwei einander gleiche Sehnen bildet, so dehnt sich seine Länge auf $4 \sin \frac{1}{4}\alpha$ aus, verfährt man mit jeder einzelnen Sehne wieder so, so wird die Länge des Fadens $= 8 \sin \frac{1}{8}\alpha$. Auf die ersten 5 Dezimalstellen haben aber diese Verlängerungen keinen Einfluſs. Denn es wird $\cos \frac{1}{2}\alpha = 0{,}99966$, $\cos \frac{1}{4}\alpha = 0{,}99991$ und $2 \sin \frac{1}{2}\alpha = 0{,}05236$, folglich $4 \sin \frac{1}{4}\alpha = 0{,}05236 : 0{,}99991 = 0{,}05236$, und um so weniger sind die folgenden Dehnungen merklich. Es wird daher auch für die schliefsliche Grenzlage, in welcher sich der Faden vollständig an den Bogen anschmiegt, derselbe Wert gelten, also $\text{arc } 3° = 0{,}05236$ sein. Hieraus folgt, dafs auf fünf Stellen $\sin 1\frac{1}{2}° = \text{arc } 1\frac{1}{2}°$ ist, ferner, dafs $\pi = \text{arc } 180° = 60 \cdot 0{,}05236 = 3{,}1416$ ist. (S. Anhang 7.)

Es stimmen nunmehr auch die Sinus aller Winkel α, die kleiner als $1\frac{1}{2}°$ sind, mit ihren Bogen überein. Die Cosinus derselben könnte man mittelst des Pythagoreischen Lehrsatzes als $\sqrt{1 - \sin \alpha^2}$ finden, leichter ergeben sie sich aus den Sinus der halben Winkel. Gehört die Kathete des mehrfach erwähnten rechtwinkligen Dreiecks im Halbkreise zum Bogen α, so ist ihre Länge $= 2 \sin \frac{1}{2}\alpha$, ihre Projektion auf den Durchmesser erscheint von dem Scheitelpunkt des rechten Winkels aus unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha$, sie ist also $= 2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2$, woraus $\cos \alpha = 1 - 2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2$ folgt, die Umformung eines früher benutzten Satzes. Man kann daher leicht die nebenstehende Tabelle berechnen, die uns in den Stand setzt, unsere frühere von 3° zu 3° fortschreitende Tafel auf 15′ zu interpolieren. Ist z. B. $\sin 31° 45'$ zu berechnen, so ist $\alpha = 33°$ der ihm nächste Winkel der früheren Tabelle, der Abstand β mufs kleiner als $1\frac{1}{2}°$ sein. Dann ist

$$\begin{aligned}\sin 31° 45' &= \sin (33° - 1° 15') = \sin(\alpha - \beta)\\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta\\ &= 0{,}54464\,(1 - 0{,}00024) - 0{,}83867 \cdot 0{,}02181\\ &= 0{,}54464 - 0{,}00013 - 0{,}01829\\ &= 0{,}52622.\end{aligned}$$

	Sinus	Cosinus
15′	0,00436	1 — 0,00001
30′	0,00873	1 — 0,00004
45′	0,01309	1 — 0,00009
1° 0′	0,01745	1 — 0,00015
1° 15′	0,02181	1 — 0,00024
1° 30′	0,02618	1 — 0,00034

Es ist keine grofse Mühe, so wenigstens ein Intervall der früheren Tabelle zu interpolieren. Geschieht dies durchgehend, so erhält sie die Ausdehnung der ursprünglichen

'afel des Ptolemaeus. Man kann aber auch bei unserer ersten Tafel stehen bleiben und den in Graden, Minuten, Sekunden gegebenen Bogen auf die Form $\alpha \pm \beta$ bringen, wo α in Vielfaches von 3°, $\beta < 1\frac{1}{2}°$ ist. Dann ist $\sin \beta = \text{arc}\, \beta = p$ und $\cos \beta = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} \beta^2 = 1 - \frac{1}{2} \text{arc}\, \beta^2 = 1 - q$ leicht zu finden, und hierdurch $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha (1 - q) \pm \sin \alpha' \cdot p$. chliefslich ist man sogar im Stande, durch Hinzuziehung des in den früheren Abchnitten ausgeführten, den log sin eines gegebenen Winkels auf 5 Dezimalstellen zu estimmen.

Es würde nun nur noch übrig bleiben, die Hauptfälle der Dreiecksberechnung durchgehen, und die stets wiederkehrenden Berechnungsarten in Formeln zusammenzufassen. a die Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten k und k' beschwerlich t, so bleibt eine Tafel zu wünschen, die den Wert der gegenüberliegenden Kathete r die anliegende als Einheit bei gegebenem Winkel darstellt, d. h. die Tangententafel. 'endet man die Beziehung $\text{tg}\, \alpha = k/k'$ auf ein Dreieck mit der Hypotenuse 1 an, so wird $\alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \sin \alpha / \sin \alpha'$, also ist die neue Tafel aus der Sinus-Tafel leicht zuleiten.

Anhang.

1. (Zu Seite 6.) Den Weg, welchen Briggs in der Trigonometria Britannica zur merischen Auflösung von Gleichungen 3ten, 5ten, 7ten Grades einschlägt, wollen wir an der kubischen Gleichung erläutern, durch die man die Sehne von 12° aus der von 36° findet. Sie lautet $3x = 0{,}618\,033\,988 + x^3$. Die gegebene Sehne $0{,}618\,033\,988 = p$ wird durch 3 dividiert, und während ziffernweis der Quotient entsteht, wird der Dividendus jedesmal um die Glieder vermehrt, die zur Ergänzung des Kubus des bis dahin ermittelten Anfanges des Quotienten dienen. Ist der auf einige Dezimalstellen gefundene Wert von x gleich a, und seine Ergänzung, deren Hauptteil von der nächsten zu bestimmenden Ziffer herrührt, $= \alpha$, also $x = a + \alpha$, so ist α zu bestimmen aus $3\alpha = (p - 3a) + a^3 + 3a^2\alpha + 3a\alpha^2 + \alpha^3$, der einfachste Wert für die Anfangs-Ziffer von α ergäbe sich aus $(p - 3a + a^3)/3$, um aber falsche Annahmen, die sich beim Weiterrechnen als solche

Sehne von $36° =$	0,618 033 988
$a^3 =$	8
$-3a =$	− 0,6
	0,026 033 988
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	0,001 129 329
$-3b =$	− 0,027
	0,000 163 317
$3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 =$	6 554
$-3c =$	− 15
	0,000 019 871
$3(a+b+c)d^2 + \ldots =$	786
$-3d =$	− 18
	0,000 002 657
$3(a+b+c+d)e^2 + \ldots =$	118
$-3e =$	− 2 7
	0,000 000 075 : 0,288 $(= 3 - 3a^2)$
	Quotient = 0,000 000 026

Resultat $x = 0{,}209\,056\,926$. $a\ b\ c\ d\ e$

herausstellen würden, möglichst auszuschliefsen, ist es besser, das Glied $3a^2\alpha$ schon b der Division zu berücksichtigen, also nach der Gleichung $(3-3a^2)\alpha = (p-3a) + a^3$ de Wert der Anfangs-Ziffer von α mittels des verbesserten Divisors $3-3a^2$ zu ermitteln Im übrigen verweisen wir auf das vorstehende Schema der Rechnung.

Dies ist dieselbe Auflösungsart, die nach Hankel[1]) schon anderthalb Jahrhundert früher den Arabern bekannt war. Sie findet sich in einem von Miram Tschelebi (149 verfafsten Kommentar zu den berühmten astronomischen Tafeln, die Ulug Beg, der 144 ermordete Enkel und zweite Nachfolger des Eroberers Tamerlan, zu Samarkand hatt bearbeiten lassen. Moritz Cantor[2]) giebt bei seiner Darstellung des Verfahrens einige Zweifeln über dessen allgemeine Anwendbarkeit Ausdruck, die er nicht wiederholt, wo dasselbe von neuem[3]) als eine, 1600 veröffentlichte, Erfindung des Franzosen Viet ferner als Methode des aus Grünberg in Schlesien stammenden Pitiscus (1612) vorträg

2. (Zu Seite 6.) Die Briggische Differenzen-Methode, die auch in Wolf's Handbuc der Astronomie fehlt, kann folgendermafsen erläutert werden. Von einer Reihe seien d Glieder $A_0, A_3, A_6, \ldots$ schon bekannt, die Zwischenglieder $A_1, A_2, A_4, A_5, \ldots$ seie einzuschalten. Die ersten Differenzen der vollständigen Reihe, $A_1 - A_0$, $A_2 - A_1$ .. bezeichnen wir mit δ, die zweiten Differenzen mit δ^2, die dritten mit δ^3, dagegen d gröfseren Differenzen der ursprünglichen, mangelhaften Reihe mit Δ, ihre zweiten Diff renzen mit Δ^2 u. s. w. Als Index wird jeder Differenz das arithmetische Mittel der Arg mente hinzugefügt, für welche die Differenz genommen ist. Dies zeigt folgendes Schem

I.			II.			III.		
A_0			A_0			$e^{-\frac{3}{2}i\varphi}$		
	$\Delta_{1\frac{1}{2}}$			$\delta_{\frac{1}{2}}$		$2ie^{-i\varphi}\sin\frac{1}{2}\varphi$		
A_3		$\Delta^2{}_3$	A_1		$\delta^2{}_1$	$e^{-\frac{1}{2}i\varphi}$	$-4e^{-\frac{1}{2}i\varphi}\sin\frac{1}{2}\varphi^2$	
	$\Delta_{4\frac{1}{2}}$			$\delta_{1\frac{1}{2}}$		$2i\sin\frac{1}{2}\varphi$		$-8i\sin\frac{1}{2}\varphi^3$
A_6		$\Delta^2{}_6$	A_2		$\delta^2{}_2$	$e^{\frac{1}{2}i\varphi}$	$-4e^{\frac{1}{2}i\varphi}\sin\frac{1}{2}\varphi^2$	
	$\Delta_{7\frac{1}{2}}$			$\delta_{2\frac{1}{2}}$		$2ie^{i\varphi}\sin\frac{1}{2}\varphi$		
A_9			A_3			$e^{\frac{3}{2}i\varphi}$		

In III ist als Beispiel statt der Reihe $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die Reihe der steigende ungeraden Potenzen von $e^{\frac{1}{2}i\varphi}$ gewählt. Es ist leicht einzusehen, dafs sich aus den Gröfse die in II auf der Zeile $(1\frac{1}{2})$ und (1) stehen, also $\delta_{1\frac{1}{2}}$, $\delta^3{}_{1\frac{1}{2}}$, $\delta^2{}_1$, A_1, die Werte A_0 und A_3 z sammensetzen lassen, und dafs sich die Differenz $A_3 - A_0 = \Delta_{1\frac{1}{2}}$ sogar aus $\delta_{1\frac{1}{2}}$ und δ^3 allein bilden läfst. Wäre der lineare Ausdruck von $\Delta_{1\frac{1}{2}}$ durch $\delta_{1\frac{1}{2}}$ und $\delta^3{}_{1\frac{1}{2}}$ bekannt, erhielte man durch Anwendung auf das Beispiel III einen linearen Ausdruck f $e^{\frac{3}{2}i\varphi} - e^{-\frac{3}{2}i\varphi}$, in welchen $2i\sin\frac{1}{2}\varphi$ und $-8i\sin\frac{1}{2}\varphi^3$ eingehen. Diese Darstellung i bekanntlich $2i\sin\frac{3}{2}\varphi = 6i\sin\frac{1}{2}\varphi - 8i\sin\frac{1}{2}\varphi^3$, also mufs sein $\Delta_{1\frac{1}{2}} = 3\delta_{1\frac{1}{2}} + \delta^3{}_{1\frac{1}{2}}$, od allgemein $\Delta = 3\delta + \delta^3$. Hieraus folgt durch Bildung der zweiten Differenz symbolisch

$$\Delta^2 = (3\delta+\delta^3)^2 = 9\delta^2 + 6\delta^4 + \delta^6, \qquad \Delta^3 = (3\delta+\delta^3)^3 = 27\delta^3 + 27\delta^5 + 9\delta^7 + \delta^9,$$
$$\Delta^4 = (3\delta+\delta^3)^4 = 81\delta^4 + 108\delta^6 + 54\delta^8 + 12\delta^{10} + \delta^{12}.$$

---

[1]) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, S. 292.
[2]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I, 1880, S. 672.
[3]) Bd. II, 1892, S. 587 und S. 594.

nd z. B. die Differenzen von δ^4 an gleich 0, so ist $\Delta = 3\delta + \delta^3$, $\Delta^2 = 9\delta^2$, $\Delta^3 = 27\delta^3$. ieraus lassen sich, wenn man mit der letzten Gleichung beginnt, die δ durch Δ aus-ücken: $\delta^3 = \frac{1}{27}\Delta^3$, $\delta^2 = \frac{1}{9}\Delta^2$, $\delta = \frac{1}{3}\Delta - \frac{1}{3}\delta^3$. Man hat also die ursprünglichen Diffe-nzen Δ, Δ^2, Δ^3 durch 3, 9, 27 zu dividieren, die erste dann aber noch durch Sub-aktion von $\frac{1}{3}\delta^3$ zu korrigieren.

Es soll z. B. die Reihe der Kuben der um 3 wachsenden Zahlen $-5, -2, 1, 4 \ldots$ terpoliert werden. Die Bildung der Differenzen zeigt folgende Tabelle.

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	δ^3	δ^2	δ
$A_{-3} = -512$							
	387						
$A_0 = -125$		— 270					
	117		162		6		39 — 2 = 37
$A_3 = -8$		— 108		0		— 12	
	9		162		6		3 — 2 = 1
$A_6 = 1$		54		0		6	
	63		162		6		21 — 2 = 19
$A_9 = 64$		216					
	279						
$A_{12} = 343$							

Hieraus entspringt nun die Reihe der Kuben r fortlaufenden Zahlen, wie das nebenstehende hema zeigt.

δ^3	δ^2	δ	Δ
6*		37*	
	— 18		— 27
6		19	
	— 12*		— 8*
6		7	
	— 6		— 1
6*		1*	
	0		0
6		1	
	6*		1*
6		7	
	12		8
6*		19*	
	18		27

Die durch Sterne bezeichneten Glieder sind r oberen Tabelle entnommen, die übrigen sind rch Addition der links stehenden Differenzen ge-ldet. —

Will man das Intervall einer Reihe in Teile zerlegen, so ergeben sich die Koeffizienten s der Formel, welche die Sehne des 5fachen gens durch Potenzen der Sehne des einfachen gens darstellt. Man erhält dann

$\Delta = 5\delta + 5\delta^3 + \delta^5$, $\Delta^2 = (5\delta + 5\delta^3 + \delta^5)^2$, ...

3. (Zu Seite 12.) Den Ursprung des ortes Mantisse führt Rudolf Wolf (Handbuch r Astronomie) bis auf Euler zurück, dessen Ausdrucksweise in der Introductio ausanne 1748) Kap. VI § 112 aber darauf schliefsen läfst, dafs andere es vor ihm braucht haben (Fractio decimalis vocari solet mantissa). In den Einleitungen von garithmentafeln ist das Wort sehr selten zu finden, es fehlt in der Tafel von Sherwin, rausgegeben von Gardiner (1741), in der von Gardiner (1742), wo es durch decimal rt always positive ersetzt ist, in der von Hutton (1785): decimal part, auch in der igegebenen ausführlichen, auf genauem Quellenstudium beruhenden Geschichte der garithmen, ferner in der Tafel von Taylor (1792), der dafür decimal fraction always firmative sagt, von Callet (Paris, 1795, an III): fraction toujours positive, von Hobert und

Ideler (Berlin 1799), Borda (an IX), Babbage (London 1831). Dagegen findet es sich in Vegas Tafeln, z. B. im Thesaurus (1794): Notae decimales interdum etiam mantissa, und hierauf scheint seine augenblickliche Verbreitung in Deutschland zu beruhen. Euler selbst wendet es in der Algebra (St. Petersburg 1770) nicht an, in dem bei Reclam ohne Jahreszahl und Namen des Herausgebers (etwa 1884) erschienenen Neudruck (S. 95) steht es also wohl ohne Berechtigung. Das Wort fehlt auch in Nicolaus Mercators Logarithmotechnie (1667); Wallis in seiner Algebra (1685 englisch, 1693 lateinisch erschienen), die viele historische Nachweise enthält, umschreibt es durch figurae reliquae affirmativae; auch Kästner (Astronomische Abhandlungen 1774) vermeidet es in den Nachrichten über merkwürdige Logarithmentafeln; ebenso Christian Freyherr von Wolff in seinem Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften (Halle, 1713). Von englischen Schriften, die es erwähnen, ist mir nur der von Glaisher herrührende Artikel Logarithmus der Encyclopaedia Britannica bekannt. Doch findet es sich in englischen Wörterbüchern, und nicht nur als mathematisches Kunstwort, sondern auch in übertragener Bedeutung.

4. (Zu Seite 17.) Die Neperschen Analogieen, d. h. Proportionen, finden sich nicht an der von Baltzer[1]) citierten Stelle der Descriptio, dort steht nur der Satz $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} c'$, wo c' die sogenannte basis alterna ist, die zu der Basis c in der Beziehung steht, dafs die eine aus der Differenz, die andere aus der Summe der Höhensegmente gebildet wird. (Vgl. S. 24: $(a+b)(a-b) = cx$.) Dieser Satz ist bewiesen durch stereographische Projektion auf die Tangentialebene des Punktes B, von dem in einer Richtung $a+b$ und $a-b$, in einer andern c und c' ausgehen. Bei Gellibrand steht ohne Beweis die folgende Nepersche Analogie $\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} c$. Mittelst des Satzes von der Winkeltreue der stereographischen Projection lassen sich auch die anderen Analogieen beweisen, die man in dem Anhang von Nepers Constructio findet.

Die Regel, welche alle Formeln über rechtwinklige Dreiecke zusammenfafst, hat bei Neper (Descriptio S. 33) nicht die Form, in der sie heute bekannt ist. Neper nennt cirkuläre Stücke die Katheten und die Komplemente der Hypotenuse und der spitzen Winkel. Von diesen 5 Stücken sind jedesmal zwei gegeben und eins wird gesucht. Es ist der Sinus eines Stücks gleich dem Produkt der Tangenten der beiden anstofsenden und gleich dem Produkt der Cosinus der von ihm getrennt liegenden, einander benachbarten, Stücke. Sind aus zwei gegebenen Stücken die übrigen drei cirkulären Stücke berechnet, so kann man in ihre cirkuläre Reihenfolge irgendwo den rechten Winkel einschieben, die Berechnung also durch 5 verschiedene Dreiecke deuten. Diese lassen sich so legen, dafs ihre Hypotenusen ein Fünfeck bilden, welches durch die Dreiecke zu einem sternförmigen Fünfeck mit lauter rechten Winkeln ergänzt wird.

5. (Zu S. 23.) Es wird jetzt vielfach mit grofser Sicherheit behauptet, das Wort Sinus sei von Plato von Tivoli eingeführt, der um 1120 die Astronomie des Al-Battani (um 900 n. Chr.) in barbarisches Latein übersetzte. Die Araber hätten aus dem Sanskri

---

[1]) Elem. d. Math., 1879, S. 321.

ein Wort (jiva) entlehnt, welches eigentlich Sehne bedeutet habe, aber der Kürze halber auch für halbe Sehne gebraucht sei, sie hätten dies Wort anders vokalisiert, um ihm auch einen arabischen — allerdings geometrisch gar nicht passenden — Sinn zu geben, diesen habe Plato durch Sinus wortgetreu und vielleicht ohne mathematisches Verständnis übersetzt. Diese Legende, die von Munk und Wöpcke begründet und besonders durch Hankel und M. Cantor[1]) verbreitet ist, fällt in sich zusammen, wenn man jene Übersetzung zur Hand nimmt; sie ist auf Melanchthons Veranlassung nach einem Manuskript aus dem Nachlasse Regiomontans (1436—1476) zu Nürnberg 1537 gedruckt. In Kapitel III wird unser Sinus-Begriff durch medietas chordae duplicitatis arcus richtig umschrieben, dann wird bestimmt, dafs in der Fortsetzung des Werkes hierfür einfach „chorda“ gesagt werden solle. Wo von ganzen Sehnen die Rede sei, solle es ausdrücklich durch ein Beiwort hervorgehoben werden. Und so kommt denn auch „chorda“ in dem Sinne von Sinus beständig vor in den vielen Anweisungen zur Lösung sphärischer Aufgaben. In den Einschaltungen Regiomontans, die eine ganz andere Sprache und Terminologie haben, auch im Druck durch besondere Zeichen kenntlich gemacht sind, steht dagegen sinus und sinus versus für das, was Plato chorda und chorda versa nennt. Nur an einer Stelle, gegen Ende des Kapitels III, steht im Text zwar nicht sinus, aber sinus versus, es kann jedoch nicht dem geringsten Zweifel unterliegen, dafs es hier durch ein Versehen aus den Anmerkungen des Regiomontan sich eingeschlichen hat. Dies würde ein Vergleich mit den Handschriften gewifs bestätigen, die nach Houzeau's Bibliographie in Mailand und in Oxford noch vorhanden sind. Daher sagt Kästner (Geschichte der Mathematik, 1796) mit Recht, Albategnius und Plato hätten den neuen Begriff des Sinus, aber für denselben noch keine neue Bezeichnung. Um 900 stand aber die arabische Wissenschaft schon nicht mehr unter dem Einflufs der Inder, sondern dem der Griechen, und es ist daher nicht denkbar, dafs die Araber nun noch für eine ihnen bekannte Sache aus Indien einen Namen eingeführt hätten, der das unterscheidende Merkmal derselben gar nicht hervorhob. Vielleicht kann das, von Halley[2]) und Kästner angeführte, arabische Wort, dschaib, welches von der Wurzel dschaba, secuit, herkommt, ebenso direkt zur Bezeichnung der Abschnitte der vom Durchmesser in der Mitte geschnittenen Sehne von den Mathematikern verwandt sein, wie es im gewöhnlichen Leben zur Bezeichnung des Busenausschnitts eines Gewandes benutzt wurde. Die falsche Übersetzung durch sinus kann auf Gerhard von Cremona (1114—1187) zurückzuführen sein, der um 1175 in Toledo viele mathematische Schriften aus dem Arabischen in das Lateinische übertrug, unter anderen eine Astronomie, die Geber ibn Aflah in der zweiten Hälfte des 11. Jahrhunderts zu Sevilla verfafst hatte. In der 1534 von Apianus (Bennewitz) veranstalteten Druckausgabe kommt das Wort sinus vielfach vor. Peurbach (1423—62), der einen Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis schrieb (1541 zu Nürnberg gedruckt), scheint sich bei der Verwendung der Sinus nicht auf Geber, sondern nur auf den westarabischen Astronomen Arzachel (um 1060) zu stützen, so dafs in dessen Werken, die zum teil auch von Gerhard übersetzt wurden und handschriftlich noch vorhanden sind, vielleicht der Ursprung unserer Sinus zu suchen ist. Doch wird von Peurbachs Schüler

[1]) Vorlesungen, Bd. I, S. 632.

[2]) Halley fand es in der arabischen Übersetzung der Sphaerik des Menelaus, nach der er dieses um 100 n. Chr. verfafste, im Urtext verlorene Werk lateinisch herausgab. (Oxoniae 1758.)

Regiomontan auch Geber erwähnt. Volles Bürgerrecht hatte das Wort noch nicht zur Zeit des Copernicus (1470—1543), der es kennen mufste, es aber durch semissis subtendentium duplam circumferentiam umschrieb, auch sein Schüler Rheticus (1514—1576), der Verfasser des 1596 erschienenen opus Palatinum, suchte die „sarazenische" Bezeichnung zu verdrängen, indem er sinus und complementi sinus durch perpendiculum und basis ersetzte. Das Wort Sinus soll nach Hankel auch in der Pratica geometriae des Leonardo Pisano oder Fibonacci (1220)[1]) angewandt sein, man findet aber dort nur eine den Zusammenhang des Textes durchbrechende Notiz über die Bedeutung des Wortes Sinus, die in der Kreismessung des Textes nicht verwertet wird. Es scheint daher eine Randbemerkung eines Besitzers einer älteren Handschrift beim Abschreiben in den Text geraten zu sein. Nach Libri zeigen die einzelnen Handschriften des Werkes erhebliche Verschiedenheiten. In Pfleiderer's Analysis triangulorum (übersetzt von Bohnenberger, 1802) und in Kruse's Geometrie der Ebene (1875) ist die Geschichte des Wortes sinus mit Beschränkung auf das Thatsächliche dargestellt. — Eine wesentliche Umbildung hat übrigens die Trigonometrie durch Einführung des Sinus ebensowenig erfahren, wie etwa die Lehre von den Kegelschnitten dadurch, dafs man jetzt die halbe Axe einer Ellipse und den halben Parameter einer Parabel oder den Halbmesser eines Kreises als selbständige Gröfsen bezeichnet.

6. (Zu Seite 24.) Die auf Gellibrand zurückgeführte Berechnungsart eines Dreiecks aus a, b, γ findet sich schon in der Trigonometria des Pitiscus (Augustae Vindelicorum 1600).

7. (Zu Seite 28.) Die successiven Berechnungen von $2\sin\frac{1}{2}\alpha$, $4\sin\frac{1}{4}\alpha\ldots$ lassen sich in die Formel zusammenfassen $2^n \sin 2^{-n}\alpha = \sin\alpha/\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha\ldots\cos 2^{-n}\alpha$. Dafs für $n=\infty$ das Produkt auf der rechten Seite konvergiert, ist hiernach selstverständlich, auch dafs es den Grenzwert $\sin\alpha/\text{arc}\,\alpha$ hat. Neuerdings hat aber Rudio die Konvergenz aus Sätzen von Weierstrafs und Dini bewiesen.

8. (Zu Seite 3.) Dafs der Name Almagest aus dem arabischen Artikel al und μεγίστη entstanden sei, ist schwer glaublich, denn das Werk des Cl. Ptolemaeus hiefs nicht ἡ μεγίστη, sondern ἡ μεγάλη σύνταξις, und wie sollten die Araber den von ihnen übernommenen Namen erst griechisch umgewandelt haben? Einer alten Übersetzung des Almagest aus dem Arabischen in das Lateinische ist die Bemerkung beigefügt, das Werk habe griechisch „megasiti" geheifsen. (S. Boncompagni's Schrift über Gerardo Cremonese.) Dafs hieraus „Almagesti" werden konnte, ist leicht erklärlich, in jenem Wort „mega—siti" selbst sind aber noch die beiden Bestandteile des vollen griechischen Namens zu erkennen, wenn auch verstümmelt durch sorglose arabische Aussprache. Das λ von μεγάλη war vielleicht für das l des Artikels al gehalten, und, wie dieses häufig, dem folgenden Konsonanten assimiliert worden.

9. (Zu Seite 17.) Die mit unserer Tabelle A zu vergleichende Nepersche Tabelle der Potenzen von $(1-10^{-2}) = 0{,}99$ erinnert an die Zins-Tabelle des Stevin (1585), in der angegeben ist, welchen augenblicklichen Wert ein Kapital habe, das zu 1 % in 1, 2, 3 . . ., 33 Jahren auf 1,000 0000 anwachsen könne. (S. Cantor, II, S. 564.) Sie stellt also eine nach dem Verhältnis 1,01 : 1 absteigende geometrische Reihe dar.

[1]) Scritti di Leonardo Pisano, pubblicati da Bald. Buoncompagni, Rom 1857—62, Bd. II, 94.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht
des Luisenstädt. Real-Gymnasiums zu Berlin. Ostern 1909.

Die Iteration des Sinus und anderer Funktionen.

Von

Max Koppe.

Mit 3 Tafeln.

BERLIN
Weidmannsche Buchhandlung
1909.

909. Programm Nr. 115.

Einleitung.

§ 1. Betrachtet man den Wert einer Funktion $f(x)$ als Argument für einen neuen Funktionswert, diesen wieder als Argument, so erhält man die Gleichungen $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ . . . Dieses Verfahren nennt man Iteration der Funktion $f(x)$. Verläuft die Kurve $y = f(x)$ nahe der Geraden $y = x$, so kann man (Fig. 1) aus wagerechten und senkrechten Strecken einen Linienzug herstellen, dessen Ecken abwechselnd auf der Kurve und auf der Geraden liegen. Die Strecken bilden verlängert zwei Systeme von Parallelen, welche die Ebene in Rechtecke zerlegen. Zieht man Kurven, die jedes Rechteck in der Richtung der Diagonale von links unten nach rechts oben durchschneiden, so stellen diese die iterierten Funktionen von fx, mit positiver und negativer Nummer, dar. Die Ordinaten von A_0, A_1, A_2 seien y_0, y_1, y_2 usw. Es ist $y_4 = DC = \eta = f(\xi)$, $y_3 = DB = \xi$, folglich $y_4 = f(y_3)$, ebenso

$$y_2 = f(y_1),\ y_1 = f(y_0) = f(x),\ \text{daher}$$
$$y_2 = f(f(x)) = f^2(x),\ y_3 = f(f^2(x)) = f^3(x).$$

Es ist auch $y_0 = f(y_{-1})$ oder $x = f(y_{-1})$, d. h. $x = f(y)$ ist die Gleichung der in A_{-1} beginnenden Kurve, sie stellt also die inverse Funktion zu $y = f(x)$ dar. Überhaupt sind die unteren Kurven aus den oberen durch Umklappen um die Gerade $y = x$ zu erhalten und stellen die inversen Funktionen zu $y = f(x)$, $y = f^2(x)$ usw. dar. Sie können bezeichnet werden mit $y = f^{-1}(x)$, $y = f^{-2}(x)$ . . Die Gerade $y = x$ wird dann zu $y = f^0(x)$. Im Jahre 1904 zeigte mir Thär in Hamburg ein Drahtmodell, welches die Koordinatenachsen, ihre Mittellinie und mehrere Wellen der Sinuskurve $y = \sin x$ darstellte. Die letztere liefs sich um die Linie $y = x$ herumklappen, so dafs sich vor den Augen der Schüler die eindeutige periodische Funktion $y = \sin x$ in die inverse vieldeutige Funktion $= \arc \sin x$ verwandelte.

Tilgt man in der Figur die Kurven mit ungerader Nummer, so bleiben folgende estehen $y = x$, $y = f^2(x) = F(x)$, $y = f^4(x) = F^2(x)$ . . $y = f^{-2}(x) = F^{-1}(x)$ . ., welche elbst ein vollständiges Iterations-System bilden. Will man die weggelassenen Kurven dem ystem wieder einfügen, so kann man sie bezeichnen als $y = f(x) = F^{\frac{1}{2}}(x)$, $y = f^3(x) = F^{1\frac{1}{2}}(x)$. In ähnlicher Weise ist die Aufgabe einer Iteration mit dem Index $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ u deuten.

Wenn in mathematischen Ausdrücken gewisse Buchstaben, Funktions- oder perations-Zeichen mehrmals hintereinander zu setzen sind, so ist es üblich, sie nur

einmal zu schreiben und die Zahl der Wiederholungen oben durch einen Exponent oder Index anzugeben, z. B. $(a+b)\,(a+b)$ durch $(a+b)^2$, $\Delta\Delta y$ durch $\Delta^2 y$, $\frac{ddy}{dx \cdot dx}$ dur $\frac{d^2y}{dx^2}$ abzukürzen. Daher bedeutet $f^2(x)$ soviel wie $ff(x)$, dagegen $f(x)^2$ soviel wie $f(x) \cdot f($ Leider hat sich jetzt der Gebrauch ausgebreitet, statt $\sin \alpha^2$ zu schreiben $\sin^2 \alpha$. Obwo bekannt ist, dafs Gaufs diese Schreibart unwillig abwies, erscheinen jetzt in Ostwal Klassikern Neudrucke seiner Werke, worin sie angewandt wird, ebenso wird in der neu Parallel-Ausgabe des Mehler-Schellbach die alte Schreibung verlassen. In Wittstei Logarithmen-Tafeln ist sie nicht mehr zu finden, seit der Verfasser — pädagogisch Wünschen folgend — den Formel-Anhang weggelassen hat. Martus sagt, um die ne Mode zu rechtfertigen, er sehe in $\sin^2 \alpha$ den Buchstaben α als einen Index an. Spric man etwa x_3^2, wo 3 ein Index ist, in der Form „x Quadrat drei“ aus? Man sagt vielme „x drei Quadrat“, unbekümmert darum, dafs dies von Unkundigen mit „x-neun“ v wechselt werden könnte. Auch folgender Beweis ist nicht unerhört, sondern wirklich usum delphini im Unterricht mit Erfolg verwandt worden. In der Formel $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 =$ solle doch der Sinus ins Quadrat erhoben werden, nicht der Winkel, also müsse m schreiben $\sin^2 \alpha$. Entsprechend kann ich beweisen, dafs $\sqrt[3]{\sin \alpha}$ falsch, $\sqrt[3]{\sin \alpha}$ richtig i Wie ist übrigens $(\text{arc} \sin x)^2$ nach der neuen Art zu schreiben, wie $(\log x)^2$? Nach von Klein betriebenen Unterrichtsreform, mit der jetzt alle Versammlungen und Ze schriften durchsetzt sind, wird ja bald jeder Schüler mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ operieren können, sollte dann auch einiges von dem Sinn dieser Zeichen aus den strengen Ableitungen behal haben, so ist ja Aussicht, dafs die Gaufs'sche Schreibart bald wieder allgemein wird.

I. Einfache Beispiele von Iterationen.

§ 2. Iterationen treten schon beim logarithmischen Rechnen auf. Der dort v wandte Logarithmus ist nicht die wirkliche, mit komplexen Feinheiten behaftete Funkt der Analysis, er ist nur die Vorstufe zu jener, der Logarithmus des absoluten Betra Wünscht man das Vorzeichen der Zahl zu beachten, so setzt man, wenn es nicht positive ist, nach Gaufs die Bemerkung „n“ hinter die Gleichung $\log N = L$. Man s z. B. die Rechenbeispiele in der Theoria motus corporum coelestium in sectionibus con solem ambientum. Sollte also in einem Rechenformular mit $\log \sin \alpha$ für α der R nach zu setzen sein 70°, 140°, 210° usw., so wird man in der dritten Reihe mit F haltung des alten Schema schreiben $\log \sin \alpha = 9{,}69897$ n und nicht für diese Reihe alte Formular durch das neue Gerüst ersetzen $\log(-\sin \alpha) = 9{,}69897$. Zur Zeit Rheticus wurde die sphärische Trigonometrie in Folianten abgehandelt, da für je Quadranten, in den die Winkel und Seiten fielen, besondere Formeln aufgestellt we mufsten. Für die Berechnung der dritten Seite eines ebenen Dreiecks, von dem a, gegeben sind, galten verschiedene Vorschriften, je nachdem γ spitz oder stumpf a Heute umfafst dieselbe Gleichung alle Fälle, die Modifikationen sind auf die Defini von Sinus und Cosinus geworfen. Auch das Rechenschema ist bei Verwendung

Funktionen selbst ein allgemeingiltiges. Darin liegt ein grofser Fortschritt, der auch oft gerühmt wird. Aber er wird aufgehoben, wenn man bei Verwendung von Logarithmen wieder zur alten Unterscheidung vieler Fälle zurückkehrt. Die Formeln und Rechen-Schemata sollen der Ökonomie des Denkens dienen.

In Zinseszinsrechnungen wird es nun bei der Aufgabe, die Zeit zu bestimmen, notwendig, von einer Zahl, die ihrem Wesen nach ein Logarithmus einer positiven Zahl ist, zur Berechnung selbst wieder den Logarithmus zu nehmen. In diesem Falle könnte man statt $\log\log(1+p)$ sehr gut schreiben $\log^2(1+p)$.

§ 3. Bei Ableitung der Renten-Formel spielen iterierte Funktionen eine wesentliche Rolle, und die Aufgabe ist, einen geschlossenen Ausdruck für eine beliebige Iterierte zu finden. Das beliebige Kapital x vergröfsere sich durch Zinsen in einem Jahre auf $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x = a\cdot x$ und vermindere sich durch eine Rentenzahlung um b, dann ist der Wert des Kapitals nach Verlauf eines Jahres

$$x_1 = ax - b.$$

Ebenso $x_2 = ax_1 - b$ usw. Zur Vereinfachung führe man als Hilfsgröfse ein Kapital α ein, welches aus diesem Prozefs unverändert hervorgeht, so dafs also $\alpha = a\alpha - b$ oder $\alpha = \frac{b}{a-1}$. Dadurch wird die Grundgleichung $x_1 - \alpha = a(x-\alpha)$, ebenso $x_2 - \alpha = a(x_1-\alpha) = a^2(x-\alpha)$, endlich $x_n - \alpha = a^n(x-\alpha)$, woraus

$$x_n = a^n x - (a^n - 1)\alpha = a^n x - \frac{a^n - 1}{a-1} b.$$

§ 4. Soll ferner der Kettenbruch $y = a_1 + 1/2a_2 + \ldots + 1/2a_n$, in welchem die Teilnenner $a_1, a_2, \ldots$ alle den Wert a haben, durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden, so betrachte man zunächst allgemeiner

$$x_n = a_1 + 1/2a_2 + \ldots + 1/2a_n + 1/(a+x).$$

Es ist $x_1 = a + \frac{1}{a+x}$, $x_2 = a + \frac{1}{a+x_1}$ usw. Diese Gleichung vereinfacht sich durch Einführung einer Hilfsgröfse α, die sich durch die obige Transformation nicht ändert. Aus $\alpha = a + \frac{1}{a+\alpha}$ folgt $\alpha_1 = \sqrt{a^2+1}$, $\alpha_2 = -\sqrt{a^2+1}$. Nun wird:

$$x_1 - \alpha = \frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+\alpha} = -\frac{x-\alpha}{(a+x)(a+\alpha)}.$$

Ebenso für $\alpha = \alpha_2$

$$x_1 + \alpha = -\frac{x+\alpha}{(a+x)(a-\alpha)}.$$

Hieraus durch Division

$$\frac{x_1+\alpha}{x_1-\alpha} = \frac{a+\alpha}{a-\alpha}\,\frac{x+\alpha}{x-\alpha}.$$

Nach dieser Gleichung entsteht auch x_2 aus x_1, x_3 aus x_2, ... Hieraus folgt

$$\frac{x_n + \alpha}{x_n - \alpha} = \left(\frac{a + \alpha}{a - \alpha}\right)^n \frac{x + \alpha}{x - \alpha}.$$

Durch Auflösung nach x_n wird

$$x_n = \frac{xs + \alpha^2 d}{xd + s}, \text{ wo } \begin{array}{l} s = a^n + n_2 a^{n-2}\alpha^2 + n_2 a^{n-2}\alpha^4 + \ldots \\ d = n_1 a^{n-1} + n_3 a^{n-3}\alpha^2 + n_5 a^{n-5}\alpha^4 + \ldots \end{array}$$

Setzt man hier $\alpha^2 = 1 + a^2$, so ist x_n rationell durch x und die ursprüngliche Konstante ausgedrückt. Für $x = \infty$ erhält man den gesuchten Wert des Kettenbruchs

$$y = a_1 + 1/2\,a_2 + \cdots + 1/2\,a_n.$$

Ebenso ist der Kettenbruch $y = a_1 + 1/b_1 + 1/a_2 + 1/b_2 + \ldots + 1/a_n + 1/b_n$ zu behandeln, wo $a_1 = a_2 = \ldots = a$, $b_1 = b_2 = \ldots = b$ sein soll. Im ersten Heft des ersten Bandes der Acta mathematica, welches weite Verbreitung fand, hat Poincaré solche Gleichungen als Transformationen in der komplexen Ebene betrachtet.

§ 5. Zieht man von einem Punkt des Kreises $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ oder $x^2 + y^2 = y$ oder $y = f(x)$ eine wagerechte Strecke bis zur Geraden $y = x$, von hier eine senkrechte zum Kreispunkt $(x_1 y_1)$, und kommt man nach diesem Verfahren ebenso von $x_1 y_1$) nach $(x_2 y_2)$ usw. (Fig. 2), so erhält man

$$x_1 = y = f(x),\ x_2 = y_1 = f(x_1),\ \text{also } x_2 = f\,f(x) = f^2(x) \ldots x_n = f^n(x).$$

Die Gestalt der Funktion $y = f(x)$ ergibt sich durch Auflösung der Kreisgleichung und Reihenentwickelung

$$x_1 = y = f(x) = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - x^2} = x^2 + x^4 + 2x^6 + 5x^8 + 14x^{10} \ldots$$

Es wäre vergebliches Bemühen, durch Wiederholung dieser Substitution das Gesetz von x_n zu entdecken.

Wir suchen die Grundgleichung $x_1 = f(x)$ auf die Form zu bringen

$$\varphi(x_1) = \varphi(x)^2$$

wo $\varphi(x) = x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + \ldots$ sei. Zur Entwickelung der linken Seite wird benutzt, dafs

$$\begin{array}{lll} x_1^2 = x_1 - x^2 & = x^4 + 2x^6 + 5x^8 + 14x^{10} \ldots \\ x_1^3 = x_1^2 - x_1 x^2 & = x^6 + 3x^8 + 9x^{10} \ldots \\ x_1^4 = x_1^3 - x_1^2 x^2 & = x^8 + 4x^{10} \ldots \\ x_1^5 = x_1^4 - x_1^3 x^2 & = x^{10} \ldots \end{array}$$

ist. Die rechte Seite ist

$$\varphi(x)^2 = x^2 + 2c_3 x^4 + (c_3^2 + 2c_5) x^6 + 2(c_7 + c_3 c_5) x^8.$$

Die Koeffizienten-Vergleichung ergibt

$$c_3 = \frac{1}{2},\ c_5 = \frac{9}{8},\ c_7 = \frac{43}{16}$$

also

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{8}x^5 + \frac{43}{16}x^7.$$

Aus $\varphi(x_1) = \varphi(x)^2$ folgt nun

$$\varphi(x_n) = \varphi(x)^{2^n}$$

Um x_n explizite zu erhalten, ist es nötig, aus dem Werte von $\varphi(x_n)$ auf den von x_n zu schliefsen, oder die Reihe $\varphi(x)$ umzukehren. Endlich hat man

$$x_n = \varphi(x_n) - \frac{1}{2}\varphi(x_n)^3 - \frac{3}{8}\varphi(x_n)^5 \ldots$$

$$= \varphi(x)^m - \frac{1}{2}\varphi(x)^{3m} - \frac{3}{8}\varphi(x_n)^{5m} \ldots (m = 2^n).$$

Werden hier die Potenzierungen ausgeführt, so erhält man mehrere Reihen von Potenzen, die erste beginnt mit x^m und ist durch Polynomial-Koeffizienten von $m = 2^n$ gebildet, die zweite enthält solche von 3 m $(= 3 \cdot 2^n)$ und beginnt mit $x^{3m}, \ldots$. Man kann daher nicht ohne weiteres angeben, welche Glieder jeder Reihe zu derselben Potenz beitragen, das würde zahlentheoretische Festsetzungen erfordern. Daraus ist es klar, dafs man auf direktem Wege nur schwer zu dem allgemeinen Gesetz kommen könnte.

II. Die Newton'sche Näherungsmethode im komplexen Gebiet.

§ 6. 1. Literatur. In Baltzers Elementen der Mathematik ist die Newtonsche Methode zur Auffindung reeller Wurzeln in ihrer ursprünglichen Gestalt sachgemäfs, nämlich durch ausgeführte Zahlenbeispiele dargelegt. Ebenso im Anhang zu Mehlers Leitfaden. Dort zeigt Schellbach, wie er im Unterricht verfuhr. Ist die numerische Gleichung $f(t) = 0$ zu lösen, so betrachtete er $x = f(t)$ als Abszisse eines Punktes für die von einer festen Epoche gemessene Zeit t, rechnete wiederholt an verschiedenen Beispielen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung aus, führte so unter beständigem Denken in das Verständnis der Geistesprozesse ein, auf denen die Infinitesimal-Rechnung beruht, er vermied allgemeine Formeln, die mechanisch die Endresultate liefern. Die Geschwindigkeit stellte er durch die Ordinaten einer Kurve für den jedesmaligen Ort des Punktes dar, dadurch werden die allgemeinen Züge der Bewegung, nach welcher Seite sie geht, wo die Umkehrpunkte liegen, dem Augenschein klargelegt. Er pflegte darauf hinzuweisen, dafs diese Kurven nicht ganz willkürlich gegeben werden dürften. Sie werden weiter unten noch vorkommen.

Was dagegen von Weber in der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik", dem Ersatz für Baltzer", geboten wird, ist unbrauchbar und zeigt, dafs der Verfasser, obwohl er in den höchsten algebraischen Theorien bewandert ist, der numerischen Auflösung von Gleichungen völlig fernsteht, was nur deshalb hervorzuheben ist, weil ein Anfänger ungewarnt nach dem Titel des Buches ein Recht hätte, das Gegenteil anzunehmen. Das

Newtonsche Verfahren sei vor allem dazu da, einen ersten Wert zu geben; dafs ja gesetzmäfsig vom ersten Wert zum zweiten, von diesem zum dritten übergeht, wird nicht erwähnt; es sei gut, das Newtonsche Verfahren mit der Regula falsi abwechseln zu lassen; das beste sei eine originelle angebliche Methode, Ziffer für Ziffer der Wurzel zu bestimmen. Diese rohe Methode ist mit menschlichen Kräften so gut wie unausführbar; sie ist das Chaos, aus dem die regula falsi und Newton Rettung brachten, man wird sie nur anwenden, wenn diese noch unbekannt wären. Sie ist auch von Weber schwerlich angewandt worden, er hat vielmehr die ihm anderswoher gebotene Wurzel auf diese Art verifiziert und seine Kenntnis des wahren Wertes benutzt, seine Probe immer gleichmäfsig dem richtigen Wert der folgenden Ziffer zu beginnen. Die Annahme solcher Verfahren mag für „strenge Existenzbeweise“ ausreichen, das in der Schule zu lehrende numerische Rechnen mufs sie abweisen. Die Aufsuchung komplexer Wurzeln wird nur an einer leichten trinomischen Gleichung, und zwar für $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ durch Zerfällung in zwei Gleichungen mit r und φ gezeigt. Es wird nicht etwa das Gleichungssystem mit Näherung behandelt, sondern vorher eliminiert.

Das Buch von Lüroth (Numerisches Rechnen) schliefst leider die Auflösung der Gleichungen aus.

§ 7. Deutung von Funktionen im komplexen Gebiet. Es ist bekannt, wie man bei Annäherung an eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ die Newtonsche Formel $x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ mittelst der Kurve $y = f(x)$ deuten kann. Man zieht in einem Kurvenpunkt (x, y) eine Tangente, welche die Abszissen-Achse in $(x_1, 0)$ treffe, geht an von dem darüber liegenden Kurvenpunkt $(x_1\, y_1)$ ebenso weiter. Dafs für komplexe Wurzeln eine ähnliche Deutung möglich ist, fand ich nirgends.

Wir stellen den Funktionswert von $f(x) = R\,e^{i\Phi}$ in irgend einem Punkte der komplexen Ebene durch ein auf ihr errichtetes Lot $= R$ dar, welches wir mit einer Signatur für Φ versehen. Die Endpunkte der Lote bilden eine Fläche, die man wie ein geographisches Relief mittelst Isohypsen und Fall-Linien genauer Zeichnung zugänglich machen kann. Ist $R = e^{\varrho}$, $f(x) = e^{\varrho + i\Phi}$, so ist $\varrho + i\,\Phi = \log f(x)$ eine Funktion von x; daher wird die komplexe Ebene (x) konform auf die komplexe Ebene $(\varrho + i\Phi)$ abgebildet. Wachsen in den Kurven $\varrho = \text{const}$ und $\Phi = \text{const}$ die Konstanten um gleiche oder kleine Inkremente, so entsteht in der zweiten Ebene ein Netz mit quadratischen Maschen; in der ersten Ebene entspricht dem ein eben solches Netz, auf der Fläche ein Netz von Rechtecken. Da die Kurven-Schaar $\varrho = \text{const}$ mit der Kurvenschaar $R = \text{const}$ bis auf die Numerierung übereinstimmt, so steht auch die Schaar $\Phi = \text{const}$ auf $R = \text{const}$ in der x-Ebene und innerhalb der Fläche senkrecht, oder jene stellt die Fall-Linie des geographischen Reliefs dar. Man hat die Kurven im allgemeinen auf der Fläche zu betrachten; die projizierten Kurven in der x-Ebene bilden nur ein Surrogat, dessen Wert auf der Möglichkeit genauer Zeichnung beruht.

§ 8. Lineare Funktionen. In Fig. 3 sind die linearen Funktionen $y = 3x + 1$ und $y = ix$ dargestellt, allgemein $y = a(x - \alpha)$ und $y = b(x - \beta)$. Für den Schnittpunkt beider Gebilde mufs sein $\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}$, d. h. das Verhältnis der Abstände der

nktes x von α und β mufs gleich dem Modul von b/a, der Winkel, den sie bilden, fs gleich der Phase von b/a sein. Nach der Figur ist der Schnittpunkt $x = -0{,}6 - 0{,}2\,i$, gemeinsame Wert $y = 0{,}63\,e^{i\cdot 288°}$. Jede Fläche bildet einen aufwärts gekehrten chter oder Kegel, dessen Scheitelpunkt in der Grundebene liegt. Die Fall-Linien en die Steigungen 3 und 1, die Phasen wachsen von einer bestimmten Fall-Linie von $0°$ bis $360°$. Legt man einen Profilschnitt vom Punkte (0) nach (—1), so beht dieser aus den Geraden $\pm y = 3x + 2$, und $\pm y = x$ der gewöhnlichen analytischen ometrie. Die Teile der Geraden, welche sonst unterhalb der Abszissenachse liegen, d hier durch symmetrisch gelegene Strecken oben zu ersetzen.

Die „Gerade“ $y = ix$ und allgemein $y = ix + \text{Const.}$ enthält den einen unendlichen nen Kreispunkt. Da zwei Gerade sich auch hier für gewöhnlich nur in einem Punkte neiden, so hat man anzunehmen, dafs der unendlich ferne Kreisrand der Modulfläche einen Punkt repräsentiert, obwohl auf ihm alle Phasen vorkommen, ebenso wie man beiden unendlich fernen Punkte der Geraden $y = x$ und $y = x + \text{Const.}$ für einen ieht, obwohl sie die Phasen $0°$ und $180°$ haben.

§ 9. Ganze Funktion zweiten Grades und Newtonsche Näherungsrmel. In Fig. 4 ist die Funktion $y = x^2 + \frac{4}{3}x + 1$ dargestellt. Sie verschwindet in Punkten α, $\beta = -0{,}67 \pm i \cdot 0{,}75$, daher $y = (x - \alpha)(x - \beta)$. Als Einheit gilt eine ecke von 5 cm. Man kann daher mittelst eines cm-Mafses die Lage eines Punktes + bi) leicht feststellen.

Durch Anlegen einer Logarithmen-Skala bestimmt man für die Gitterpunkte $0{,}1 + q \cdot 0{,}1\,i$, wo p und q ganze Zahlen sind, die Logarithmen ihrer Abstände von α β, bildet die Summe der Logarithmen, und findet dazu als Numerus den Modul von y. l diese an alle Gitterpunkte herangeschrieben, so erhält man durch graphische Interation die Isohypsen. Die Skala stellt man sich auf einem aus Papier geknifften Lineal , indem man die Zahlen 0,20 0,21 0,22 0,23 ... (etliche Briggische Logarithmen) an Punkte schreibt, deren Abszissen tatsächlich 1,58 1,62 1,66 1,70 ... sind (d. h. die hörigen Numeri).

Nunmehr bestimmt man mit dem Transporteur für einige Punkte einer Isohypse die se (oder das Azimut) des Vektors $(\alpha \to x)$ und $(\beta \to x)$. Deren Summe gibt die Phase y. Durch Einschaltung findet man Punkte mit den Phasen $0°$, $30°$, $60°$, $90°$.. diesen Punkten kann man senkrecht zu den Isohypsen ein gut Stück weiter gehen, es nötig ist die Phase (wie das Azimut eines Schiffskurses mit der Kompafsnadel) zu rolieren und zu korrigieren.

Setzt man für einen Punkt x, der in der Nähe eines festen Punktes x_0 liegt, $= x_0 + \xi$, so kann man entwickeln $y = f(x_0) + f'(x_0)\,\xi + \frac{1}{2} f''(x_0)\,\xi^2 + \ldots$, also anhert $y = f(x_0) + f'(x_0)\,\xi = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Das ist eine lineare Gleichung, durch einen Kegel mit Signatur zu deuten ist. Im Punkte x_0 berührt diese Kegele die gegebene Fläche so, dafs die Fall-Linien sich berühren und gleiche Phase n. Die signierte Kegelfläche ist die volle Entfaltung der gewöhnlichen Tangente der ve $y = f(x)$, ihr Scheitel auf der x-Ebene ist an Stelle des Punktes getreten, wo die Tangente die Abszissenachse ($y = 0$) schneidet. Die Steigung der Fall-Linie ist

$= |f'(x_0)|$. Ersetzt man die „Kurve $y = f(x)$“ durch ihre „Tangente in (x_0, y_0)“, so erg sich als Schnittpunkt mit der „Abszissenaxe $(y = 0)$“ der Wert

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

d. i. die Newtonsche Näherungsformel. Geometrisch bedeutet das: Man gehe von d Flächenpunkt, der über x_0 liegt, in Richtung der Tangente der Fall-Linie so weit, man in die Grundebene gelangt. Dort ist der Punkt x_1. Ist wie gewöhnlich kein Fläch modell vorhanden, so geht man von x_0 tangential zur projizierten Fall-Linie um Strecke $\left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|$ weiter. Den Endpunkt bestimmt man nach der Methode der kotier Ebenen. Haben die Isohypsen den Höhenabstand 0,1, und ist an der betrachte Stelle etwa ihr Normalabstand in der Projektion $= 0{,}2$, so ist das Gefälle $\frac{1}{2}$, da die Subtangente $= R : \frac{1}{2} = 2R$, wenn R der Modul für den Ausgangspunkt ist. Wesen der Newtonschen Näherung verlangt dann, die obige Formel zu iterieren, vor zu x_2, ebenso von x_2 zu x_3 usw. überzugehen. Die Figur läfst sehr gut erkennen, man von Punkten oberhalb der reellen Achse, die hier die Mittelsenkrechte zu $(\alpha \,..\, \beta)$ allmählich auf den Punkt α, von denen unterhalb dieser Linie auf den Punkt β gefü wird, dafs man dagegen von Punkten auf der reellen Axe ziellos weiter irrt, ohne d je zu verlassen.

Merkwürdig ist der Punkt $x = -0{,}67$, wo $f'(x) = \frac{3}{4}(3x + 2)$ nach der vori Figur (3) verschwindet. Für die Umgebung wird durch Entwicklung bis zum zwe Glieder $y = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\, \xi^2$. Beschreibt ξ einen kleinen Kreis um den Nullpunkt e komplexen Ebene, so durchläuft ξ^2 zweimal einen sehr kleinen Kreis, daher vollfüh einen derartigen Doppel-Umgang um den Punkt $f(x_0)$. Der Modul erhält zwei Max und zwei Minima in Richtungen, die von x_0 aus rechte Winkel mit einander bil die Phase pendelt zweimal um den Wert 0°. Dieser Punkt ist mit einem Pafs über e Gebirgssattel zu vergleichen, der von α nach β führt, die beiden Hauptkrümmur haben entgegengesetzte Zeichen.

Die Isohypsen in der Projektion sind Lemniskaten, die Isophasen sind Hyperb

Die genauere Gestalt der Fläche ergibt sich aus dem Profil längs der Str $(\beta) \ldots (\alpha)$ (Fig. 4a). Hier ist die Phase immer 0° d. h. $f(x)$ ist positiv, in der I setzung über α und β hinaus schlägt sie in 180° um, d. h. $f(x)$ ist negativ. Steige gleicher Zeit viele Personen von α und von β aus nach verschiedenen Richtungen an Abhängen längs der Fall-Linien aufwärts, so dafs sie sich immer in gleicher Höhe ha so kommt einmal der Augenblick, dafs zwei Personen, die aus verschiedenen Talkes aufstiegen, sich in dem Punkt $x = -0{,}67$ auf dem Sattel treffen. Bis dahin ist Phase der Linie, auf der sie ansteigen, 0°. Um weiter zu steigen, müssen bi Personen „Links-um“ machen und bewegen sich nun auf einem Wege aufwärts, den m mit einem Grat vergleichen kann, wenngleich er nur an die Wasserscheide eines n gewölbten Bergrückens, nicht an unstetige, auf beiden Seiten schroff abfallende Kä der Alpen erinnert. Für diesen Weg bleibt die Phase = 0°. Er ist in der Figur strichelt eingezeichnet. Denkt man sich die Kurven des Profils aus starren Drähten bogen, die gestrichelte gegen die Ebene des Papiers um ihre Mittellinie gedreht, so la

e eine Hälfte um 90° hervor-, die andere zurücktritt, so hat man ein Skelett der Fläche. ɔch dazu sind die Wege, die aus den Talkesseln zum Pafs führen, sogenannte Talwege, re Steigung ist geringer als die der benachbarten Fall-Linien links und rechts, die rtsetzungen über α und β hinaus haben dagegen ein Maximum der Steilheit.

Das Gebiet, welches von α aus auf Fall-Linien zugänglich ist, kann man als eine α gehörende Provinz ansehen. Die beiden Provinzen α und β sind durch den „Grat“ n einander getrennt, der selbst ein Minimum der Steilheit im Vergleich zur benachbarten ll-Linie hat.

Beschreibt man über $(\alpha \ldots \beta)$ als Durchmesser einen Kreis, so ist für das biet, welches sich in das Innere projiziert, die Gaufs'sche Krümmung negativ, aufserhalb sitiv.

§ 10. Ganze Funktion dritten Grades. In Fig. 5 ist die Funktion dar-stellt

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$$
$$= (x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)$$
$$\gamma = 0, \quad \delta, \varepsilon = -1 \pm 1{,}414\,i.$$

entstehen drei trichterförmige Talkessel, zwischen denen zwei Pafs-Höhen durch $x) = 3(x^2 + \frac{4}{3}x + 1) = 0$ bestimmt sind, nämlich α, $\beta = -0{,}67 \pm 0{,}75\,i$ aus voriger ;ur (4). Hier geht eine Eigenschaft des vorigen Falles verloren. Der Modul von x), der die Steilheit der Fall-Linie bestimmt, ist auf den Wegen, die von einem Wurzel-ıkt zu einem Pafs führen, nicht in der ganzen Ausdehnung ein Maximum oder Minimum, ıdern nur in der Nähe des Sattels. Der Vergleich der Figur (5) für f(x) mit der ;ur (4) für f'(x) zeigt dies. Die Gestalt der Fläche in der Nachbarschaft des Wurzel-ıktes läfst nicht mehr erkennen, welcher Aufstieg nach der Pafshöhe führt.

Der Punkt $x_0 = -0{,}34\,639 + 0{,}95\,726\,i$ ist genau auf der ıt-Linie, der Grenze der Provinzen α und β, angenommen. Zieht man in ihm an diesen ıt, der zugleich eine Fall-Linie ist, eine Tangente, so ist ihr Endpunkt in der x-Ebene ınso wie in § 9 zu finden. Die Höhenstufe ist hier $= 0{,}2$. Der Abstand der Isohypsen ; 2,0; 2,2 ist hier im Durchschnitt $\varepsilon = 0{,}1$ in der Projektion, der Modul oder die he ist $R = 2{,}0$, folglich mufs man auf der Tangente durch 10 Höhenstufen von 2,0 zu 0 ken, die projizierte Tangente hat daher die Länge $10 \cdot \varepsilon = 1$. Die Rechnung ergibt ıau

$$x_1 = -1{,}14\,823 + 0{,}35\,974\,i$$

Ist der Ausgangspunkt x_0 einer Näherung einem Sattelpunkt sehr nahe, so liegt neue Punkt x_1 in sehr grofser Entfernung. Man kann es so einrichten, dafs man ı dort mit einem, oder mit zwei, oder mit drei Sprüngen genau in den Punkt x_0 zurück-ırt, so dafs sich Gruppen von Stationen bilden, in denen der Punkt rastlos umherirrt. gt der Ausgangspunkt in einer geschlossenen Isohypse eines Talkessels, um eine gewisse ecke unterhalb des niedrigsten der Pässe, die in benachbarte Gebiete führen, so geht Näherung sicher vorwärts, sodafs man nach jedem Sprunge dem Scheitel der trichter-nigen Einsenkung näher ist.

In Fig. 5 a ist ein Profil des Weges gezeichnet, der von dem Wurzelpunkt γ h δ über den Pafs α führt. Die Projizierenden bilden eine vertikale Wand, die in

horizontaler Richtung schwach gekrümmt ist. In der Figur ist sie in eine vertikale Ebene ausgebreitet worden. Die Phase ist 150°, in der Fortsetzung über γ und δ hinaus 330°. An dem Sattel ändert sich die Richtung der Steiglinie — die ihre Phase beibehält —, um 90°. Auch die Fortsetzung liegt auf einer vertikalen Wand, die man gerade gebogen hat. Sie ist in der alten vertikalen Ebene gestrichelt dargestellt. Richtet man starre Drähte, die nach den beiden Profilkurven gebogen sind, so, dafs ihre Ebenen vertikal und rechtwinklig zu einander stehen, so hat man ein gutes Skelett der Fläche, in der Nähe der Wurzelpunkte kann es noch durch zwei kleine Trichter ergänzt werden.

§ 11. Liegt eine Gleichung n^{ten} Grades vor $y = f(x) = 0$ mit den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so ist $y = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$ Der Modul ist gleich dem Produkt der Abstände des Punktes x von den Punkten α, β, $\gamma \ldots$. Daher setzt sich der Ort der Punkte, für welche der Modul $|y|$ einen sehr kleinen Wert hat, aus geschlossenen Kurven zusammen, die jene Punkte umgeben. Wächst der Wert des Moduls, so dehnen sich alle Gebiete aus, bis schliefslich zwei in einem Punkte aneinanderstofsen. So entstehen die Sattelpunkte. Haben sich schliefslich alle Gebiete vereinigt, so wächst das Gebiet immer mehr nach aufsen, und die Randlinien werden schliefslich fast zu Kreisen. Für einen vorgeschriebenen sehr grofsen komplexen Wert von y hat $y = f(x)$ n Wurzeln, die auf dem grofsen Kreise gleichmäfsig verteilt sind. Führt man y in einer besonderen Ebene auf beliebigem Wege zu 0, so läuft x von den eben genannten Punkten auf n Wegen innerhalb jeder Provinz zu den Wurzelwerten α, β, $\gamma \ldots$

Cayley stellte 1879[1]) mehrfach die Aufgabe, das Newton-Fouriersche Problem in der komplexen Ebene zu lösen, d. h. die Gebiete anzugeben, von wo die Näherung immer näher an die Wurzeln, nicht etwa blofs zu kleineren Werten der Funktion führt. Bei dieser Frage sind solche Punkte x_0 auszuschliefsen, die zufällig aus weiter Entfernung in die Nähe eines gegebenen x_1 führen, es sollen nicht solche Einzelpunkte, sondern die zusammenhängenden Gebiete um jeden Wurzelpunkt bestimmt werden. Dies kann so geschehen. Man stelle x_1 als Funktion von x durch eine signierte Fläche dar. Aus $x_1 = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x)$ folgt $\varphi'(x) = \frac{f f''}{f'^2}$. Die Fläche φ erhebt sich über den Wurzelpunkten von $f' = 0$, z. B. α, β, ins Unendliche, ebenso für $x = \infty$, wo angenähert aus $f = a_c + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ folgt $\varphi = \frac{1}{n} x$. In den Wurzelpunkten von $f(x) = 0$ z. B. γ, δ, ε, wird $\varphi(x) = x$ und $\varphi'(x) = 0$. Hier hat die Fläche φ einige ihrer Sattelpunkte. Verlegen wir den Nullpunkt in die näher zu betrachtende Wurzel, so wird $a_0 = 0$,

$$= \frac{a_2 x^2 + 2 a_3 x^3 + \ldots + (n-1) a_n x^n}{a_1 + 2 a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}} = x^2 (c_0 + c_1 x + \ldots).$$

Der Anfangspunkt wird daher für φ zu einer Doppelwurzel, die Fläche φ erscheint hier nicht als Kegel, sondern als flacher Talkessel, dessen Profil durch die Parabel $y = c_0 x^2$, und wenn $c_0 = 0$ ist, durch $y = c_1 x^3$ dargestellt wird.

---

[1]) Quarterly Journal XVI, American Journal II, Cambridge Proceedings III.

Zweitens konstruiere man die Fläche für die lineare Funktion $y = x$, die sich vom Nullpunkt kegelförmig unter 45° Neigung erhebt. In der Nähe des Nullpunktes liegt die Kegelfläche höher als die Fläche φ, in α, β liegt φ höher, also sind um den Punkt 0 herum nach manchen Richtungen Punkte zu finden, wo der Modul von y gröfser wird als der Modul von φ. Sind diese Punkte festgestellt, so schlage man um den Nullpunkt einen Kreis, der durch den nächsten dieser Punkte hindurchgeht. Er ist der „safe circle“ Cayleys, in dem die Annäherung sicher zum Ziele führt. Denn innerhalb dieses Kreises ist immer $|x_1| < |x|$, folglich $|x_2| < |x_1|$ usw. Er reicht nicht bis zum nächsten Sattelpunkt. Um jeden Wurzelpunkt ist ein solches Gebiet abzugrenzen. Man kann es am Rande noch um einen gewissen Gebietsstreifen erweitern bis zu einer äufsersten Grenze, die kein Kreis mehr sein wird.

Die Annäherung an die Wurzel geschieht quadratisch oder kubisch, dagegen für sehr grofse Werte von x nach der Gleichung $x_1 = \varphi = x/n$, also linear. Ist eine Wurzel von $f = 0$ eine Doppelwurzel, so kann man diese wieder in den Nullpunkt verlegen, dann ist $a_1 = 0$, $\varphi = x/2$ resp. $x/3$, die Annäherung an eine mehrfache Wurzel erfolgt also auch linear, so wie die Annäherung an die Wurzeln einer quadratischen oder kubischen Gleichung aus dem Unendlichen. Liegen Wurzeln sehr nahe aneinander, so werden die Bezirke der sicheren quadratischen Annäherung sehr klein.

Da die Näherung, begonnen mit einem ungünstigen Punkte x_0, nur nach Irrfahrten, manchmal gar nicht zum Ziele führt, so ist es anfangs zu empfehlen, ein anderes Näherungsverfahren anzuwenden, mit dem man sicher auf der signierten Fläche sich abwärts bewegt. Man setze

$$f(x_1) = (1 - \vartheta)\, f(x_0),$$

wo ϑ ein positiver echter Bruch sei, nicht zu grofs, etwa $= 0{,}1$. Gelingt es, x_1 zu finden, so hat hier $f(x)$ dieselbe Phase, aber einen kleineren Modul als in x_0. Für $\vartheta = 0$ würde $x_1 = x_0$ sein. Man setze die Entwicklung an

$$x_1 = x_0 + c_1 \vartheta + c_2 \vartheta^2 + \ldots$$

dann ist

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(c_1\vartheta + c_2\vartheta^2) + \tfrac{1}{2} f''(x_0) \cdot (c_1\vartheta + \ldots)^2 + \ldots \\ &= f_0 + c_1 f_0' \cdot \vartheta + (c_2 f_0' + \tfrac{1}{2} f_0'' c_1^2)\,\vartheta^2 + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man dieses in $f(x_1) = (1 - \vartheta)\, f(x_0) = f_0 - \vartheta f_0$

ein, so ergibt die Koeffizienten-Vergleichung die Werte von c_1 und c_2 und damit

$$x = x_1 - \frac{f}{f'}\vartheta - \frac{f'' f^2}{2 f'^3}\vartheta^2 + \ldots$$

Dies ist eine Formel, die, für $\vartheta = 1$, weiter fortgesetzt, von Euler herrührt, und die als verbesserte Näherung an die Stelle der Newtonschen treten kann. Lagrange schlug sie sehr hoch an. Setzen wir ϑ gleich einem echten Bruch, so dient sie zur langsamen, doch sicheren Näherung.

§ 12. Geschlossene Ausdrücke für x_n. Für quadratische Gleichu ist der Zusammenhang von x_0 und x_1, $x_2 \ldots$, einfach darzustellen. Es ist

$$x_1 = x - \frac{x^2 + ax + b}{2x + a} = \frac{x^2 - b}{2x + a} = \frac{x^2 - \alpha\beta}{2x - \alpha - \beta}.$$

Soll $x_1 = x$ werden, so mufs x eine Wurzel der Gleichung sein, z. B. $= \alpha$.

Dann folgt: $$x_1 - \alpha = \frac{x^2 - \alpha\beta}{2x - \alpha - \beta} - \alpha = \frac{(x-\alpha)^2}{2x + a}.$$

Ebenso $$x_1 - \beta = \frac{(x-\beta)^2}{2x + a}$$

folglich $$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} = \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^2.$$

Endlich $$\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} = \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^m \qquad (m = 2^n)$$

woraus sich x_n leicht rational in a, b und x, frei von α und β, darstellen läfst. E

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = r\,e^{i\varphi}, \text{ dann wird } \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} = r^m\,e^{mi\varphi}.$$

Ist x näher an α als an β, oder $r < 1$, so rückt x_n schnell auf α zu, der Winkel (verdoppelt sich bei jedem neuen Schritt, ist er etwa einmal $= \frac{2\pi}{7}$, so nimmt er nach Schritten denselben Wert an. Dafs die Annäherung nur von einer Seite erfolgt, is Ausnahmefall, der aber gerade bei reeller Annäherung an reelle Wurzeln eintritt.

Ist x von α und β gleich weit entfernt, so bleibt x_n auf der Mittelsenkre der Strecke $(\alpha\beta)$, ist der Winkel $(\alpha x \beta)$ rational zu 2π, so wird die Fortse periodisch.

Für die kubische Gleichung (Fig 5)

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x = 0$$

wird für die Nähe der Wurzel $x = 0$:

$$x_1 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{6 - 10x}{9(3x^2 + 4x + 3)} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3 - \frac{10}{27}x^4 + \frac{58}{81}x^5 \ldots$$

Wir nehmen an, dafs es möglich sei, diese Gleichung auf die Form zu bringen

$$\varphi(x_1) = \varphi(x)^2$$

wo $\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ sei. Durch Koeffizienten-Vergleichung folge Werte von a_1, a_2, a_3, und damit

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}x^2 - \frac{17}{108}x^3 \ldots$$

n ist $\varphi_n = \varphi(x_n) = \varphi(x)^m$ $(m = 2^n)$ bekannt. Aus dieser Gleichung folgt durch Reihenkehrung

$$x_n = 6\left(\frac{\varphi_n}{4}\right) - 6\left(\frac{\varphi_n}{4}\right)^2 + 63\left(\frac{\varphi_n}{4}\right)^3 \ldots$$
$$= 6\left(\frac{\varphi^m}{4}\right) - 6\left(\frac{\varphi^m}{4}\right)^2 + 63\left(\frac{\varphi^m}{4}\right)^3.$$

Ahnlich ergibt sich aus der kubischen Gleichung $x^3 - 1 = 0$ für die Annäherung die Wurzel $x = 1$, indem man $x = 1 + y$, $x_1 = 1 + y_1$, $x_2 = 1 + y_2$ einführt

$$y_1 = \frac{1}{3}(3y^2 - 4y^3 + 5y^4 - 6y^5 + \ldots)$$

$$\varphi(y) = y - \frac{2}{3}y^2 + \frac{5}{18}y^3 - \frac{46}{27}y^4 - \frac{1019}{648}y^5$$

$$\varphi(y_n) = \varphi(y)^m \quad (m = 2^n).$$

§ 13. Die signierten Flächen. Ähnlich wie die ganzen Funktionen 1., 2., Grades kann man auch die Funktionen $y = \sin x$ (s. Fig. 6)[1]), ferner den Verlauf von am (x) und p (x) durch genaue Zeichnung darstellen. Man erhält dann eine viel bemtere Vorstellung als wenn, wie schon üblich, an einige Punkte des Periodenallelogramms der Wert der komplexen Funktion herangeschrieben wird oder nur die rten für reelle Funktionswerte gezeichnet werden. Diese Art, eine Abbildungs-Aufe zu lösen, gibt kein Bild, sondern nur den Rahmen dazu[2]).

Die Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$, die den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ ersetzt, wird durch einfache Modulfläche dargestellt, auf der aber jede Fall-Linie doppelte Signatur Das Netz in der x-Ebene ist leicht aus dem der Funktion $z = 1 - x^2$ abzuleiten. Profil-Linien setzen sich aus Halbkreisen mit angeschlossenen gleichseitigen Hyperbeln mmen. Der allgemeine „Kreis“ $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$ läfst sich so bestimmen, dafs mit der „Kurve“ $y = f(x)$ drei unendlich nahe Punkte gemeinsam hat, dafs also seine ierte Fläche mit der von $y = f(x)$ bis zur 2. Ableitung übereinstimmt. Die signierte he dieses „Krümmungskreises“ hat im allgemeinen zwei Mäntel, die an zwei Stellen einander übergehen, jede Fall-Linie hat dann eine einfache Signatur. Die Gerade = 0 (d. h. die komplexe Ebene) schneidet er in zwei Punkten. Er ist aber wohl einer durch eine dreipunktig berührende Parabel zu ersetzen.

Von dem Kreise $y = \sqrt{1 - x^2}$ kommt man leicht zu der Ellipse $y = \beta\sqrt{1 - x^2}$ $x^2 + y^2/\beta^2 = 1$. Die von den reellen Brennpunkten $(x = \pm\sqrt{1 - \beta^2}, y = 0)$ an die lse gezogenen Tangenten können wirklich angeschaut werden, sie gehen wirklich durch imaginären Kreispunkte im Unendlichen und durch die imaginären Brennpunkte $x = 0$, $\pm i\sqrt{1 - \beta^2}$.

---

[1]) Die Figur läfst eine Schlucht mit steilen Wänden nach Art eines Cañon erkennen. Auf deren reihen sich trichterförmige Einsenkungen aneinander.

[2]) Ich habe in dieser Art „komplexe Tafeln“ für die oben genannten Funktionen, ferner für iale Funktionen, für $tg(u)$, $\vartheta(u)$, $\sigma(u)$, $\sigma'(u)/\sigma(u)$, endlich für den Modul k^2 als Funktion des Periodenltnisses ω hergestellt.

Die Symmetrie, die in der analytischen Geometrie zwischen x und y besteht, geht hier verloren, da $x = 0$ einen ganz schmalen Kegel, oder das im Nullpunkt errichtete Lot, $y = 0$ einen ganz flachen Kegel, die komplexe Ebene, jedesmal in Signatur der Seitenlinien, ergibt.

Die Aufgabe, zwei Punkte $(x_1 y_1)(x_2 y_2)$ durch eine Gerade zu verbinden, das Wesen der Regula falsi, bedeutet hier, den Scheitel α und die Konstante a (Phase und Neigung) eines signierten Kegels zu finden. Es mufs $y_1 = a(x_1 - \alpha)$, $y_2 = a(x_2 - \alpha)$ werden, so $y_1/(x_1 - \alpha) = y_2/(x_2 - \alpha) = a$. Die Abstände des Punktes (α) von (x_1) und (x_2) haben das Verhältnis $|y_1/y_2|$ und bilden einen Winkel gleich der Differenz der Phasen von y_1 und y_2. Dadurch ist α, dann auch a bestimmt.

Der obigen Darstellung komplexer Funktionen nähern sich erst in den letzten Jahren folgende Arbeiten: Ch. J. de la Vallée-Poussin, Mathésis (3), vol 2, supplément. Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée. — E. Maillet, Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. Comptes rendus 134 und 135 (1902). — Fehr. Giudice, Esistenza e calcolo di radici d' equazioni numeriche. — Pompeju, Rendiconti del circolo math. di Palermo, XIX, 1905. — Laurent. — In den Fortschritten der Mathematik ist darüber berichtet. Die Ausdrucksweise ist dort rein mathematisch, ohne geographische Analogien, obwohl Herstellung von Flächenmodellen den Anlafs gab.

III. Beispiel einer stetigen Iteration im Reellen.

§ 14. Die Punkte eines Kreises seien durch den Bogen φ, gemessen vom höchsten Punkte aus, bestimmt. Haften diese an einem Rade, und wird dieses um den Winkel ε gedreht, so wird der Punkt φ in $\varphi_1 = \varphi + \varepsilon$ transformiert. Durch n Transformationen wird $\varphi_n = \varphi + n\varepsilon$, wo n auch eine gebrochene Zahl oder eine stetige Veränderliche sein kann.

Läuft ein Hilfspunkt auf dem festen Kreise mit der Geschwindigkeit ε, und ist er für die Epoche im höchsten Punkt, so ist zur Zeit t seine Koordinate $= \varepsilon t$, er trifft den Punkt φ_0 zur Zeit $t = \varphi_0/\varepsilon$. Begleitet ihn dieser nun für die Zeitstrecke λ bis zur Zeit t, so gelangt er in den Ort, der ihm nach λ Transformationen zukommt, $\varphi_0 + \lambda\varepsilon$.

Diese Bewegung und Transformation ist zunächt trivial. Man projiziere sie wieder auf eine horizontale Gerade. Der projizierte Punkt hat die Abszisse $x_0 = \sin \varphi_0$. Nach einer Transformation rückt er nach

$$x_1 = \sin(\varphi_0 + \varepsilon) = \sin \varphi_0 \cos \varepsilon + \cos \varphi_0 \sin \varepsilon = x_0 \cos \varepsilon + \sqrt{1 - x_0^2} \sin \varepsilon.$$

Gleichwertig ist die Gleichung $\quad \arcsin x_1 - \arcsin x_0 = \varepsilon.$

Durch n-malige Wiederholung

$$\arcsin x_n - \arcsin x_0 = n\varepsilon$$

oder $$x_n = \sin(n\varepsilon + \arcsin x_0) = x_0 \cos n\varepsilon + \sqrt{1 - x_0^2} \sin n\varepsilon.$$

Der Hilfspunkt, der sich auf dem Kreise bewegte, gibt durch Projektion einen Hilfspunkt, der die Abszissenachse durchläuft, seine Abszisse ist $y = \sin \varepsilon t$. Wenn dieser zur Zeit t_0 den Punkt (x_0) passiert, so ist er zur Zeit $t = t_0 + \lambda$ in dem Punkte x_λ, wo

in jenen auch λ Transformationen bringen. Er bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\cos \varepsilon t = \varepsilon \sqrt{1 - y^2} = \psi(y)$. Wäre die Bewegung nicht schon bekannt, so könnte man sie us dem Geschwindigkeitsgesetz $\psi(y) = \varepsilon \sqrt{1 - y^2}$ und der Lage $y = 0$ für $t = 0$ völlig estimmen. Aus diesen Bedingungen folgt nämlich

$$\int_0^y \frac{dy}{\psi(y)} = t.$$

ind y und y_0 die Lagen zur Zeit t und t_0, so ist

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\psi(y)} = t - t_0 = \lambda \quad \text{oder} \quad \arcsin y_\lambda - \arcsin y_0 = \lambda.$$

a für $\lambda = 0$ die obere Grenze des Integrals $y = y_0$ wird, so kann man entwickeln

$$y = y_0 + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + u_3 \lambda^3 + \ldots \qquad (1)$$

Die Koeffizienten u hängen von y_0 oder auch von dem zugehörigen t_0 ab. Der ewegliche Punkt hat zur Zeit t_0 die Abszisse y_0, zur Zeit $t_0 + dt_0$ die Abszisse $y_0 + dy_0$. ür den Fortgang der Bewegung, den Ort y zur Zeit t, ist es gleichgiltig, ob man sie y_0 zur Zeit t_0, oder in dem Nachbarpunkt $y_0 + dy_0$ zur Zeit $t_0 + dt_0$ beginnen läfst. ir differenzieren daher die Gleichung (1) oder $y = f(y_0, \lambda)$ nach t_0:

$$0 = \frac{df}{dy_0}\frac{dy_0}{dt_0} + \frac{df}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt_0}$$

er da $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \psi(y)$ und $\lambda = t - t_0$ ist

$$\frac{df}{dy_0}\psi(y_0) = \frac{df}{d\lambda}$$

d wenn man die Reihe (1) einsetzt:

$$\left(1 + \frac{du_1}{dy_0}\lambda + \frac{d^2u_1}{dy_0^2}\lambda^2 + \ldots\right)\psi(y_0) = u_1 + 2u_2\lambda + 3u_3\lambda^2 + \ldots$$

o

$$u_1 = \psi(y_0), \qquad 2u_2 = u_1\frac{du_1}{dy_0}, \qquad 3u_3 = u_1\frac{du_2}{dy_0}$$

$_1 = \psi(y_0) = \varepsilon\sqrt{1 - y_0^2}, \qquad u_2 = -\frac{\varepsilon^2}{2}y_0, \qquad u_3 = -\frac{\varepsilon^3}{2\cdot 3}\sqrt{1 - y_0^2}, \qquad u_4 = \frac{\varepsilon^4 y_0}{2\cdot 3\cdot 4}, \ldots$

mnach

$$y = y_0 + \varepsilon\sqrt{1 - y_0^2}\cdot\lambda - \frac{\varepsilon^2}{2}y_0\lambda^2 - \frac{\varepsilon^3}{2\cdot 3}\sqrt{1 - y_0^2} + \frac{\varepsilon^4}{2\cdot 3\cdot 4}y_0\lambda^4 + \ldots$$

$$= y_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\lambda^2 + \frac{\varepsilon^4}{2\cdot 3\cdot 4}\lambda^4 + \ldots\right) + \sqrt{1 - y_0^2}\left(\varepsilon\lambda - \frac{\varepsilon^3}{2\cdot 3}\lambda^3 + \ldots\right)$$

$$= y_0\cos\varepsilon\lambda + \sqrt{1 - y_0^2}\sin\varepsilon\lambda.$$

Gehen wir nun auf die Transformationen des Punktes x_0 über, so wird

$$x_\lambda = x_0 \cos \varepsilon\lambda + \sqrt{1 - x_0^2} \sin \varepsilon\lambda.$$

Wir können also diese endliche Transformation aus der infinitesimalen $\frac{dx_\lambda}{d\lambda} = \psi(x$ ableiten, wir können sie ferner in die zum Iterieren günstige Gestalt bringen,

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc\,sin} x_\lambda - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arc\,sin} x_0 = \lambda.$$

Auch im Folgenden werden wir diese drei Stufen der Betrachtung wiederfinden. D Kurve $\psi(y) = \frac{dy}{dt}$ ist die oben erwähnte, die Schellbach zu der Newtonschen Näher hinzuzog.

IV. Die Iteration von sin x im Komplexen.

§ 15. Es sei $x_1 = \sin x$, $x_2 = \sin x_1$ usw., so wird $x_2 = \sin(\sin x) = \sin^2 x$ $x_n = \sin^n(x)$. Die Sinusreihe Newtons ergibt bei Ausführung dieser Rechnungen

$$\sin^2(x) = x - \frac{2}{6}x^3 + \frac{12}{120}x^5 - \frac{84}{15\,120}x^7 \ldots$$

$$\sin^3(x) = x - \frac{3}{6}x^3 + \frac{33}{120}x^5 - \frac{2193}{15\,120}x^7 \ldots$$

$$\sin^4(x) = x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{64}{120}x^5 - \frac{6480}{15\,120}x^7 \ldots$$

$$\sin^5(x) = x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{105}{120}x^5 - \frac{14\,295}{15\,120}x^7 \ldots$$

Die Gleichung $\sin^2(x) = 0$ hat viele Wurzeln. Sie verlangt, dafs $\sin x = n\pi$ d $x = \operatorname{arc\,sin} n\pi = \sin^{-1}(n\pi)$ sei. Bildet man von diesen Werten wieder die vielde Funktion arc sin, so erhält man die Wurzeln von $\sin^3(x) = 0$.

Setzt man entsprechend

$$\sin^{\frac{1}{2}}(x) = f(x) = x + b_3x^3 + b_5x^5 + \ldots$$

so ist nach Analogie $b_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ zu setzen, und aus der Forderung, dafs $f\,f(x) = n$ werde, ergeben sich durch Betrachtung gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten Rekurs formeln, man findet:

$$b_3 = -\frac{1}{12},\quad b_5 = -\frac{1}{160},\quad b_7 = -\frac{53}{2^7\,3^2 \cdot 5 \cdot 7},\quad b_9 = -\frac{23}{2^{11} \cdot 5 \cdot 7},$$

$$b_{11} = -\frac{2173}{2^8\,3^5\,5^2 \cdot 7 \cdot 11},\quad b_{13} = -\frac{742031}{2^{16}\,3^5\,5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$$

$\log b_3 = 0{,}920\,8188 - 2_n$ $\qquad$ $\log b_{11} = 0{,}860\,8294 - 5_n$

$\log b_5 = 0{,}795\,8800 - 3_n$ $\qquad$ $\log b_{13} = 0{,}968\,9083 - 6_n$

$\log b_7 = 0{,}118\,7554 - 3_n$ $\qquad$ $\log b_{15} = 0{,}550\,5923 - 6$

$\log b_9 = 0{,}506\,3298 - 4_n$

Die ersten 6 Koeffizienten sind negativ, der 7. positiv.

Für $x = 1$ zeigt die Reihe zu schwache Konvergenz. Um in solchem Falle $= \sin^{\frac{1}{2}}(x)$ zu berechnen, wendet man auf x mehrmals die Sinus-Operation an, sucht zu em Endwert x′ mittelst der Reihe den Wert $\sin^{\frac{1}{2}}(x') = u'$, und steigt von diesem eben oft durch die Operation „arc sin“ wieder auf. Denn es ist

$$\sin^3(u) = \sin^{3\frac{1}{2}}(x) = \sin^{\frac{1}{2}}(\sin^3(x)) = \sin^{\frac{1}{2}} x' = u', \text{ also } u = \sin^{-3}(u')$$

as sich kurz zusammenfassen läfst in

$$\sin^{\frac{1}{2}}(x) = \sin^{-3}(\sin^{\frac{1}{2}}(\sin^3(x))).$$

ist z. B. $\sin^3(1) = 0{,}678\,4305$, $\sin^{\frac{1}{2}}(\sin^3 1) = 0{,}651\,4127$,

$$\sin^{\frac{1}{2}}(1) = 0{,}908\,7088.$$

bequem ist bei der Berechnung das jedesmalige Umwandeln des Winkels in Bogen, an kann es jetzt ersparen bei Benutzung der Tafeln von Burrau, die den Sinus und sinus für den Arcus als Argument geben. Es ist

$x = 1{,}571$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$\sin^{\frac{1}{2}} x = 1{,}140$	0,909	0,835	0,755	0,670	0,581	0,489
$\sin x = 1{,}000$	0,841	0,783	0,717	0,644	0,565	0,479

§ 16. Dem Rate und der wirksamen Beteiligung von Prof. Goldscheider verdanke ich es, dafs ich (1905) zu dem ergiebigeren Falle von $\sin^\lambda(x)$ bei beliebigem λ erging. Es wird angenommen, dafs sei

$$\sin^\lambda(x) = x + B_3 x^3 + B_5 x^5 + B_7 x^7 + \ldots$$

nach Analogie $B_1 = -\frac{\lambda}{6}$ sei. . Dann ergeben sich aus $\sin^\lambda(\sin x) = \sin(\sin^\lambda x)$ oder $\sin^\lambda(\sin^\lambda x) = \sin^{2\lambda}(x)$ Rekursionsformeln, aus denen Prof. Goldscheider die folgenden Koeffizienten ableitete, die mir, weil unzweifelhaft genau, später oft zur Probe für meine Entwicklungen dienten:

$$B_3 = -\frac{\lambda}{6},\quad B_5 = \frac{-4\lambda + 5\lambda^2}{120},\quad B_7 = \frac{-164\lambda + 336\lambda^2 - 175\lambda^3}{15120}$$

$$B_9 = \frac{-1536\lambda + 4288\lambda^2 - 3976\lambda^3 + 1225\lambda^4}{9!}$$

$$B_{11} = \frac{-213\,568\lambda + 766\,656\lambda^2 - 1\,004\,696\lambda^3 + 572\,880\lambda^4 - 121275\lambda^5}{3 \cdot 11!}$$

folgenden sind sie in anderer Form wiederholt und fortgesetzt; und die Koeffizienten λ sind mod 101 in kongruente ganze Zahlen verwandelt.

$$B_3 = -\frac{1}{6}\lambda$$

$$B_5 = -\frac{1}{30}\lambda + \frac{1}{24}\lambda^2$$

$$B_7 = -\frac{41}{2^3 3^3 5 \cdot 7}\lambda + \frac{1}{3^2 \cdot 5}\lambda^2 - \frac{5}{2^4 \cdot 3^3}\lambda^3$$

$$B_9 = -\frac{4}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}\lambda + \frac{67}{2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}\lambda^2 - \frac{71}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5}\lambda^3 + \frac{35}{2^7 \cdot 3^4}\lambda^4$$

$$B_{11} = -\frac{3337}{2^2\,3^5\,5^2\,7 \cdot 11}\lambda + \frac{121}{2^2\,3^3\,5^2 \cdot 7}\lambda^2 - \frac{1631}{2^5\,3^5\,5^2}\lambda^3 + \frac{31}{2^4\,3^4\,5}\lambda^4 - \frac{7}{2^8\,3^3}\lambda^5$$

$$B_{13} = -\frac{28069}{2 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}\lambda + \frac{52093}{2^5\,3^5\,5^2\,7 \cdot 11}\lambda^2 - \frac{6073}{2^3\,3^6 \cdot 5^2 \cdot 7}\lambda^3 + \frac{19}{2^4\,3^5}\lambda^4$$

$$- \frac{3043}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^2}\lambda^5 + \frac{77}{2^{10} \cdot}$$

$$B_{15} = -\frac{228859}{2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13}\lambda + \ldots$$

(mod 101) $B_3 \equiv 84\,\lambda$

$B_5 \equiv 37\,\lambda + 80\,\lambda^2$

$B_7 \equiv 93\,\lambda + 9\,\lambda^2 + 90\,\lambda^3$

$B_9 \equiv 56\,\lambda + 12\,\lambda^2 + 65\,\lambda^3 + 100\,\lambda^4$

$B_{11} \equiv 39\,\lambda + 87\,\lambda^2 + 41\,\lambda^3 + 84\,\lambda^4 + 71\,\lambda^5$

$B_{13} \equiv 46\,\lambda + 88\,\lambda^2 + 43\,\lambda^3 + 63\,\lambda^4 + 44\,\lambda^5 + 26\,\lambda^6$

$B_{15} \equiv 52\,\lambda + \ldots.$

Die Kongruenzen dienen zur Probe der numerischen Rechnungen. Wenn zwei Brüche in deren Nenner die Primzahl 101 nicht vorkommt, als Differenz einen Bruch ergeben in dessen Zähler sie aufgeht, so sind die Brüche kongruent. So ist $\frac{1}{3} \equiv \frac{102}{3} \equiv 34$, $\frac{2}{3} \equiv 68$, $\frac{1}{4} \equiv \frac{304}{4} \equiv 76$. Ersetzt man die in einer Rekursionsformel stehenden Koeffizienten durch kongruente ganze Zahlen, so mufs sie mod 101 identisch erfüllt sein. Die Primzahl 101 hat den Vorzug, dafs sich die kleinsten Reste grofser Zahlen für diesen Divisor ohne Mühe ermitteln lassen. Sie wurde mir von Prof. Goldscheider empfohlen. Ich kenne kein Buch, wo diese Rechenprobe praktisch verwertet würde. Bei Lüroth wird sie nicht erwähnt.

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ sind im obigen die Koeffizienten b_3, b_5 . ., für $\lambda = -1$ die Koeffizienten der arc sin-Reihe enthalten.

Ist λ gleich der positiven ganzen Zahl n, so konvergiert die Reihe für sin(x) überall und die Funktion hat die Periode 2π. Ist λ eine negative ganze Zahl $= -1$ s ist $\sin^\lambda(x) = \text{arc sin}^n(x)$, von dieser vieldeutigen Funktion stellt die Reihe nur einen Zweig dar, sie kann nur soweit konvergieren, bis dieser Zweig sich mit dem anstofsenden einigt, das geschieht, wenn x gleich dem Maximalwert ξ_n von $\sin^n(x)$ für $x = \frac{\pi}{2}$ ist, welcher mit wachsendem n, wie sich weiter unten ergibt, zu $\sqrt{\frac{3}{n}}$ abnimmt.

Ist λ keine ganze Zahl und negativ $= -\lambda'$, so sind die Koeffizienten B durchaus positiv, das Konvergenzgebiet nimmt stetig mit wachsenden λ' ab und hat für $\lambda' = 1$

en obigen Wert. Ist λ positiv $=\lambda'$, so sind die Koeffizienten B kleiner als für $\lambda=-\lambda'$, aher mufs die Konvergenz mindestens so weit wie dort gehen, für grofse λ bis $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$. as Verhalten ist ähnlich wie bei der Reihe für $(1+x)^\lambda + \cos x$, die für $\lambda = n$ unschränkt konvergent ist, für andere Werte von λ nur bis zum Radius 1. Vielleicht icht die Konvergenz für positives λ bis $x = \frac{\pi}{2}$. Damit die Transformation $x_1 = \sin x$, e von $x = \frac{\pi}{2} + \xi$ und von $x = \frac{\pi}{2} - \xi$ zu einem und demselben Wert von x_1 führt, ndeutig umkehrbar bleibe, nehmen wir an, dafs x sich auf den Streifen der komplexen bene beschränke, für den die reelle Koordinate $= 0 \ldots \frac{\pi}{2}$ ist.

Unter Benutzung der Burrauschen Tafeln kann man für die Berechnung der Reihe $\mathfrak{n}^\lambda(x)$ das Argument x auf einen kleineren Wert, $\sin x$ oder $\sin^2 x$ oder $\sin^3 x$ usw. duzieren, wie oben für $\lambda = \frac{1}{2}$ gezeigt.

§ 17. Wird λ unendlich klein $= \varepsilon$, so ergibt sich aus der allgemeinen Formel

$$\sin^\varepsilon(x) = x + \varepsilon\,\psi(x)$$

$$(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{41}{3780}x^7 - \frac{4}{945}x^9 - \frac{3337}{1\,871\,100}x^{11} - \frac{28\,069}{36\,486\,450}x^{13} - \frac{228\,859}{696\,559\,500}x^{15} \ldots$$

Es ist merkwürdig, dafs soweit erreichbar alle Koeffizienten negativ sind. In $\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}}(x)$ hörte die entsprechende Eigenschaft mit x^{15} auf.

Denkt man sich unter ε eine unendlich kleine Zeit, so bedeutet die Gleichung $= x_0 + \varepsilon\psi(x_0)$, dafs eine Masse aus dem Punkt x_0 der komplexen Ebene mit einer schwindigkeit, die nach Gröfse und Richtung durch Modul und Phase von $\psi(x_0)$ darstellt ist, in den Punkt x_ε übergeht. Von dort kommt der materielle Punkt zur Zeit $= t_0 + \lambda$ nach x_λ. Sollte ein Punkt x_λ wieder zu seinem Ausgangspunkt x_0 zurückaren, so nimmt seine Bahn auch wieder die alte Richtung an, die Bewegung wird riodisch. Um bei der infinitesimalen Transformation der Gesammtheit aller Punkte einen stimmten Punkt x_0 sicher zu verfolgen, bewegen wir gleichzeitig die wagerechte komplexe ene vertikal aufwärts mit der Geschwindigkeit 1. Dann lösen sich die Bahnen der nkte von einander und werden zu einem Büschel von Raumkurven. Die Gesamtheit von der komplexen Ebene aufsteigenden Kurven ist immer dieselbe, mag sie ihe ursprüngliche Lage (0) oder ihre spätere (λ) haben. Etwaige periodische Bahnen in der ene verwandeln sich in Schraubenlinien.

Nun gelte für die Bewegung eines Punktes, dessen Ort in der ruhenden Ebene ch die komplexe Zahl y bestimmt ist, das Gesetz

$$\frac{dy}{dt} = \psi(y).$$

Es sei $\int^{y} \frac{dy}{\psi(y)} = Fy$, für die Integrationskonstante sei ein fester Wert willkürlich festgesetzt. Dann bedeutet

$$F(y) = t$$

eine mit dem obigen Gesetz verträgliche Bewegung, wenn t von einem beliebigen komplexen Wert τ an um reelle Inkremente zunimmt. Erhält τ mehrere Werte $\tau_1\ \tau_2\ \tau_3 \ldots$ die in der imaginären Koordinate verschieden sind, so erhält man mehrere heterogene Bewegungen verschiedener Massenpunkte, die doch nur die komplexe Ausbreitung derselben Funktion darstellen. Ist einer dieser Punkte zur Zeit t_0, die komplex sein kann, in y_0, zur Zeit $t = t_0 + \lambda$, wo λ reell ist, in y_λ, so ist

$$\int_{y_0}^{y_\lambda} \frac{dy}{\psi(y)} = \lambda$$

woraus man entwickelt

$$y_\lambda = y_0 + u_1\lambda + u_2\lambda^2 + \ldots$$

Wie in § 14 folgt $\quad u_1 = \psi(y_0),\ 2\,u_2 = u_1 \frac{d\,u_1}{d\,y_0},\ 3\,u_3 = u_1 \frac{d\,u_2}{d\,y_0} \ldots$

Gäbe es also ein Mittel, $\psi(x_0)$ als Funktion des Ortes x_0 direkt zu finden, so wäre damit auch u_1, u_2, u_3 als Funktion von x_0 bekannt, man könnte die Lage des durch x_0 gehenden Massenpunktes nach Verlauf der Zeit λ, d. h. die Lage des λ mal transformierten Punktes x_0 angeben. Hier findet man aus der obigen Entwicklung von $\psi(x)$ folgendes

$$u_1 = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{41}{3780}y^7 - \frac{4}{945}x^9 - \frac{3337}{1\,871\,100}x^{11} \ldots$$

$$u_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 x^5 + \frac{1}{3^2\cdot 5}x^7 + \frac{67}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}x^9 + \frac{11\,979}{2^2\,3^5\,5^2\,7\cdot 11}x^{11} \ldots$$

$$u_3 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{3}\right)^3 x^7 - \frac{71}{2^4\cdot 3^4\cdot 5}x^9 - \frac{1631}{2^5\,3^5\,5^2}x^{11} \ldots$$

$$u_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{1}{3}\right)^4 x^9 + \frac{31}{2^4\cdot 3^4\cdot 5}x^{11} \ldots$$

$$u_5 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\left(\frac{1}{3}\right)^5 x^{11} \ldots$$

Setzt man diese Werte in $x_\lambda = x_0 + u_1\lambda + u_2\lambda^2 + \ldots$ ein, und ordnet nach x so erhält man die obigen Werte von B_3, B_5, . . wieder, zugleich das Gesetz für di Koeffizienten der höchsten Potenz von λ.

§ 18. Man kann wirklich $\psi(x)$ direkt herstellen. Es ist

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\psi(x)} = 1$$

Hieraus folgt, wenn man x_0 und x_1 variiert:

$$\frac{1}{\psi(x_1)}\frac{dx_1}{dx_0} - \frac{1}{\psi(x_0)} = 0$$

oder da $x_1 = \sin x_0$ ist: $\psi(x_0)\cdot\cos x_0 = \psi(\sin x_0)$

oder auch $\psi(\sin x) = \psi(x)\cos x.$

Diese Funktional-Gleichung reicht aus zur Koeffizienten-Bestimmung folgender Reihe

$$\psi(x) = \beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + \beta_7 x^7 + \cdots.$$

ist $$\cos x = 1 + \delta_2 x^2 + \delta_4 x^4 + \cdots,$$

ferner $$\sin x^3 = x^3 + \overset{3}{c}_5 x^5 + \overset{3}{c}_7 x^7 + \cdots$$

$$\sin x^5 = x^5 + \overset{5}{c}_7 x^7 + \cdots$$

so wird

$$\beta_3 \sin x^3 + \beta_5 \sin x^5 + \beta_7 \sin x^7 + \cdots = (\beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + \cdots)(1 + \delta_2 x^2 + \delta_4 x^4 + \cdots).$$

Die Koeffizienten von x^3 und x^5 geben Identitäten, die von x^7 an geben die Rekursionen

$$\beta_5(\overset{5}{c}_7 - \delta_2) + \beta_3(\overset{3}{c}_7 - \delta_4) = 0$$

$$\beta_7(\overset{7}{c}_9 - \delta_2) + \beta_5(\overset{5}{c}_9 - \delta_4) + \beta_3(\overset{3}{c}_9 - \delta_6) = 0.$$

sind die c und die δ im voraus berechnet (vgl. den Anhang), so folgen aus $\beta_3 = -\frac{1}{6}$ die Werte von β_5, β_7 ... in Übereinstimmung mit § 17.

Aus $\psi(x)$ entspringt nun nicht nur, wie gezeigt, der allgemeine Wert von $\sin^\lambda(x)$, sondern auch eine Zählfunktion $F(x)$, welche den Übergang von x_0 auf $x_1 (= \sin x_0)$ in der Form darstellt $F(x_1) - F(x_0) = 1$, sodafs die Iteration selbstverständlich wird:

$$F(x_\lambda) - F(x_0) = \lambda.$$

Diese ist $\int^x \frac{dx}{\psi(x)} = F(x)$. Die Konstante sei so bestimmt, dafs in der Entwicklung von $F(x)$ nach x nur Potenzen von x und $\log x$ vorkommen, kein konstantes Glied. Die Berechnung ergibt

$$\frac{1}{\psi(x)} = -6x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-1} + \frac{79}{525}x + \frac{116}{2625}x^3 + \cdots$$

$$Fx = \int^x \frac{dx}{\psi x} = 3x^{-2} + \alpha_0 \log x + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \cdots$$

$$\alpha_0 = \frac{6}{5} \equiv 82 \pmod{101} \quad \alpha_2 = \frac{79}{2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7} \equiv 55 \quad \alpha_4 = \frac{29}{3\cdot 5^3\cdot 7} \equiv 72$$

$$\alpha_6 = \frac{91543}{2^2 3^3 5^4 7^2 11} \equiv 95 \quad \alpha_8 = \frac{18\,222\,899}{2^4 3^4 5^5 7^2 11\cdot 13} \equiv 95$$

$$\alpha_{10} = \frac{88\,627\,739}{2^3 3^5 5^7 7^3 11} \equiv 1 \qquad \alpha_{12} = \frac{3899\,439883}{3^7 5^7 7^3 11 \cdot 13 \cdot 17} \equiv 42$$

$$\alpha_{14} = -0{,}000\,000\,28.$$

Der letzte Koeffizient ist negativ.

Zur Probe berechnen wir $F(1) - F(\sin 1)$, wo $\sin 1 = 0{,}841\,471$,

$$F(1) = 4{,}089\,623$$

$$F(\sin 1) = 3{,}089\,626. \quad \text{Die Differenz} = 1.$$

Bildet man eine gebrochene Linie aus wagerechten und senkrechten Strecken, s dafs die Eckpunkte abwechselnd auf der Kurve $y = \sin x$ und der Geraden $y = x$ liege so kommt man mit dem Punkte $\left(\frac{1}{2}, \sin\frac{1}{2}\right)$ beginnend, nach einer gewissen Anza von Zügen in die Gegend des Punktes $\left(\frac{1}{5}, \sin\frac{1}{5}\right)$ der Kurve. Wieviel Züge sind da erforderlich? Eine angenäherte Berechnung gibt $F\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - \frac{6}{5} \cdot 0{,}70 = 11{,}2$ u $F\left(\frac{1}{5}\right) = 75 - \frac{6}{5} \cdot 1{,}61 = 73{,}1$. Die Differenz $= 62$ gibt die Zahl der Stufen an.

Bei Benutzung der Kurven $y = \sin^{\frac{1}{2}}(x)$ und $y = x$ würde man doppelt so vi Stufen brauchen, um von der Abszisse $\frac{1}{2}$ nach $\frac{1}{5}$ zu kommen.

In $F(x)$ überwiegt bei kleinem x bedeutend das erste Glied. Kommt man von durch eine sehr grofse Zahl von Stufen (n) nach $x_n = \xi$, so ist angenähert

$$3\,(\xi^{-2} - x^{-2}) = n, \quad \text{also} \quad \xi = x\left(1 + \frac{n}{3}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\xi = x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{n}{3}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{n}{3}\right)^2 x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{n}{3}\right)^3 x^6 + \ldots\right)$$

Diese Reihe erhält man auch aus der Reihe für $\sin^\lambda(x)$, wenn man in den einzeln Gliedern für $\lambda = \infty$ zur Grenze übergeht, unter der Annahme, dafs $|\lambda| x^2$ sich einem en lichen Wert < 3 nähert, mag λ positiv oder negativ sein. Betrachtet man jedoch $\sin^\lambda(x)$ für grofses positives λ solche Glieder, deren Stellenzeiger mit λ vergleichbar is so ist es nicht mehr sicher, dafs sie sich den Gliedern der Reihe ξ nähern, der Quotie zweier benachbarter Glieder braucht dann nicht notwendig in $\frac{\lambda}{3}x^2$ überzugehen. A diesen fernen Gliedern liegt es, dafs die Reihe $\sin^n(x)$ unbeschränkt konvergent ist, d Reihe für ξ einen sehr mäfsigen Konvergenzkreis hat.

Aus $\psi(\sin x) = \psi(x)\cos x$ folgt bei Annäherung an $x = \frac{\pi}{2}$, also für $x = \frac{\pi}{2} +$ dafs $\psi\left(\frac{\pi}{2} + \xi\right)$ unendlich wird wie ξ^{-1}. Es ist daher nicht auf Konvergenz der Reih $\psi(x)$ über $x = \frac{\pi}{2}$ hinaus zu rechnen. Die Berechnung von $\psi(x)$, wenn x etwa $= 1$ is

/ird durch die Anwendung der Operation $x_1 = \sin x$ wieder auf das Gebiet guter Konvergenz urückgeführt. Die Funktion $\psi(x)$ wird am besten durch die signierte Modulfläche, d. h. urch Isohypsen und Isophasen, dargestellt. Dagegen wird $F(x) = U + iV$ besser durch ie Fläche dargestellt, die den reellen Teil von U zur Ordinate hat. Aus den iiveaulinien $U = \text{Const}$ folgen die Fall-Linien $V = \text{Const}$ als senkrechte Trajektorien. .ndert sich F um reelle positive Inkremente, so bedeutet das ein Fortschreiten auf den 'all-Linien $V = \text{Const}$. Sie müssen daher mit den Isophasen von $\psi(x)$ übereinstimmen.

Die Transformation $x_1 = \sin x_0$ führt auch dann zu beliebig kleinen Verschiebungen es Punktes x_0, wenn dieser in der Nähe irgend eines Wurzelpunktes α der Gleichung $= \sin x$ liegt. Diese hat aufser der dreifachen Wurzel 0 noch die 4 Wurzeln $= \pm 7{,}4978 \pm 2{,}7692\,i$, ferner noch, wenn $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n = 2, 3, 4 \ldots)$ ist, je vier Wurzeln mit den genäherten Werten $\alpha = \pm\left(\lambda_n - \frac{\log(2\lambda_n)}{\lambda_n}\right) \pm i \log(2\lambda_n)$. Für $n = 1$ erbt dies den Wert $7{,}48 + 2{,}75\,i$, eine gute Annäherung an die obige genaue Wurzel.

Setzt man nun $x = \alpha + \xi$, $x_1 = \alpha + \xi_1$, so wird $\xi_1 = \xi \cos\alpha - \frac{1}{2}\xi^2 \sin\alpha \ldots$, araus $\xi_\lambda = \xi \cos\alpha^\lambda + \ldots$ und, für unendlich kleines λ, $\xi_\lambda = \xi(1 + \lambda \log\cos\alpha) + \ldots$, dafs $\psi = \xi \log\cos\alpha + c\xi^2$. Das Hauptglied in der Zählfunktion $F = \int \frac{d\xi}{\psi(\xi)}$ wird $\frac{\log\xi}{g\cos\alpha}$.

Anhang.

1. (Zu § 18, S. 23.) Es war

$$\sin x^n = x^n + \overset{n}{c}_{n+2}\, x^{n+2} + \ldots$$

erner sei

$$x \cot x = 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 \ldots$$

e Koeffizienten findet man am besten durch die Gleichung

$$\frac{d^2 \sin x^n}{dx} = -n^2 \sin x^n + n(n-1) \sin x^{n-2}$$

$= -\frac{1}{2}$ $\equiv 50$

$= \frac{13}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}$ $\equiv 6$

$= -\frac{41}{2^4 3^3 7}$ $\equiv 91$

$= \frac{671}{2^7 3^3 5^2 7}$ $\equiv 98$

$= -\frac{73}{2^8 3^4 5 \cdot 11}$ $\equiv 65$

$= \frac{597\,871}{2^{10} 3^5 5^3 7^2 11 \cdot 13}$ $\equiv 71$

$\overset{5}{c}_7 = -\frac{5}{2 \cdot 3}$ $\equiv 16$

$\overset{5}{c}_9 = \frac{23}{2^3 \cdot 3^2}$ $\equiv 41$

$\overset{5}{c}_{11} = -\frac{227}{2^4 3^3 7}$ $\equiv 21$

$\overset{5}{c}_{13} = \frac{631}{2^7 3^4 5}$ $\equiv 72$

$\overset{5}{c}_{15} = -\frac{11\,617}{2^8 3^4 5 \cdot 7 \cdot 11}$ $\equiv 89$

$\overset{7}{c}_9 = -\frac{7}{2 \cdot 3}$ $\equiv 83$

$\overset{7}{c}_{11} = \frac{77}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}$ $\equiv 20$

$\overset{7}{c}_{13} = -\frac{479}{2^4 3^3 5}$ $\equiv 68$

$\overset{7}{c}_{15} = \frac{4681}{2^7 3^3 5^2}$ $\equiv 12$

$\overset{9}{c}_{11} = -\frac{9}{2 \cdot 3}$ $\equiv 49$

$\overset{9}{c}_{13} = \frac{43}{2^3 \cdot 5}$ $\equiv 44$

$\overset{9}{c}_{15} = -\frac{2473}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$ $\equiv 15$

$$^{11}c_{13} = -\frac{11}{2\cdot 3} \equiv 15$$

$$^{11}c_{15} = \frac{583}{2^3\cdot 3^2\cdot 5} \equiv 12$$

$$^{13}c_{15} = -\frac{13}{2\cdot 3} \equiv 82$$

$$^{2}c_{4} = -\frac{1}{3} \equiv 67$$

$$^{2}c_{6} = \frac{2}{3^2\,5} \equiv 18$$

$$^{2}c_{8} = -\frac{1}{3^2\cdot 5\cdot 7} \equiv 42$$

$$^{2}c_{10} = \frac{2}{3^4\cdot 5^2 7} \equiv 52$$

$$^{2}c_{12} = -\frac{2}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} \equiv 78$$

$$^{2}c_{14} = \frac{4}{3^5\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13} \equiv 56$$

$$^{2}c_{16} = -\frac{1}{3^6\,5^3\,7^2\cdot 11\cdot 13} \equiv 26$$

$$^{4}c_{6} = -\frac{2}{3} \equiv 33$$

$$^{4}c_{8} = \frac{1}{5} \equiv 81$$

$$^{4}c_{10} = -\frac{34}{3^3\cdot 5\cdot 7} \equiv 72$$

$$^{4}c_{12} = \frac{62}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} \equiv 97$$

$$^{4}c_{14} = -\frac{4}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} \equiv 51$$

$$^{4}c_{16} = \frac{5461}{3^5\,5^3\,7^2\,11\cdot 13} \equiv 60$$

$$^{6}c_{8} = -1 \equiv 100$$

$$^{6}c_{10} = \frac{7}{3\cdot 5} \equiv 88$$

$$^{6}c_{12} = -\frac{128}{3^3\cdot 5\cdot 7} \equiv 75$$

$$^{6}c_{14} = \frac{26}{3^3\cdot 5\cdot 7} \equiv 40$$

$$^{6}c_{16} = -\frac{31}{3^3\,5^2\,11} \equiv 13$$

$$^{8}c_{10} = -\frac{4}{3} \equiv$$

$$^{8}c_{12} = \frac{38}{3^2\cdot 5} \equiv$$

$$^{8}c_{14} = -\frac{64}{3^3\cdot 7} \equiv$$

$$^{8}c_{16} = \frac{457}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} \equiv$$

$$^{10}c_{12} = -\frac{5}{3} \equiv$$

$$^{10}c_{14} = \frac{4}{3} \equiv$$

$$^{10}c_{16} = -\frac{43}{3^2\cdot 7} \equiv$$

$$^{12}c_{14} = -2 \equiv$$

$$^{12}c_{16} = \frac{29}{3\cdot 5} \equiv$$

$$^{14}c_{16} = -\frac{7}{3} \equiv$$

$$c_{3} = -\frac{1}{3} \equiv 67$$

$$c_{4} = -\frac{1}{3^2\,5} \equiv 92$$

$$c_{6} = -\frac{2}{3^3\cdot 5\cdot 7} \equiv 28$$

$$c_{8} = -\frac{1}{3^3\,5^2\cdot 7} \equiv 23$$

$$c_{19} = -\frac{2}{3^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11} \equiv 87$$

$$c_{12} = -\frac{1382}{3^6\,5^3\,7^2\,11\cdot 13} \equiv 77$$

$$c_{14} = -\frac{4}{3^6\,5^2\,7\cdot 11\cdot 13} \equiv 4$$

$$c_{16} = -\frac{3617}{3^7\,5^4\,7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17} \equiv 65$$

$$c_{18} = -\frac{87\,734}{3^9\,5^3\,7^3\,11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} \equiv 54$$

Ferner

$$\sin x \equiv x + 84x^3 + 16x^5 + 91x^7 + 31x^9 + 19x^{11} + 7x^{13} + 37x^{15} + 24x^{17} + 46x^{19} + \ldots$$

$$\cos x \equiv 1 + 50x^2 + 80x^4 + 31x^6 + 77x^8 + 7x^{10} + 91x^{12} + 50x^{14} + 14x^{16} + 66x^{18} + \ldots$$

$$\log \sin x = \log x + \frac{c_2}{2} x^2 + \frac{c_4}{4} x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sin x^2} = \frac{1}{x^2} - c_2 - 3c_4 x^3 - 5c_6 x^4 \ldots$$

$$\operatorname{tg} x = -c_2(2^2-1)x - c_4(2^4-1)x^3 - c_6(2^6-1)x^5 - \ldots$$

$$\frac{1}{\cos x^2} = -c_2(2^2-1) - 3c_4(2^4-1)x^2 - 5c_6(2^6-1)x^4 - \ldots$$

$$\log \cos x = c_2(2^2-1)\frac{x^2}{2} + c_4(2^4-1)\frac{x^4}{4} + c_6(2^6-1)\frac{x^6}{6} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sin x} = \cot\frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{x} - c_2\left(1-\frac{1}{2}\right)x - c_4\left(1-\frac{1}{8}\right)x^3 - \ldots$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3}x + \frac{7}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}x^3 + \frac{31}{2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}x^5 + \frac{127}{2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}x^7 + \frac{73}{2^8 3^5 5\cdot 11}x^9 + \frac{691\cdot 2047}{2^{10}3^6 5^3 7^2\cdot 11\cdot 13}x^{11} + \ldots$$

2. (Zu § 17, S. 22). In den „Vorlesungen über Differential-Gleichungen“ von ›phus Lie und Scheffers wird gezeigt, wie aus einer gegebenen infinitesimalen Trans-rmation die endlichen Gleichungen einer Gruppe abzuleiten sind. Für die umgekehrte ıfgabe, aus einer endlichen Transformation durch Iterieren eine diskrete Gruppe zu den und diese zu einer kontinuierlichen Gruppe zu ergänzen, finden sich dort keine ispiele.

3. (Zu § 16, S. 20). Für die Erprobung der Bruchrechnungen wäre ein Einmaleins d 101 und eine Verwandlung aller wirklicher Brüche bis zum Nenner 100 in ganze hlen mod 101 sehr nützlich. Leider erfordern diese Hilfstabellen zu viel Raum. Fast ıselbenNutzen gewähren die folgenden Tabellen, welche zum Numerus (mod 101) den lex (mod 100) und umgekehrt ergeben für die primitive Wurzel 2. Es ist z. B.

$$\overset{7}{c}_{13} = -\frac{479}{16\cdot 135} \equiv -\frac{75}{16\cdot 34} \equiv \frac{26}{16\cdot 34}.$$

lex c = Ind 26 − (Ind 16 + Ind 34) = 67 − (4 + 31) ≡ 32 mod 100, also $\overset{7}{c}_{13} \equiv 68$ mod 101. s Argument der Tafel ist aus den Zehnern (links) und den Einern (oben) zusammen-etzen.

Zugefügt ist noch eine Tabelle der reziproken Werte (mod 101).

Index (mod 100).

Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	69	2	24	70	9	3	38
1	25	13	71	66	10	93	4	30	39	96
2	26	78	14	86	72	48	67	7	11	91
3	94	84	5	82	31	33	40	56	97	35
4	27	45	79	42	15	62	87	58	73	18
5	49	99	68	23	8	37	12	65	92	29
6	95	77	85	47	6	90	83	81	32	55
7	34	44	41	61	57	17	98	22	36	64
8	28	76	46	89	80	54	43	60	16	21
9	63	75	88	53	59	20	74	52	19	51
10	50									

Numerus (mod 101).

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	16	32	64	27	54	7
1	14	28	56	11	22	44	88	75	49	98
2	95	89	77	53	5	10	20	40	80	59
3	17	34	68	35	70	39	78	55	9	18
4	36	72	43	86	71	41	82	63	25	50
5	100	99	97	93	85	69	37	74	47	94
6	87	73	45	90	79	57	13	26	52	3
7	6	12	24	48	96	91	81	61	21	42
8	84	67	33	66	31	62	23	46	92	83
9	65	29	58	15	30	60	19	38	76	51

N^{-1} (mod 101)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	51	34	76	81	17	29	38	45
1	91	46	59	70	65	27	19	6	73	16
2	96	77	23	22	80	97	35	15	83	7
3	64	88	60	49	3	26	87	71	8	57
4	48	69	89	47	62	9	11	43	40	33
5	99	2	68	61	58	90	92	39	54	12
6	32	53	44	93	30	14	75	98	52	41
7	13	37	94	18	86	66	4	21	79	78
8	24	5	85	28	95	82	74	36	31	42
9	55	10	56	63	72	84	20	25	67	50
10	100									

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Fig. 1

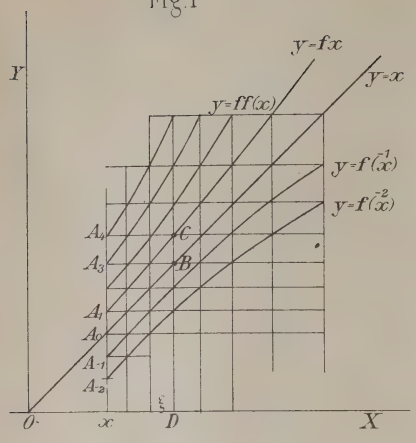
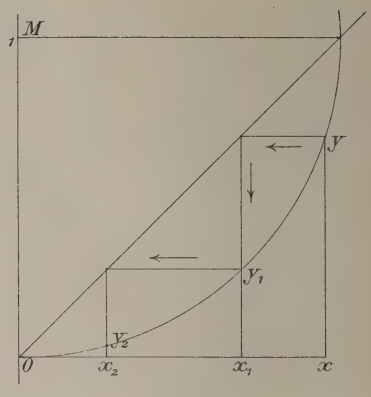
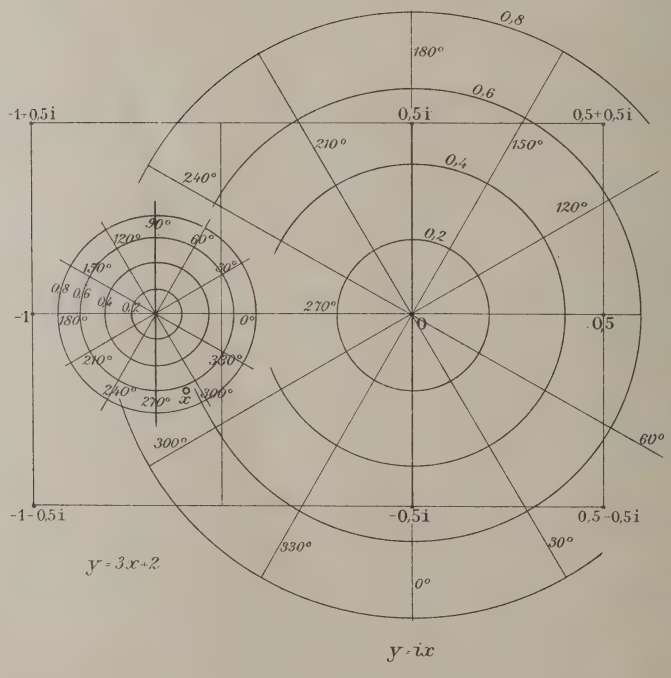


Fig. 2.



$y = x^2 + y^2$

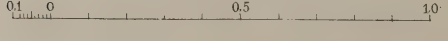
Fig. 3.



$y = 3x + 2$

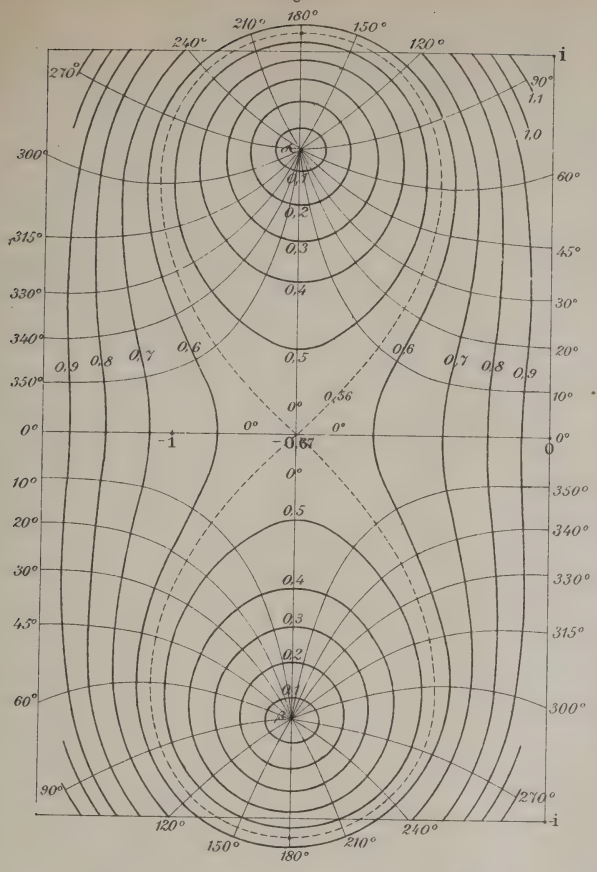
$y = ix$

Maßstab zu Fig. 3.



Lith. Anst. v. C. L. Keller, Berlin S.

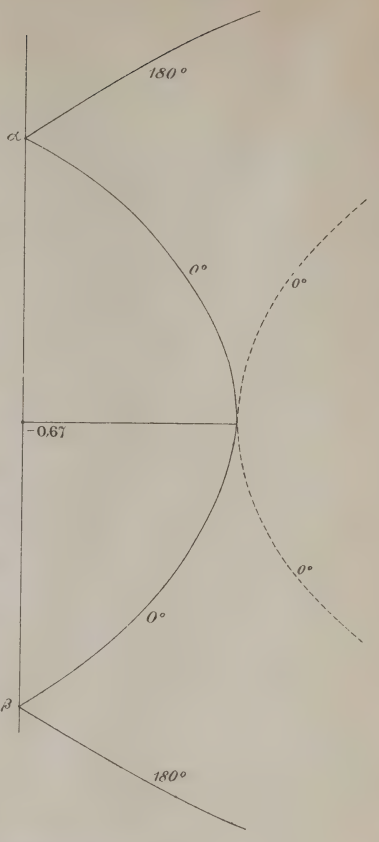
Fig. 4



$Y = x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$

$\alpha, \beta = -0{,}67 \pm i\,0{,}75$

Fig. 4a.



Maßstab zu Fig. 4u 4a.

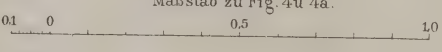
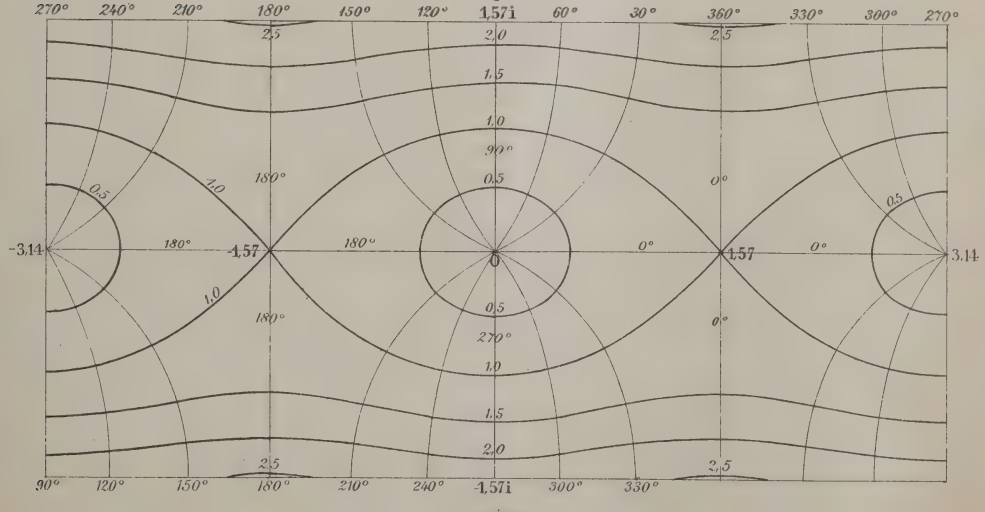
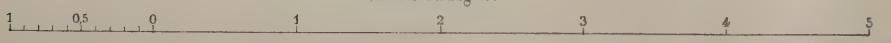


Fig. 6.



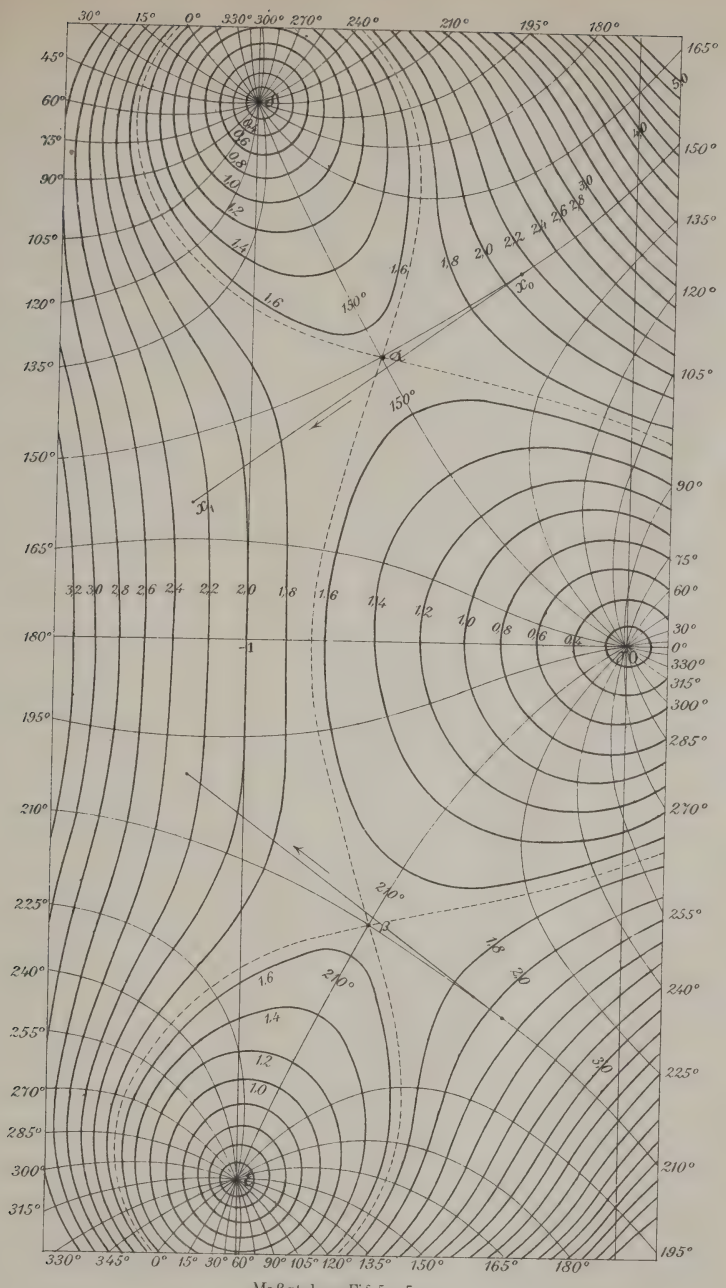
$Y = \sin x$

Maßstab zu Fig. 6.



Lith. Anst. v. C. L. Keller, Berlin S.

Fig. 5



Maßstab zu Fig. 5 u. 5a.

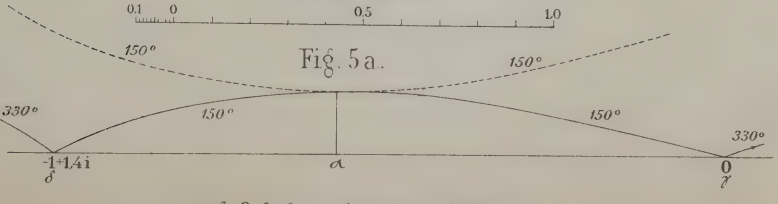


Fig. 5a.

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x = (x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)$$

$$\gamma = 0, \quad \begin{matrix}\delta \\ \varepsilon\end{matrix} = -1 \pm 1{,}414\,i$$

Lith. Anst. v. C. L. Keller, Berlin S.

Zu der

öffentlichen Prüfung

sämmtlicher Klassen des

Gymnasiums zu Nordhausen,

welche

den 17ten und 18ten März 1845

veranstaltet werden soll,

so wie

zu dem am 19ten März Statt findenden

Redeactus

ladet ehrerbietigst ein

Dr. Karl August Schirlitz,

Director des Gymnasiums.

INHALT:

1. Ueber das Fourier'sche Theorem und die Summirung der Fourier'schen und Gauss'ischen Reihen. Eine mathematische Abhandlung von dem Collaborator Dr. August Kramer.
2. Schulnachrichten von Ostern 1844 bis dahin 1845.

Nordhausen,
gedruckt bei J. G. Müller.

Ueber

das Fourier'sche Theorem und die Summirung der Fourier'schen und Gauss'ischen Reihen.

Mathematische Abhandlung

von

Dr. A. Kramer.

§. 1.

Die unter dem Namen der Fourier'schen Reihen bekannte Entwickelung ner beliebigen Function in eine Reihe, welche nach den Sinussen und Cosinussen r Vielfachen eines Argumentes fortschreitet, hat in der neueren Zeit, theils gen ihrer vielfachen Anwendungen, theils wegen des rein theoretischen Interesses, lches sie darbietet, mit Recht eine grosse Wichtigkeit erlangt. Der Weg, auf lchem Fourier zu seinen Resultaten gelangte, enthält freilich nicht die schlaende Ueberzeugungskraft eines synthetischen Beweises; kein Wunder daher, ss Mehrere der ausgezeichnetsten Mathematiker es sich angelegen sein liessen, Richtigkeit der durch Fourier zuerst aufgestellten Resultate in aller nur zu fordernden Strenge zu erweisen. So zunächst Cauchy in den Mémoires de Académie des sciences de Paris, année 1823, dessen Beweis jedoch nach eigenem geständniss unvollständig ist. Ferner: Dirksen in Crelle's Journal IV. B. hrg. 1829, pag. 170—178, „Ueber die Convergenz einer nach den Sinussen d Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe." und in ssen Abhandlung über die Summation unendlicher Reihen, welche nach den nussen und Cosinussen von Winkeln fortschreiten etc., gelesen den 20. Jan. 142 in der Academie der Wissenschaften zu Berlin, in welcher Abhandlung auch lisson Théorie mathématique de la chaleur §. 139 citirt wird, ein Werk, welches r nicht zu Gesicht gekommen ist. Vertrauter als mit den bisher angeführten hriften, die ich zum Theil nur kurze Zeit einsehen konnte, bin ich mit der Bewissführung meines verehrten Lehrers, des Herrn Professors Lejeune-Dirichlet, ich theils aus mündlicher Ueberlieferung kenne, theils aus dessen Abhandlg: „Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter e fonction arbitraire entre des limites données," abgedruckt in Crelle's Journal, I. B. Jahrg. 1829, pag. 157—169.

Ich beschäftigte mich längere Zeit eifrig mit diesem Gegenstande, und es glang mir durch Anwendung der discontinuirlichen Functionen auf zwei neuen Wegen zu dem sogenannten Fourier'schen Theorem (es findet sich in Fourier, Théorie de la chaleur pag. 431) und der Werthbestimmung für Dirichlet's Summationsformel der Fourier'schen Reihen zu gelangen. Ich benutze daher jetzt

die mir dargebotene Gelegenheit, die Erfolge meiner Bemühungen auf d
Felde, nebst einer neuen Anwendung auf die Summation der Gauss'ischen R
(siehe § 16—18.) Denen, die sich für diesen Zweig des mathematischen
sens interessiren, mitzutheilen.

§. 2.

Es ist leicht, sich durch unbestimmte Integration von der Richtigkeit folg
Gleichungen zu überzeugen:

$$\int_0^b e^{-gx} \sin hx.dx = \frac{h}{g^2+h^2} - \frac{g.\sin hb + h.\cos hb}{g^2+h^2}.e^{-gb},$$

$$\int_0^b e^{-gx} \cos hx.dx = \frac{g}{g^2+h^2} + \frac{h.\sin hb - g.\cos hb}{g^2+h^2}.e^{-gb},$$

welche, wenn b über alle Grenzen hinaus wächst, offenbar sich wie folgt u
stalten:

$$\int_0^\infty e^{-gx} \sin hx.dx = \frac{h}{g^2+h^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-gx} \cos hx.dx = \frac{g}{g^2+h^2}.$$

Von der ersten dieser beiden Gleichungen wird im folgenden Paragraphen
nützliche Anwendung gemacht werden.

§. 3.

Ferner ergiebt sich sehr leicht durch unbestimmte Integration die Gleich

$$\int_0^\infty e^{-yx}.\,dx = \frac{1}{y},$$

woraus durch beiderseitige Multiplication mit $\sin y.\,dy$ und Integration zwis
den Grenzen 0 und ∞ folgt:

$$\int_0^\infty \sin y\,dy \int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Nun gelangt man, wenn man linker Hand die Ordnung der Integrationen umk
mit Hülfe des vorigen Paragraphen zu der Gleichung:

$$\int_0^\infty \sin y\,dy = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2},$$

er, da bekanntlich $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

§. 4.

Durch Transformation des letzten Integrales mittelst der Gleichung $y = ax$, in a vor der Hand eine beliebige pos. Zahl bedeutet, erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

aus sich die für eine grosse Anzahl bestimmter Integrale sehr wichtige Folung ziehen lässt, dass der Werth von $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx$ eine blos von dem Vorchen von a, nicht aber von dessen Grösse, abhängige und für $a = 0$ discontiuliche Function ist, deren absoluter Werth immer gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Dies Ergebniss st sich kurz durch folgende Bezeichnung ausdrücken:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, .\, dx = \left\{\begin{matrix} +\frac{\pi}{2} \\ 0 \\ -\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}, \text{ je nachdem } a \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0. —$$

§. 5.

Aus dem Vorhergehenden folgt, wenn man einmal $u - v$, dann $u + v$ anstatt tzt, und u und v positive Zahlen bedeuten, die Null nicht ausgeschlossen:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin (u-v)\, x}{x}\, dx = \left\{\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}, \text{ je nachdem } u \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} v,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin (u+v)\, x}{x}\, dx = \left\{\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}, \text{ je nachdem } u \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} v.$$

In Bezug auf dies letztere Integral ist nur noch zu erwähnen, dass, wenn nd v beide zugleich 0 sind, es den Werth 0 bekommt. — Aus der Verbinr dieser Ergebnisse zieht man den Schluss:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin (u+v)\, x + \sin (u-v)\, x}{x}\, dx = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}\right\}, \text{ je nachdem } u \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} v,$$

oder, wie durch eine trigonom. Umformung sich ergiebt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ux \cdot \cos vx}{x}\,dx = \left\{\begin{matrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{matrix}\right\}, \text{ je nachdem } u \gtreqless v.$$

Nur wenn $u = v = 0$, ist der Werth dieses Integrales nicht $= \frac{1}{2}$, sondern =

Von dieser Gleichung, mittelst deren sich der unter dem Namen des F schen Theorems bekannte Satz in noch grösserer Allgemeinheit, als es von selbst geschehen ist, herleiten lässt, wird in dem Folgenden zu diesem Anwendung gemacht werden.

§. 6.

Zuvörderst sei es vergönnt, an einen bekannten Satz zu erinnern, Richtigkeit sich mit Hülfe der Definition des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \left(\delta f(a) + \delta f(a+\delta) + \ldots + \delta f(a+n\delta)\right)$$

$$\text{worin } \delta = \frac{b-a}{n},$$

mit Leichtigkeit erweisen lässt; ich meine den Satz über die Grösse des rentialquotienten eines bestimmten Integrales, nach einer der Grenzen gen

$$\frac{d.\int_a^b f(x)\,dx}{db} = f(b-0), \qquad \frac{d.\int_a^b f(x)\,dx}{da} = -f(a+0),$$

$$\text{wenn } b > a,$$

welcher Gültigkeit besitzt, selbst wenn $f(x)$ für $x = b$ oder für $x = a$ tinuirlich werden (zwei verschiedene endliche Werthe annehmen) sollte.

§. 7.

Füglich hätte unsere Betrachtung hier beginnen können, da das V gangene, als hinlänglich bekannt, nur der Vollständigkeit wegen hier auf ist. — Mit Hülfe des im §. 5 gewonnenen Resultates ist es leicht, ein best Integral, dessen untere und obere Grenzen bezüglich a und b sind, in ein umzuformen, dessen obere Grenze die ursprüngliche b, oder dessen unt ursprüngliche a überschreitet, ohne dass zugleich die andere Grenze verände Diese Umformung, welche Dirichlet gelehrt und in der Abhandlung „Ueb neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale“ (gelesen in der Ac

r Wissenschaften zu Berlin den 14. Febr. 1839) auf einen höchst interessanten ıll angewandt hat, bietet ein wichtiges, bis jetzt noch nicht gehörig ausgebeutetes ilfsmittel zur Auffindung bestimmter Integrale dar.

Um das Verfahren in das gehörige Licht zu setzen, diene folgendes Beiiel. Bekanntlich ist:

$$\int_0^1 \cos bv \,.\, dv = \frac{\sin b}{b}.$$

ı die Integrationsgrenzen 0 und 1 sind, so wird v niemals einen Werth annehn, der über 1 hinaus läge. Daher wird es erlaubt sein, die Differentialfunction s $bv.\ dv$ unbeschadet ihres Werthes mit dem Factor $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 1\varphi \cos v\varphi}{\varphi}\, d\varphi$ multipliciren, da dieser Factor, so lange nur $v < 1$, nach §. 5 constant $= 1$. Für den Grenzwerth $v = 1$ allein ist er nur $= \frac{1}{2}$, ein Umstand, welcher der chtigkeit des eben Gesagten keinen Eintrag thut, da in der im §. 6 aufgestellten finitionsgleichung für das bestimmte Integral eine beliebige endliche Anzahl n Gliedern unbeschadet der Richtigkeit nur halb genommen, oder auch ganz ggelassen werden kann. Es ist also

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos bv.\ dv \int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos v\varphi\ d\varphi = \frac{\sin b}{b}.$$

is demselben §. 5 ergiebt sich:

$$\frac{2}{\pi}\int_1^{c>1} \cos bv.\ dv \int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos v\varphi\ d\varphi = 0,$$

jetzt alle Werthe, die v annehmen kann, vermöge der Voraussetzung $c > 1$ er 1 hinaus liegen, daher nach §. 5 der Factor $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos v\varphi\ d\varphi$ constant = 0 ist. Durch Addition vorstehender zwei Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{c\geqq 1} \cos bv\ dv \int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos v\varphi\ d\varphi = \frac{\sin b}{b}.$$

hrt man jetzt die Ordnung der Integrationen um, so folgt:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi}\, d\varphi \int_0^{c\geqq 1} \cos bv \cos \varphi v\ dv = \frac{\sin b}{b}.$$

Jetzt lässt sich eine Integration ausführen, und es ergiebt sich:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi}\left(\frac{\sin (\varphi+b)\, c}{\varphi+b} + \frac{\sin (\varphi-b)\, c}{\varphi-b}\right) d\varphi = \frac{\sin b}{b},$$

ein Resultat, welches auf anderem Wege wohl nur mit grossen Schwierig gefunden werden könnte.

§. 8.

Benutzen wir jetzt das Ergebniss des §. 5 zur Herleitung des Fourier Theorems in seiner grössten Allgemeinheit.

Sei $b > a > 0$; $f(x)$ eine von $x = a$ bis $x = b$ immer bestimmt und e bleibende, sonst aber ganz beliebige Function von x: dann wird es erlaubt sein, i Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ zu der Differentialfunction $f(x)\,dx$ unbeschadet des thes derselben den unter den festgestellten Bedingungen constanten $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi \sin x\varphi}{\varphi}\,d\varphi$ hinzuzufügen, denn der Werth des letzteren ist nach gleich + 1. Daher die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx \int_0^\infty \frac{\cos a\varphi \sin x\varphi}{\varphi}\,d\varphi .$$

Jetzt wird man auch rechter Hand statt der unteren Grenze a eine bel andere α nehmen dürfen, welche die Bedingung erfüllt

$$a > \alpha \geqq 0, \quad \text{da ja}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_\alpha^a f(x)\,dx \int_0^\infty \frac{\cos a\varphi \sin x\varphi}{\varphi}\,d\varphi = 0$$

ist, wie ebenfalls aus §. 5 erhellt. Nur muss noch die Bedingung hinzut dass $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = a$ endlich bleibe. Es ist also

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^b f(x)\,dx \int_0^\infty \frac{\cos a\varphi \sin x\varphi}{\varphi}\,d\varphi ,$$

und wenn man die Ordnung der Integrationen umkehrt:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi}{\varphi}\,d\varphi \int_\alpha^b f(x) \sin \varphi x\,dx . —$$

Ebenso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx \int_0^\infty \frac{\cos x\varphi \sin b\varphi}{\varphi}\,d\varphi ,$$

und wenn $\beta \geqq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^\beta f(x)\,dx \int_0^\infty \frac{\cos x\varphi \sin b\varphi}{\varphi}\,d\varphi ,$$

ler, wie sich leicht ergiebt:

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin b\varphi}{\varphi}\,d\varphi \int_a^\beta f(x)\cos\varphi x\,dx. -$$

Die vorstehenden Entwickelungen werden auch richtig bleiben, wenn man att $\cos a\varphi$, $\sin x\varphi$, $\sin b\varphi$, $\cos x\varphi$ bezüglich die Ausdrücke $\cos a^m\varphi$, $\sin x^m\varphi$, $b^m\varphi$, $\cos x^m\varphi$ setzt.

§. 9.

Differentiirt man nun die Gleichung (1) nach a, so ist es für den möglichen ll der Discontinuität unerlässlich, das Integral $\int_\alpha^b$ zu zerlegen in $\int_\alpha^a + \int_a^b$, dass man hat:

$$\int f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi}{\varphi}\,d\varphi \int_\alpha^a f(x)\sin x\varphi\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi}{\varphi}\,d\varphi \int_a^b f(x)\sin x\varphi\,dx.$$

Die Differentiation ergiebt:

$$-f(a+0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin a\varphi \int_\alpha^b f(x)\sin x\varphi\,dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi}{\varphi}\,d\varphi.\ f(a-0)\sin a\varphi$$
$$- \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi}{\varphi}\,d\varphi\ \sin a\varphi.\ f(a+0),$$

raus mit Hülfe des §. 5 hervorgeht:

$$(a+0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin a\varphi \int_\alpha^b f(x)\sin x\varphi\,dx - \tfrac{1}{2}f(a-0) + \tfrac{1}{2}f(a+0), \text{ d. i.}$$

$$) \qquad \tfrac{1}{2}f(a+0) + \tfrac{1}{2}f(a-0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin a\varphi \int_a^b f(x)\sin x\varphi\,dx,$$
$$\text{wenn } b > a > \alpha \geq 0. -$$

Setzt man aber in (1) $\alpha = a$, so erlangt man durch Differentiation:

$$-f(a+0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin a\varphi \int_a^b f(x)\sin x\varphi\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos a\varphi}{\varphi}d\varphi.\sin a\varphi.\ f(a+0),$$

d. i.

$$() \qquad \tfrac{1}{2}f(a+0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin a\varphi \int_a^b f(x)\sin x\varphi\,dx,$$
$$\text{wenn } b > a > 0. -$$

Differentiirt man in ganz ähnlicher Weise die Gleichung (2) nach b, so

$$f(b-0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\, b\varphi\, d\varphi \int_a^\beta f(x)\, \cos\varphi x\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\, b\varphi}{\varphi}\, d\varphi.\, \cos\, b\varphi.\, f(b$$
$$- \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\, b\varphi}{\varphi}\, d\varphi.\, \cos\, \varphi b.\, f(b+0),$$

woraus man mit Hülfe von §. 5 den Schluss zieht:

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2} f(b+0) + \tfrac{1}{2} f(b-0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\, b\varphi\, d\varphi \int_a^\beta f(x)\, \cos\varphi x\, dx,$$
$$\text{wenn } \beta > b > a \geqq 0.$$

Desgleichen folgt, wenn man in (2) $\beta = b$ setzt und dann differentiirt

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2} f(b-0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\, b\varphi\, d\varphi \int_a^b f(x)\, \cos\varphi x\, dx.$$

Man sieht leicht, dass das Fourier'sche Theorem als specieller Fall i
eben gefundenen Gleichungen enthalten ist, denn setzt man in (3) $\alpha = 0$, b
und in (5) $a = 0$, $\beta = \infty$, so gehen dieselben in die zwei Fourier'schen Gle
gen über.

§. 10.

Nach dem hier eingeschlagenen Gange der Untersuchung ist es nic
stattet, in (5) etwa $b = 0$ zu setzen. Man ist also nicht berechtigt zu schli
dass das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \int_0^h f(x)\, \cos\varphi x\, dx = \tfrac{1}{2} f(+0) + \tfrac{1}{2} f(-0)$$

sei, worin $h > 0$. Vielmehr ist in Betreff dieses Integrales folgende ande
Untersuchung nöthig:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \int_0^h f(x)\, \cos\varphi x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \int_\delta^{h+\delta} f(x-\delta)\, \cos\varphi(x-\delta)\, dx,$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi\, \cos\, \varphi\delta \int_\delta^{h+\delta} f(x-d)\, \cos\, \varphi x\, dx$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi\, \sin\, \varphi\delta \int_\delta^{h+\delta} f(x-\delta)\, \sin\varphi x$$
$$= \tfrac{1}{2} f(+0) \qquad + \tfrac{1}{2} f(+0)$$
$$\left\{\begin{matrix}\text{nach einem Ergebniss}\\ \text{aus (5) und (6)}\end{matrix}\right\} \text{ und } \quad \text{nach (4).}$$

Somit gelangen wir zu der Gleichung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varphi \int_0^h f(x)\ cos\ \varphi x\ dx = f(+0),$$

wenn $h > 0$. —

Demnach kann nicht gesagt werden, dass die Gleichung (5) allgemein auch für $b = a = 0$ gelte; dies wird vielmehr nur dann richtig sein, wenn die Function für $x = 0$ keiner Discontinuität unterworfen ist.

§. 11.

Ohne weiter bei der Anwendung des Fourier'schen Theorems auf die Bestimmung von Integralen zu verweilen, will ich dasselbe nur zur Ableitung der Dirichlet'schen Summationsformel benutzen. Es sei

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\omega d\lambda \int_0^h \varphi(\beta)\ cos\ \lambda\beta\ d\beta,$$

oder, wenn man die Ordnung der Integrationen umkehrt:

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^h \varphi(\beta)\ d\beta \int_0^\omega cos\ \lambda\beta\ d\lambda.$$

Jetzt führe man die Integration zwischen den Grenzen 0 und ω wirklich aus, und es wird erhalten:

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^h \varphi(\beta)\ \frac{sin\ \omega\beta}{\beta}\ d\beta. —$$

Denkt man sich nun ω über alle Grenzen hinaus wachsend, so wird, wie aus der im Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Form mit Hülfe der Gleichung (7) erhellt, $u = \varphi(+0)$ werden. Somit ergiebt sich:

$$\lim_{\omega = \infty} \frac{2}{\pi}\int_0^h \varphi(\beta)\ \frac{sin\ \omega\beta}{\beta}\ d\beta = \varphi(+0),$$

welche Gleichung aber nur unter der Bedingung richtig ist, dass $\varphi(\beta)$ innerhalb der Integrationsgrenzen, also von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ bestimmt und endlich bleibt (siehe §. 8). Setzt man nun

$$\varphi(\beta) = \frac{\beta \cdot f(\beta)}{sin\ \beta},$$

so ist diese Bedingung erfüllt, falls nur $f(\beta)$ bestimmt und endlich bleibt, von $\beta = 0$ an bis zu $\beta = \pi$ exclusive; denn selbst für $\beta = 0$ wird $\frac{\beta}{sin\ \beta} = 1$, also

$\varphi(0) = f(0)$. Daher gilt die Gleichung

$$(9) \qquad \lim_{\omega = \infty} \frac{2}{\pi}\int_0^h f(\beta)\,\frac{\sin\omega\beta}{\sin\beta}\,d\beta = f(+0),$$

$$\text{wenn } \pi > h > 0,$$

wo übrigens ω nicht eine ganze Zahl zu sein braucht, was in der Beweisfü Dirichlet's von vorn herein festgestellt wird. Es ist leicht, mit Hülfe dieses grales auch den Werth von $\int f(\beta)\,\frac{\sin\omega\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ zwischen beliebigen Grenzen z stimmen; doch kann man sich, wenn dieselben $-\pi$ auf der einen und $+$ der andern Seite überschreiten, der einschränkenden Bedingung nicht entsch ω als ganze ungerade Zahl zu betrachten. — Die Summirung der Fourier' Reihen mittelst der Gleichung (9) lässt sich auf dem von Lejeune-Dirichle geschlagenen Wege ohne weitere Schwierigkeiten vollführen; ich verweise hiermit auf die in §. 1 citirte Abhandlung.

§. 12.

Der Weg, auf welchem wir zu dem in der Gleichung (9) ausgesproc Resultate gelangt sind, kann eben nicht kurz und leicht genannt werden, er führte uns dafür auch zu einer interessanten Erweiterung des Fourier' Theorems. Handelt es sich einzig und allein um Auffindung des in (9) e tenen Satzes, so bietet der folgende §. 13 denjenigen Weg, der wohl übe der kürzeste sein dürfte. — Im Jahre 1843 erschienen Dr. Oskar Schlömi „Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale," in welchen der Verfasser gleic den ersten Seiten einen neuen Beweis von (9) giebt, der sich dem oberfläch Blicke durch Eleganz empfiehlt, eine strengere Prüfung aber nicht aushä sich gar bald zeigt, dass die Richtigkeit des erzielten Resultates auf der g seitigen Compensation zweier Fehler beruht. Der erste ist ein gewöhnlicher stoss, der zweite aber etwas feinerer Art, vor dessen Wiederholung im meinen zu warnen ist. Jedermann weiss, dass, wenn es sich um die Bestim des Grenzwerthes $\lim_{\omega = \infty} \omega . \sin\frac{x}{\omega}$, oder was dasselbe ist, $\lim_{n=0} \frac{\sin nx}{n}$ delt, man zur Differentiirung des Zählers und Nenners seine Zuflucht nimmt durch man erhält

$$\lim_{n=0} \frac{\sin nx}{n} = \lim_{n=0} \frac{x.\cos nx}{1} = x, \text{ also}$$

$$\lim_{\omega = \infty} \omega . \sin\frac{x}{\omega} = x.$$

Dessenungeachtet ist es nicht schlechthin erlaubt, anstatt $lim.\ \omega.\ sin\ \frac{x}{\omega}$, auch dem Integralzeichen, x zu setzen oder umgekehrt. Denn dann wäre z. B.

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{x\omega} \frac{\sin\beta}{\omega.\sin\frac{\beta}{\omega}}\,d\beta = \lim_{\omega=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{x\omega} \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta$$

wie sich mittelst §. 3 ergiebt,

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{x\omega} \frac{\sin\beta}{\omega.\sin\frac{\beta}{\omega}}\,d\beta = 1.$$

sformirt man nun mittelst $\beta = \omega\gamma$, so erhält man:

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{x} \frac{\sin\omega\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma = 1,$$

auch x bedeuten möge — ein Resultat, welches offenbar falsch ist. (Siehe 10) in §. 15.)

§. 13.

Am kürzesten kann wohl auf folgende Weise die Dirichlet'sche Summationsel hergeleitet werden. Offenbar ist, wie man sich durch partielles Integriren zeugt:

$$\int f(\beta)\ cos\ \lambda\beta\,d\beta = f(\beta)\ \frac{sin\ \lambda\beta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int f'(\beta)\ sin\ \lambda\beta\ d\beta.$$

n nun $f(\beta)$ von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ endlich, bestimmt und einwerthig bleibt, so bt sich:

$$\int_0^h f(\beta)\ cos\ \lambda\beta\,d\beta = f(h-0)\ \frac{sin\ h\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^h f'(\beta)\ sin\ \lambda\beta\ d\beta,$$

auch λ bedeuten möge. Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $d\lambda$ und grirt von 0 bis ω, so entsteht die Gleichung:

$$\int_0^\omega \lambda\int_0^h f(\beta)\ cos\ \lambda\beta\,d\beta = f(h-0)\int_0^\omega \frac{sin\ h\lambda}{\lambda}\,d\lambda - \int_0^h f'(\beta)\,d\beta\int_0^\omega \frac{sin\ \beta\lambda}{\lambda}\,d\lambda.$$

et man nun in dem Integrale linker Hand die Ordnung der Integrationen um, immt es die Gestalt an $\int_0^h f(\beta)\,d\beta\int_0^\omega cos\ \lambda\beta\ d\beta$, oder, was dasselbe ist, ee Anfang von §. 11) $\int_0^h f(\beta)\ \frac{sin\ \omega\beta}{\beta}\,d\beta$. Daher:

$$\int_0^h f(\beta)\,\frac{\sin\omega\beta}{\beta}\,d\beta = f(h-0)\int_0^\omega \frac{\sin h\lambda}{\lambda}\,d\lambda - \int_0^h f'(\beta)\,d\beta \int_0^\omega \frac{\sin\beta\lambda}{\lambda}\,d\lambda.$$

Nun lasse man ω über alle Grenzen hinaus wachsen, so wird nach §. 4 namentlich auch β stets > 0)

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^h f(\beta)\,\frac{\sin\omega\beta}{\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2} f(h-0) - \frac{\pi}{2}\left(f(h-0) - f(+0)\right)$$

Oder endlich:

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^h f(\beta)\,\frac{\sin\omega\beta}{\beta}\,d\beta = f(+0). \tag{8}$$

Hieraus wird nun die Gleichung (9) ebenso wie in §. 11 hergeleitet.

Es ist leicht zu zeigen, dass das eben gewonnene Resultat auch Gül besitzen wird, wenn die Function $f(x)$ in dem Intervalle von $x=0$ bis einer endlichen Anzahl Discontinuitäten unterworfen ist.

§. 14.

Die Leichtigkeit, mit welcher im vorigen Paragraphen die Gleichun gefunden wurde, erregt den Wunsch, auch das erweiterte Fourier'sche Th in gleicher Kürze herzuleiten. Es ist dies wirklich möglich, wie sogleich g werden soll.

Es ergiebt sich durch partielles Integriren:

$$\int f(\beta)\,\cos\lambda\beta\,d\beta = f(\beta)\,\frac{\sin\lambda\beta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int f'(\beta)\,\sin\lambda\beta\,d\beta.$$

Ist nun $f(x)$ eine von $x=a$ bis $x=b$ endlich, bestimmt und einwerthig blei Function (denn nur unter dieser Voraussetzung ist es erlaubt, sich der beka Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ in der gleich folgenden Weise zu bedienen ergiebt sich durch Einsetzung der Grenzen a und b:

$$\int_a^b f(\beta)\,\cos\lambda\beta\,d\beta = f(b-0)\,\frac{\sin\lambda\beta}{\lambda} - f(a+0)\,\frac{\sin\lambda a}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(\beta)\,\sin\lambda\beta$$

Nun multiplicire man beide Seiten der Gleichung mit $\cos c\lambda\,d\lambda$ und inte zwischen den Grenzen 0 und ∞, so erhält man, wenn man zugleich die Ord der Integrationen in dem letzten Gliede rechter Hand umkehrt:

$$\int_0^\infty \cos c\lambda\, d\lambda \int_a^b f(\beta) \cos \lambda\beta\, d\beta = f(b-0) \int_0^\infty \frac{\cos c\lambda \sin b\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$
$$- f(a+0) \int_0^\infty \frac{\cos c\lambda \sin a\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$
$$- \int_a^b f'(\beta)\, d\beta \int_0^\infty \frac{\sin \beta\lambda \cos c\lambda}{\lambda}\, d\lambda.$$

In ganz ähnlicher Weise gelangt man, von

$$\int f(\beta) \sin \lambda\beta\, d\beta = -f(\beta) \frac{\cos \lambda\beta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int f'(\beta) \cos \beta\lambda\, d\lambda$$

ehend, zu der Gleichung:

$$\int_0^\infty \sin c\lambda\, d\lambda \int_a^b f(\beta) \sin \lambda\beta\, d\beta = -f(b-0) \int_0^\infty \frac{\cos b\lambda \sin c\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$
$$+ f(a+0) \int_0^\infty \frac{\cos a\lambda \sin c\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$
$$+ \int_a^b f'(\beta)\, d\beta \int_0^\infty \frac{\cos \beta\lambda \sin c\lambda}{\lambda}\, d\lambda.$$

Die beiden so eben entwickelten Gleichungen (C) und (S) geben mit Hülfe §. 5 Aufschluss über jeden in Betreff der gegenseitigen Grössen von a, b c nur denkbaren Fall. Es sei ein für allemal $b > a \geq 0$, dann folgt aus (C):

nn $a > c \geq 0$, $\int_0^\infty \cos c\lambda\, d\lambda \int_a^b f(\beta) \cos \lambda\beta\, d\beta = 0$.

nn $a = c > 0$, ... $= \frac{\pi}{4} f(c)$.

an $a = c = 0$, ... $= \frac{\pi}{2} f(0)$, [in Uebereinstimmung mit Gl. 7].

an $b > c > a$, ... $= \frac{\pi}{2} f(c)$, $\left[= \frac{\pi}{4} f(c-0) + \frac{\pi}{4} f(c+0)\right]$.

an $b = c > a$, ... $= \frac{\pi}{4} f(c)$.

nn $c > b > a$, ... $= 0$.

Desgleichen folgt aus der Gleichung (S):

an $a > c \geq 0$, $\int_0^\infty \sin c\lambda \int_a^b f(\beta) \sin \lambda\beta\, d\beta = 0$.

n $a = c > 0$, ... $= \frac{\pi}{4} f(c)$.

Wenn $c = 0$, $\int_0^\infty \sin c\lambda \int_a^b f(\beta) \sin \lambda\beta \, d\beta = 0$.

Wenn $b > c > a$, ... $= \frac{\pi}{2} f(c)$, $\left[= \frac{\pi}{4} f(c-0)\right.$

$\left. + \frac{\pi}{4} f(c+\right.$

Wenn $b = c > a$, ... $= \frac{\pi}{4} f(c)$.

Wenn $c > b > a$, ... $= 0$.

Hierbei ist immer noch vorausgesetzt, dass die Function $f(x)$ von $x = a$ bis continuirlich sei. Befreit man aber die Function $f(x)$ von dieser Beschrä so lehrt eine ganz einfache Betrachtung, (indem man nur die betreffende grale an denjenigen Stellen, wo die Discontinuität eintritt, zu zerlegen b mit Hinzuziehung der eben gewonnenen Resultate, dass die letzteren immer bleiben, wenn nur, in dem Falle, dass c zwischen a und b liegt, an der $x = c$ kein Sprung gebildet wird. Für diesen Fall ergiebt sich als R sowohl für das Cosinus-, als auch das Sinusintegral, der schon oben in [zugefügte Werth

$$\frac{\pi}{4} f(c-0) + \frac{\pi}{4} f(c+0).$$

§. 15.

Kehren wir jetzt zu der Gleichung (8) zurück. Mittelst derselben leicht, wie schon von Lejeune-Dirichlet hinlänglich geschehen ist, den We

$$\lim_{n=\infty} \int f(\beta) \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} \, d\beta$$

zwischen irgend welchen Grenzen zu bestimmen, desgleichen auch die Wer

$\int f(\beta) \frac{\sin 2n\beta}{\sin \beta} \, d\beta$, $\int f(\beta) \frac{\cos (2n+1)\beta}{\cos \beta} \, d\beta$, $\int f(\beta) \frac{\sin (4n+2)\beta}{\sin \beta} \, d\beta$, u.

Ohne weiter bei diesem Gegenstande zu verweilen, erinnere ich nur namentlich bei Summirung von Reihen sehr brauchbare, Gleichung:

(10) $\lim_{n=\infty} \int_0^\varkappa f(\beta) \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} \, d\beta = \pi \left(\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots\ldots + \right.$

worin $l\pi$ das grösste in $\varkappa$ enthaltene Vielfache von π vorstellt, und das Glied $f(l\pi)$ nur halb zu nehmen ist, wenn $\varkappa$ ein genaues Multiplum von sollte. Mit Hülfe dieser Gleichung hat Lejeune-Dirichlet einen allgemeine weis für die Summe der sogenannten Gauss'ischen Reihen geliefert

andlung „Sur l'usage des integrales définies dans la sommation des séries s ou infinies," Crelle's Journal, XVII B., Jahrg. 1837, pag. 57—67, auf he Schrift ich zur Rechtfertigung der Gl. (10) verweise, jedoch auf einem ge, der nicht eben der einfachste und natürlichste zu sein scheint. Es sei vergönnt, um zugleich an einem Beispiele die Anwendung der Gleichung (10) eigen, die von mir gefundene Entwickelung mitzutheilen.

§. 16.

Für einen speciellen Fall lieferte zuerst Gauss einen Beweis in den „Disliones Arithmeticae," späterhin einen äusserst scharfsinnigen in der Abhandlung matio quarundam serierum singularium," welche in den Commentt. recentt. t. Gotting. Tom. I. enthalten ist. Die Reihen selbst sind folgende:

$$G = \cos 0^2 \frac{2\pi}{m} + \cos 1^2 \frac{2\pi}{m} + \cos 2^2 \frac{2\pi}{m} + \ldots + \cos (m-1)^2 \frac{2\pi}{m},$$

$$H = \sin 0^2 \frac{2\pi}{m} + \sin 1^2 \frac{2\pi}{m} + \sin 2^2 \frac{2\pi}{m} + \ldots + \sin (m-1)^2 \frac{2\pi}{m},$$

m eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die Summation dieser Reihen kann st der unten folgenden Gleichung (11), deren Entwickelung die Aufgabe s Paragraphen ist, sehr einfach erreicht werden. —

Seien m, n ganze Zahlen und $f(u)$ eine periodische Function von u, deren ıs sich von $u = 0$ bis $u = 2m\pi$ erstreckt, so dass also $f(u) = f(u + l.\, 2m\pi)$. diesen Voraussetzungen lässt sich das Integral

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2m\pi} \binom{\cos}{\sin} \frac{x^2}{2m\pi} \frac{\sin (2n+1)\, x}{\sin x} f(x)\, dx \quad *)$$

einer etwas anderen Form darstellen. Denn da bekanntlich

$$\frac{\sin (2n+1)\, x}{\sin x} = \sum_{\varkappa=-n}^{\varkappa=+n} \cos 2\varkappa x,$$

gt:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{\varkappa=-n}^{\varkappa=+n} \int_0^{2m\pi} \binom{\cos}{\sin} \frac{x^2}{2m\pi} \cos 2\varkappa x\, f(x)\, dx.$$

*) Der Exponent 2 bezieht sich hier, wie im Folgenden, immer auf das Argument, so dass $\cos v^2$ so viel bedeutet wie $\cos (v^2)$. —

Nun ist aber

$$0 = \sum_{x=-n}^{x=+n} \sin 2\varkappa x,$$

foiglich auch

$$0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=-n}^{x=+n} \int_0^{2m\pi} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \frac{x^2}{2m\pi} \sin 2\varkappa x \, f(x) \, dx,$$

woraus sich im Verein mit der letzten Gleichung für v ergiebt:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{x=-n}^{x=+n} \int_0^{2m\pi} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left(\frac{x^2}{2m\pi} + 2\varkappa x \right) f(x) \, dx.$$

Hieraus folgt durch Transformation mittelst $x = y \cdot \sqrt{2m\pi}$:

$$v = \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \sum_{x=-n}^{x=+n} \int_0^{\sqrt{2m\pi}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (y^2 + 2y\varkappa \sqrt{2m\pi}) \, f(y \cdot \sqrt{2m\pi}) \, dy,$$

und durch abermalige Transformation mittelst $y = z - \varkappa\sqrt{2m\pi}$, wenn man z
die Multipla von $2m\pi$, welche in den Argumenten von $\sin$, $\cos$ oder f erse
weglässt:

$$v = \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \sum_{x=-n}^{x=+n} \int_{x\sqrt{2m\pi}}^{(x+1)\sqrt{2m\pi}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} z^2 \, f(\sqrt{2m\pi} \cdot z) \, dz.$$

Hierin ist nun eine Summe von Integralen enthalten, deren Grenze
immer aneinander anschliessen, die folglich in ein einziges zusammen
werden können, wie folgt:

$$v = \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \int_{-n\sqrt{2m\pi}}^{(n+1)\sqrt{2m\pi}} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} z^2 \cdot f(\sqrt{2m\pi} \cdot z) \, dz.$$

Geht man nun zu der Grenze für $n = \infty$ über, indem man zugleich
statt v seinen ursprünglichen Ausdruck setzt, so ergiebt sich:

$$(11) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2m\pi} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \frac{x^2}{2m\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f(x) \, dx = \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} z^2 f(\sqrt{2m}$$

§. 17.

Die Gleichung (10) lehrt, wie sich die linke Seite von (11) in Form
Reihe darstellen lasse. So oft also der Werth des rechter Hand stehend

mten Integrales sich in geschlossenen Ausdrücken wiedergeben lässt, erhält die Summation einer Reihe. Dies ist z. B. der Fall, wenn

$$f(u) = 1 + \cos u,$$

periodische Function, deren Cyclus von 0 bis 2π, also auch bis $2m\pi$ reicht) tzt wird. Alsdann verwandelt sich die Gleichung (11) in

$$2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2m\pi} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \frac{x^2}{2m\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} (1 + \cos x)\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} z^2 \quad (1 + \cos z \sqrt{2m\pi})\, dz.$$

Entwickelt man die linke Seite mit Hülfe von (10) in eine Reihe, so zeigt bald, dass, je nachdem man die obere (*cos.*) oder die untere (*sin.*) Zeile , man zu den Entwickelungen gelangt, welche die Gleichungen für G und H 16 darbieten; nur dass in der Cosinusreihe das erste Glied anstatt $\cos 0^2 \frac{2\pi}{m}$ t $\frac{1}{2} \cos 0^2 \frac{2\pi}{m}$, dafür aber am Ende der Reihe noch das Glied $\frac{1}{2} \cos m^2 \frac{2\pi}{m}$ tritt, wodurch sich die Differenz ausgleicht, da $\cos 0^2 \frac{2\pi}{m} = \frac{1}{2} \cos 0^2 \frac{2\pi}{m}$ $\cos m^2 \frac{2\pi}{m}$, oder $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ist.

Bei der Sinusreihe aber ist der hinzutretende Factor $\frac{1}{2}$ im ersten Gliede, ie das neu hinzukommende Glied am Ende der Reihe ohne allen Einfluss, owohl $\sin 0^2 \frac{2\pi}{m}$, als auch $\sin m^2 \frac{2\pi}{m} = 0$ ist. Somit gelangen wir zu den hungen

$$G = \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2 \quad (1 + \cos \sqrt{2m\pi}.\, z)\, dz,$$

$$H = \frac{\sqrt{2m\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2 \quad (1 + \cos \sqrt{2m\pi}.\, z)\, dz.$$

ehr kommt es nur noch auf die Bestimmung der rechter Hand stehenden rale an.

§. 18.

Der Werth dieser Integrale kann durch die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2\, dz \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2\, dz,$$

deren jedes bekanntlich gleich $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ist, ausgedrückt werden. Wir haben nicht nöthig, die beiden letztern Integrale als bekannt vorauszusetzen. vor der Hand

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2\, dz = a, \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2\, dz = b.$$

Alsdann kann man durch einige Transformationen sehr leicht nachweisen,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2 . \cos 2gz\, dz = a. \cos g^2 + b. \sin g^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2 . \cos 2gz\, dz = b. \cos g^2 - a. \sin g^2.$$

Mittelst dieser Gleichungen gelangt man zu den Resultaten:

$$G = \sqrt{\frac{m}{2\pi}}\left(a + a. \cos \frac{m\pi}{2} + b. \sin \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$H = \sqrt{\frac{m}{2\pi}}\left(a + b. \cos \frac{m\pi}{2} - a. \sin \frac{m\pi}{2}\right).$$

Für $m = 1$ wird nun $G = 1$ und $H = 0$, folglich

$$1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,(a + b),$$

$$0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,(b - a),$$

woraus sich $b = a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ergiebt. Hierdurch erlangt man das Endergeb

$$G = \tfrac{1}{2}\sqrt{m}\left(1 + \cos \frac{m\pi}{2} + \sin \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$H = \tfrac{1}{2}\sqrt{m}\left(1 + \cos \frac{m\pi}{2} - \sin \frac{m\pi}{2}\right),$$

welches sich folgendermassen specialisiren lässt:

Wenn $m = 4n$, so ist $G = \sqrt{m}$, $H = \sqrt{m}$;
$m = 4n + 1$, so ist $G = \sqrt{m}$, $H = 0$;
$m = 4n + 2$, so ist $G = 0$, $H = 0$;
$m = 4n + 3$, so ist $G = 0$, $H = \sqrt{m}$. —

Schulnachrichten.

A.

Allgemeine Lehrverfassung und Disciplin.

1.

ÜBERSICHT

e in den einzelnen Klassen während des Schuljahres von Ostern 1844 bis dahin 1845 ertheilten Unterrichts.

In ***Prima*** *wurde der Unterricht in* 32 *wöchentlichen Stunden von* 5, *seit* *jahr von* 6 *Lehrern besorgt.* ***Ordinarius Director Dr. Schirlitz.***

. Sprache. Stylübungen (freie Arbeiten, Exercitia und Extemporalia) und Jebungen in der Verskunst. 3 Stunden. Die Themata zu den freien Arbeiten waren folgende: 1) Quam vere dixerit Marcellus, Capuam Hannibali Cannas fuisse, ostendatur. 2) Unde factum sit, ut multi vel graeci vel atini poetae vatis personam induerent et oraculis ac vaticiniis pro argumentis carminum uterentur (Hor. Carm. I, 15. Virg. Eclog. IV.). 3) Aristidem Athenis, Camillum Roma ejectos in exsilium longe alio animo patriae injuriam tulisse.) De bellis minoribus, quibus Graecia post mortem Cimonis usque ad tempus exata est, quo bellum Peloponnesiacum exarsit. 5) Quid veteres philosophi de nimi humani natura judicaverint, auctore Cicerone (Tusc. Disp. I, c. IX—XI.) xponatur. 6) De miraculis Aegypti. 7) Alexandrum Magnum omnia potius abuisse in potestate, quam affectus. 8) C. Julium Caesarem animum suum on minus fortiter vicisse, quam hostes (Cic. pro Marc. c. 3). 9) De praeipuis animi ingrati caussis (wurde von Allen in der Schule binnen 4 Stunden earbeitet). 10) De Argonautis deque consilio, quod in expeditione sua habuerint. 1) Periclem magnum in pace, nec minorem in bello fuisse (vorher von den bituri enten bearbeitet). 12) Pacem Antalcidae Graecis ignominiae et dedecori fuisse. 13) Qui factum sit, ut Graecia libertatem amitteret et sub Philippi, Macedoniae regis, imperium caderet. 14) De morte voluntaria quid Cicero e sententia philosophorum Graecorum judicaverit, exponatur (Cic. Tusc. Disp. I, 30. §. 74). 15) Quod Sallustius ait (Bell. Catil. c. VII.), a populo Romano maximas hostium copias parva manu fusas et urbes natura munitas pugnando captas esse, exemplis probetur. 16) Agesilaum propter eximias, quibus tum publica, tum privata ejus vita excelluit, virtutes summis Graeciae viris accensendum esse. 17) Q. Horatii carmen XXVIII libri I. in prosam

orationem ita resolvatur, ut simul de consilio et conformatione ejus b
disputetur. 18) Cn. Pompejum et secundam et adversam fortunam prae
mortalibus expertum esse (wurde in der Schule binnen 4 Stunden bear
19) C. Julius Caesar quibus rebus Magno illi Alexandro similis, quib
dissimilis fuerit, ostendatur (Vellei. Paterc. II, 41), von den Abiturient
arbeitet. Die Aufgaben zu den poetischen Versuchen waren in deu
Sprache abgefasst. Cic. Tusc. Disp. I., dann Hor. Carm. I, 27 — II, 7. E
von dem Gelesenen wurde memorirt. 5 St. Director Schirlitz.

Griechische Sprache. Exercitia und Extemporalia. 1 St. Hom. Il. XXI,
XXIII. 3 St. Derselbe. Plat. de Republ. I — II, cap. 16. 2 St. Ober
Dr. Röder bis Nov., dann Oberlehrer Dr. Theiss.

Hebräische Sprache. Grammatik nach Gesenius §. 61 — 103 mit s
lichen Uebungen. 1 St. Gesenius's Lesebuch S. 67 — 105. 1 St. Pro
Förstemann.

Deutsche Sprache. 1) Grammatik, nach Becker's Schulgrammatik (4.
Syntax. Prädic. Satzverhältniss, mit Vergleichung der Syntax anderer Spr
2) Uebungen im mündlichen Vortrage und 3) Stylübungen: Aufsätze,
tationen, freie Vorträge, Gedichte über folgende Themata: 1) Ich mus
ken, so lange es Tag ist. Joh. 9, 4. 2) Gute Lebensordnung ist die
Arznei. 3) Die Freude sei Würze, nicht Nahrung des Lebens. 4)
Eigenschaften haben auch grosse Fehler zur Seite. 5) Warum verdie
lateinische Sprache ein eifriges Studium? 6) Frühlingsempfindungen. 7
dem deutschen Volkscharakter! 8) Theodor Körner ein achtungswi
Dichter. 9) Die Geschichte zeigt, dass Undank der Welt Lohn ist. 1
del der Kreuzzüge. 11) Die Sterne sind mein Vaterland. 12) Sich
besiegen ist der schwerste Sieg. 13) Haben wir Pflichten auch geg
thierische Schöpfung zu erfüllen? 14) Erinnerungen aus meinen Sommer-
15) Der Weise beurtheilt seinen Werth nach seiner Tugend. 16) Die m
den Stimmen des hereinbrechenden Herbstes. 17) Warum verdient Fried
so sehr den Namen des Grossen? 18) Geistige Vorzüge ohne sittlich
sinnung sind werthlos. 19) Licht und Schatten im Character des C.
Cäsar. 20) Welchen Einfluss hatte die Erfindung der Buchdruckerku
die europäischen Völker? 21) Moses und Samuel ehrwürdige Charakte
Geschichte. 22) Die Früchte edler Vaterlandsliebe. 23) Der Mensch ist
freier, je weniger Bedürfnisse er hat. 24) Die Bestimmung des Me
geht über das Sinnliche hinaus. 25) Die Verschiedenheit der epische
der dramatischen Poesie. 26) Die alten Griechen waren ein edles
27) Vollkommene Ruhe wohnt nur in einer über die Erde hinaus strel
Seele. 28) Der irdische Beruf wird geheiligt, wenn das Gemüth dem
angehört. 29) Schwer ist der Uebergang von dem Laster zur Tugend. 30)
Hermann und Dorothee verglichen mit Voss' Luise. 31) Dass Klopsto
höchsten Nachruhms würdig sei. 32) Welche Gefahren verursacht si
Leichtsinn? 33) Ein Blick auf die Gegenwart (selbstgewählt). 34) Was
das Leben so anmuthig? 35) Die Geschichte eine Theodicee (selbsge

36) Der sittliche Einfluss des Studiums der Geschichte. 37) Die Kindheit. Ein Gedicht. 38) Abschied von der Heimath. Ein Gedicht. 39) Die Musen. Ein Gedicht. 40) Der Kampf. Ein Gedicht. 41) Der 18. October ein Tag freudiger Erinnerung! 42) Hoffnung und Erinnerung als Schutzengel des menschlichen Lebens. 43) Die Vortheile der Kreuzzüge. 44) Lob und Tadel des Mittelalters. 45) Musste Regulus nach Carthago zurückkehren, oder nicht? 2 St. Oberlehrer Dr. Rothmaler.

nzösische Sprache. 1) Lectüre nach Idelers Handbuch 4. Th., dann Molière's Avare. Act. I. und II. Nebst mündlichen und schriftlichen Erläuerungen. 2) Exercitien und Extemporalien. 2 St. Derselbe.

igionslehre (in Verbindung mit Obersecunda). Bibliologie. Die h. Schrift des alten Testaments wurde durch Vortrag, Lesung einzelner Abschnitte und Besprechung sorgfällig erläutert. 2 St. Derselbe.

hematik. Im Sommer: Anwendung der Algebra auf Geometrie. Trigonometr. und stereometr. Aufgaben. Kettenbrüche. Unbestimmte Gleichungen. Im Winter: Mathematische Geographie nach Brettner's Leitfaden. Alle 4 Wochen schriftliche Arbeiten aus allen Theilen der Elementarmathematik. 4 St. Collaborator Dr. Kramer.

sik. Allgemeine und besondere Eigenschaften der Körper, die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung, von der Wellenbewegung und dem Schalle. Nach Baumgartner. 2 St. Derselbe.

chichte und Geographie. Allgemeine Geschichte von 1273 bis 1789 nach Schmidt's Grundriss. 2 St. Professor Förstemann.

osophische Propädeutik. Logik nach Beck's Leitfaden. 2 St. Oberlehrer Dr. Rothmaler, von Neujahr an Collab. Dr. Haacke.

In **Obersecunda** *wurde der Unterricht in* 32 *wöchentlichen Stunden von* 5 *Lehrern besorgt.* **Ordinarius Conrector und Professor Dr. Förstemann.**

Sprache. Syntax nach Krebs's Schulgrammatik §. 502 ff. 1 St. Exercitia und einige freie Arbeiten. 2 St. Die Themata der letzteren waren ausser einigen von den einzelnen Schülern selbst gewählten: Lycurgi leges. — Aristides laudatur. — Ante obitum nemo supremaque funera felix. — Insularum Graecarum descriptio. — Roma bis obtinuit orbis terrarum imperium. — Extemporalia. 1 St. Metrische Uebungen. 1 St. Aufgaben zu Versuchen in verschiedenen Versmassen, waren unter andern: Icari mors. — Fontis descriptio. — Columbi laus (epitaphium). — Fortunae inconstantia. — Ad amicum in castris versantem. — Vivere naturae te convenienter oportet. — Ad amicum in Italiam proficiscentem. — Ad fontem meum. — Cic. pro Rosc. Amer. und Virg. Aen. XI, 438—XII, 693. Memorirt wurden Stücke aus Cicero und Virgilius. 5 St. Derselbe Ordinarius.

ichische Sprache. Grammatik nach Buttmann §. 139—148 und gelegentlich andere §§. 1 St. Exercitia. 1 St. Luciani Toxaris, Contemplantes, Demonax, Gallus. 2 St. Derselbe. Hom. Il. IV—V, 431. Director Schirlitz.

Hebräishe Sprache. Elementar- und Formenlehre bis zum 3 Cap. der G matik von Gesenius. Uebungen im Lesen, Schreiben und Uebersetze Gesenius's Lesebuche. 2 St. Hülfslehrer Weissenborn.

Deutsche Sprache. Mündliche Uebungen und schriftliche Arbeiten in g dener und ungebundener Rede. 2 St. Der Ordinarius. Mehrere The wählten die Schüler selbst; aufgegeben wurden folgende: Die gute alte Z Die zweckmässige Einrichtung und Führung eines Tagebuchs. — Bestin einer Anzahl sinnverwandter Wörter. — Eine (äsopische) Fabel. — Kan ropa in Barbarei zurücksinken? — Dürfen die Deutschen stolz sein auf ihre men? — Die Gefahren des Reichthums und der Segen der Armuth. — Die samkeit des Greises. — Poetische Schilderung einer Gegend (einer Mühle u.

Französische Sprache. 1) Lectüre: Fortsetzung von Paul et Virgin Bernardin. 2) Grammatik nach Hirzel. Der 2. und 3. Curs wurde mü und schriftlich erläutert. 2 St. Oberlehrer Dr. Rothmaler.

Religionslehre. S. Prima.

Mathematik. Von den regelmässigen Polygonen und der Ausmessung des ses. Rechnung mit Wurzelgrössen und Bruchpotenzen. Gleichungen des (repetitionsweise) und zweiten Grades. Logarithmen. Trigonometrie. wöchentliche schriftliche Arbeiten. 4 St. Collab. Dr. Kramer.

Physik. Allgemeine und besondere Eigenschaften der Körper, Lehre vom G gewicht und der Bewegung, incl. Wellenbewegung. Nach Baumgartner. Derselbe.

Geschichte und Geographie. Griechische Geschichte von 479 vor Ch zu Ende, dann Geographie des alten Italiens und Einleitung in die Gesc der Römer, nach Schmidt's Grundriss. 3 St. Director Schirlitz.

In **Untersecunda** *wurde der Unterricht in* **30** *wöchentlichen St von* **5** *Lehrern besorgt.* **Ordinarius Oberlehrer Dr. Rothmale**

Lat. Sprache. 1) Cic. de Sen. — Ovid. Metam. B. XI. — Historia Roman K. A. Schirlitz. 1. Abth. S. 27 — 37 und privatim II. Abth. §. 11 — 29, lasen die Schüler den Caesar privatim. 2) Exercitien und Extemporalie Grammatik nach Krebs. Cap. 47 — 60. 4) Prosodische Uebungen, verb mit wöchentlicher Composition dactylischer Verse. 5) Memorir- und Sp übungen, denen selbst gewählter Stoff zu Grunde lag. Zusammen Der Ordinarius.

Griechische Sprache. Grammatik nach Buttmann. Kurze Wiederholun etymologischen Theils; die Verba in $\mu\iota$ und die anomalen Verba des att Dialekts. Freie Exercitia aus der Beispielsammlung zu Buttmann's und gr. Grammatiken mit Rücksicht auf die wichtigsten Capitel aus der S Ausserdem wurden die Exercitia über den Gebrauch der Casus obliq Rost's und Wüstemann's Anleitung schriftlich ausgearbeitet und corrigirt. Odyss. IV. Xenoph. Anab. V, 3 — VI, 2. Zusammen 6 Stunden. Ober Dr. Theiss.

utsche Sprache. 1) Grammatik nach der 4. Ausg. von Becker's Schulgrammatik, besonders der 1. Theil. 2) Uebungen im mündlichen Vortrage. 3) Stylübungen in verschiedener Form. Die Themata zu den schriftlichen Aufsätzen waren: 1) Die Zeit. Ode von Heydenreich zu erläutern. 2) Warum ist Pfingsten ein so liebliches Fest zu nennen? 3) Kenntnisse haben mehr Werth, als Reichthum. 4) Welche Gefühle regt der herannahende Herbst in uns an? 5) Was macht den Inhalt aus von Schiller's Tell? 6) Der Ritter und sein Sohn. Gedicht. 7) Der Gymnasiast im Angesichte der Weihnachtsferien, oder Empfindungen, Wünsche etc. 8) In welchen Hinsichten kann man das Leben mit einer Reise vergleichen? 9) Mein Lebenslauf und meine Büchersammlung. 10) Warum ist Freundschaft ein hohes Gut zu nennen? 11) Der Frühling. 12) Der schöne Sommerabend. Eine Schilderung. 13) Warum ist es Pflicht des Jünglings, gewisse Beleidigungen geduldig zu ertragen. 14) Erinnerungen aus meinen Sommerferien. 15) Nach gethaner Arbeit ist gut ruhen. 16) Winterfreuden. Gedicht. 2. St. Oberlehrer Dr. Rothmaler.

nzösische Sprache. 1) Grammatik nach Hirzel. 1. Curs. Die Beispiele desselben wurden in der Schule mündlich und schriftlich übersetzt, für das Haus wurden noch besondere Exercitien aufgegeben. 2) Numa Pompilius 5. 3. und 6. B. halb. 2 St. Collaborator Nitzsche.

igionslehre. Die Einleitung und die Sittenlehre nach Ziegenbein's kl. Lehrbuche, nebst schriftlichen Arbeiten und Erlernung von treffenden Bibelstellen. 2 St. Hülfslehrer Weissenborn.

thematik. Von Irrationalzahlen, Verhältnissen und Proportionen. Ausmessung und Aehnlichkeit der ebenen Figuren. Von den regelmässigen Polygonen und der Ausmessung des Kreises. — Die Rechnung mit Aggregaten, die Lehre von den Potenzen mit ganzen posit. und negat. Exponenten. Die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Die Gleichungen des 1. Grades. Vierwöchentliche schriftliche Arbeiten. 3 St. Collab. Dr. Kramer.

schichte und Geographie. 1) Geschichte der ältesten asiatischen Reiche, Aethiopiens, Aegyptens, Persiens und Carthago's, nach Schmidt's Grundriss. 2 St. Collab. Nitzsche. — 2) Aussereuropäische Geographie: Asia, Australia und Afrika, nach Roon. 1 St. Collab. Dr. Kramer.

urbeschreibung. Im Sommer Botanik, im Winter Mineralogie nach Gerbar's Lehrbuche. 2 St. Collab. Dr. Kramer.

In **Tertia** *wurde der Unterricht in* 31 *wöchentlichen Stunden von* 5, *seit* Nov. *von* 6 *Lehrern besorgt.* **Ordinarius Oberlehrer Dr. Röder,** *seit dessen Abgang* **Oberlehrer Dr. Theiss.**

e Sprache. Grammatik nach Krebs c. 36—48, ausserdem noch summarisch 1—60. Die diesen Capiteln entsprechenden Aufgaben aus Krebs's Anleitung wurden ins Lateinische übersetzt und corrigirt. Ausserdem wöchentlich freie Exercitia, Memorirübungen nach Ruthardt's Methode an selbstgewähltem Stoffe. Prosodie und Versübungen. Gelesen wurde Caesar de B. G. B. 1. und in O. Schulz's Anthol. die Abschnitte aus Ovid. Met. 1, 89—163. IV, 764—802. VII, 1—158. VIII, 611—724. Zusammen 10 St. Der Ordinarius.

Griechische Sprache. Die Formenlehre bis zu den Verben auf μι. I
entsprechenden Uebungen aus Rost's und Wüstemann's Anleitung.
Lesebuch. Zusammen 6 St. Bis Mitte Nov. Oberlehrer Dr. Röder, dan
amtscandidat Dr. Wettin, von Neujahr an Collab. Dr. Haacke.

Deutsche Sprache. Grammatik nach Becker's Leitfaden. Lectüre un
terung der 15 ersten Abschnitte im 3. Th. des Potsdamer Lesebuchs.
tung zu freien deutschen Arbeiten; Ausarbeitung der sonntäglich gehör
digten; Uebungen im freien Vortrage eigner Gedanken und im Dec
2. St. Der Ordinarius.

Religionslehre. Wiederholung der 5 Hauptstücke. Die Pflichtenleh
dem Katechismus der christlichen Lehre begrifflich entwickelt und mit ge
lichen Beispielen veranschaulicht, wobei die einschlagenden Bibelstellen
derverse auswendig gelernt wurden. 2 St. Derselbe.

Mathematik. Von Linien, Winkeln, Dreiecken, Parallelogrammen und den
Praktische Einübung der 4 Species mit einfachen allgemeinen Grösse
gregaten, der Rechnung mit Potenzen von ganzen pos. u. negat. Exp
der Auflösung leichter algebr. Gleichungen des 1. Grades. Im Wint
wöchentliche schriftliche Arbeiten. 3 St. Collab. Dr. Kramer.

Geschichte u. Geographie. Geographie Europa's mit Ausschluss I
lands und Preussens; bei jedem Staate ein kurzer historischer Ue
nach Schacht, verbunden mit Kartenzeichnen. 2 St. Im Sommer Sch
candidat Dr. Wettin, im Winter Collab. Nitzsche.

Naturbeschreibung. Im Sommer die Arthrozoa und Gastrozoa mit
licher Berücksichtigung der einheimischen Käfer und Schmetterlinge; i
ter die Gruppe Osteozoa, mit besonderer Berücksichtigung des mens
Körperbaues, nach Burmeister. 2 St. Collaborator Nitzsche.

Zeichnen. 2 St. Schreib- und Zeichenlehrer Deicke.

Schönschreiben. 1 St. Derselbe.

Singen. 1 St. Musikdirector Sörgel.

In **Quarta** *wurde der Unterricht in* **31** *wöchentlichen Stunden von*
rern besorgt. ***Ordinarius Oberlehrer Dr. Theiss,*** *seit Neujahr* ***C***
Dr. Haacke.

Lat. Sprache. Krebs's lat. Grammatik bis §. 334. Dazu die entspre
Uebungen aus der Anleitung desselben Verfassers und wöchentlich frei
citien. Die für die Klasse ausgewählten loci memoriales wurden erkl
memorirt. Wiggert's Vocabularium wurde zum grössten Theil aus
gelernt. Gelesen wurde Eutrop. III, 3 — IV. Zusammen 10 St. Der Ord

Deutsche Sprache. Lectüre in Zimmermann's deutschem Lesebuche u
moriren einzelner Stücke, die zunächst zu Aufsätzen und Uebungen in
Vortrage verwandt wurden. An die Lectüre wurde die Auseinandersetzu
grammatische Punkte, besonders über Satzbau und Interpunction ange
2 St. Derselbe.

Religionslehre. 1) Wiederholung der 5 Hauptstücke. 2) Der Katec
der christl. Lehre mit Ausschluss des 7. Abschnittes wurde durchgen

ınd zwar der 3. und 4. Abschnitt ausführlich, dabei wurden Bibelsprüche und Liederverse memorirt. 2 St. Derselbe.

ehnen und geometrische Anschauungslehre. Gemeine und Decimalrüche. Proportionsrechnung. Kopfrechnen. 2 St. Collab. Dr. Kramer. Plaimetrische und stereometrische Formenlehre. 2 St. Hülfslehrer Weissenborn.

schichte und Geographie. Geschichte und Geographie Deutschlands, nsbesondere Preussens, mit Kartenzeichnen nach Schacht. 3 St. Collab. Nitzsche.

urbeschreibung. Im Sommer Botanik, im Winter Mineralogie nach Burmeister. 2 St. Derselbe.

önschreiben. 3 St. Schreib- und Zeichenlehrer Deicke.

chnen. 2 St. Derselbe.

gen. 1 St. Musikdirector Sörgel.

In **Quinta** *wurde der Unterricht in* 31 *wöchentlichen Stunden von* 4 *Lehbesorgt.* ***Ordinarius Hülfslehrer Weissenborn.***

Sprache. Elementar- und Formenlehre, nebst den Hauptregeln der niedern yntax. 4 St. Uebersetzen aus K. A. Schirlitz's lat. Lesebuche bis zum 2. Curus Nr. 15. 3 St. Mündliche und schriftliche Uebungen im Uebersetzen aus em Deutschen ins Lateinische. 2 St. Aus Wiggert's Vocabularium wurden ocabeln memorirt. 1 St. Zusammen 10 St. Der Ordinarius.

tsche Sprache. Lesen in Zimmermann's deutschem Lesebuche 1. Curus, mit grammatischen Andeutungen und Uebungen. 1 St. Uebungen im schriftchen Ausdrucke der Gedanken: a) Wiedererzählung von Geschichten, b) Aufätze über leichte Themata. 1 St. Uebungen im freien Vortrage. 1 St. Orıographische Uebungen. 1 St. Der Ordinarius.

gionslehre. Die 5 Hauptstücke wurden memorirt und erklärt, und der —4. Abschnitt des Katechismus durchgenommen. Bibelsprüche und Liedererse wurden auswendig gelernt. 2 St. Derselbe.

ehnen und geometrische Anschauungslehre. Die 4 Species in ganzen enannten Zahlen und in Brüchen, ferner die sogenannte Regula de tri. 3 St. Plaımetr. Formenlehre nach Hincke's Leitfaden 1. u. 2. Abschn. 1 St. Coll. Nitzsche.

chichte und Geographie. Elementargeographie und biographische Erählungen aus dem Alterthume. 3 St. Derselbe.

urbeschreibung. Zoologie nach Burmeister, vorzugsweise die wichtigsten heimischen Thiere. 2 St. Derselbe.

hnen. 2 St. Schreib- und Zeichenlehrer Deicke.

önschreiben. 3 St. Derselbe.

gen. 1 St. Musikdirector Sörgel.

2.

INHALTS-ANGABE

an das hiesige Gymnasium im Laufe des Schuljahres erlassenen höhern Verordnungen.

Unter dem 29. März genehmigte Ein Königl. Hochlöbl. Provinzial-Schul-Colgium den Lectionsplan für das Schuljahr $18\frac{44}{45}$.

Unter dem 30. März Seitens Eines Königl. Provinzial-Schul-Collegium
theilung eines Exemplars der Circular-Verfügung des Herrn Mini
der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheite
cellenz vom 7. Febr. 1844, das Turnwesen betreffend, zur Ken
nahme und Nachachtung der darin enthaltenen Bestimmungen, mit dem Au
bis zum 1. Oct. ausführlich über alles Wesentliche, was auf Grund der geg
Bestimmungen zur Förderung des öffentlichen Unterrichts in der Gymnastil
rend des Sommers geschehen sei, zu berichten. In der gedachten Hohen M
rial-Verfügung werden behufs der weiteren Ausführung der Allerhöchsten
vom 6. Jan. 1842, mittelst welcher Seine Majestät der König zu genehmig
ruht haben, dass die Leibes-Uebungen als ein nothwendiger und unentbehrlich
standtheil der männlichen Erziehung in den Königlichen Staaten förmlich an
werden sollen, die Gesichtspunkte näher bezeichnet, nach welchen den bere
handenen Turn-Anstalten eine allgemeinere Verbreitung und bestimmtere Ri
zu geben und überhaupt diese wichtige Angelegenheit fernerhin zu behandeln i
will der Berichterstatter, so weit es der beschränkte Raum dieser Blätter
einen Auszug der Verfügung hier folgen lassen: 1) Um der landesväterlich
sicht Seiner Majestät des Königs gemäss durch eine harmonische Ausbildung
stigen und körperlichen Kräfte dem Vaterlande tüchtige Söhne zu erziehen un
möglichst zu entfernen, was nach den bis jetzt gemachten Erfahrungen physisch
moralische Nachtheile bei der Behandlung des Turnwesens zur Folge haben
ist die Gymnastik auf den einfachen Zweck zu beschränken, dass der menschlic
per mit seinen Kräften durch eine angemessene, den verschiedenen Lebensaltern
den und Lebenszwecken der Jugend entsprechende Reihenfolge von wohlbere
Uebungen ausgebildet und befähigt werde, in jeglicher Beziehung des sittlichen
der Diener und Träger des ihm einwohnenden Geistes zu sein. 2) Aus diese
nur auf die Entwickelung und Stärkung der körperlichen Kräfte, sondern auch
stand, Ausdruck und gefällige Form der Bewegungen gerichteten und mit der
pflichtigkeit jedes Preussichen Unterthans innig verbundenen Zwecke der Gymnasti
dass, da die Ausbildung des Geistes und des zum Dienste desselben bestimmt
bes nach den eigenthümlichen Anlagen jedes einzelnen Menschen die Aufgabe j
Erziehung ist, die Gymnastik sich zwar der geistigen Ausbildung und dem diese
zweckenden Unterrichte überall unterzuordnen hat, gleichwohl aber in dem Syste
öffentlichen Unterrichts ein eben so nothwendiges, als nützliches Glied bildet. S
jetzt in demselben um so weniger fehlen, je mehr besonders in den höhern
der bürgerlichen Gesellschaft die Forderungen an die geistige Ausbildung gestie
grössere Anstrengungen zur Erfüllung dieser Forderungen unvermeidlich sind
dringender es daher ist, durch die Aufnahme der Gymnastik in den Kreis der
lichen Unterrichts-Gegenstände ein Gleichgewicht aufzustellen, welches die körp
Gesundheit erhalten und befördern und diese vor jeglicher, bei der erhöhten g
Anstrengung möglichen, Gefährdung schützen und schirmen könne. 3) Die Ein
der Gymnastik ist für jetzt nur auf die Jugend in den Städten zu beschränken u
vorläufig mit jedem Gymnasium, jeder höhern Stadtschule und jedem Schulleh
minar eine Turnanstalt verbunden werden, die nicht als etwas für sich Bestel
sondern als eine die Schule und ihr Geschäft ergänzende und fördernde Einr

trachten und zu behandeln ist. 4) Ueberall und hauptsächlich in den grössern
en ist darauf Bedacht zu nehmen, dass jedes Gymnasium und jede höhere Bür-
hule auch eine besondere, nur für die Jugend der betreffenden Schule bestimmte
Anstalt und somit jede der gedachten Unterrichts-Anstalten ihr gedecktes und ge-
ssenes Turnhaus für die Uebungen im Winter und bei sonst ungünstiger Witterung
hren eigenen Turnplatz im Freien erhalte. Wo solches nicht wohl ausführbar ist,
indessen auch ein und dieselbe Turnanstalt zugleich für ein Gymnasium und eine
e Bürgerschule und nöthigenfalls selbst für mehrere Schulen dieser Art zur ge-
chaftlichen Benutzung bestimmt und eingerichtet werden. 5) Die Theilnahme der
d an den Uebungen soll, wie bisher, von dem freien Ermessen der Eltern oder
Stellvertreter abhängig bleiben. Vergl. jedoch unten die Hohe Ministerial-Ver-
g vom 22. April, mitgetheilt durch Circular E. K. Prov. Schulcoll. vom 7. Mai. 6)
Annahme von Lehrern, welche blos zur Ertheilung des gymnastischen Unterrichts
igt und nur mittelst desselben ihren Lebensunterhalt zu gewinnen genöthigt sind,
öglichst zu vermeiden, vielmehr ist die unmittelbare Leitung der gymnastischen
ngen in der Regel einem ordentlichen Lehrer und zwar der obern Klassen zu
agen. Zu dem Ende ist von jetzt an bei der Wiederbesetzung erledigter Lehr-
n an Gymnasien, höhern Bürgerschulen und Schullehrer-Seminarien auch die Rück-
zu nehmen, dass für jede dieser Anstalten einige ordentliche Lehrer gewonnen
n, welche auch der Gymnastik kundig und im Stande sind, den Unterricht in
ben zu ertheilen. Den bereits angestellten Lehrern, welche zwar geneigt sind,
liesem Unterrichte zu widmen, aber hierzu noch nicht die nöthige Fertigkeit, Kennt-
nd Erfahrung besitzen, ist der Besuch der gymnastishen Anstalt des Universitäts-
lehrers Eiselen zu Berlin anzurathen. 7) Dem Director der Schule, mit welcher
Turnanstalt verbunden ist, liegt es ob, über die Leibesübungen die unmittelbare
ht zu führen, ihm sind die Lehrer der Gymnastik unterzuordnen und er ist
les, was dem Zwecke der Jugendbilduug im Allgemeinen und der Gymnastik im
dern widerstreitet, verantwortlich zu machen. 8) In der Regel werden die schul-
Nachmittage des Mittwochs und Sonnabends dem Unterrichte in der Gymnastik
ehalten sein, und ist dahin zu sehen, dass an den Nachmittagen, wo die Uebun-
tatt finden, der häusliche Fleiss für die Schule nicht in Anspruch genommen und
chülern nicht zugemuthet werde, insbesondere vom Mittwoch zum Donnerstage
re schriftliche Arbeiten zu Hause anzufertigen. 9) Der gymnastische Unterricht
erall in gehöriger Vollständigkeit, aber mit der durch den Zweck bedingten Ein-
it und mit Entfernung alles Entbehrlichen und blossen Schaugepränges, wie je-
eifen und unlebendigen Mechanismus zu ertheilen, und ist vor allen Dingen das
e Mass einer wohlberechneten Abwechselung zwischen der ernsten Strenge der
lichen Uebungen und der heitern Freiheit der gymnastischen Spiele innezuhalten.
den Maturitäts-Zeugnissen ist von jetzt an ausdrücklich zu bemerken, ob und
elchem Erfolge die zu Entlassenden den Unterricht in der Gymnastik benutzt ha-
11) Unter Bedingungen, welche das Königl. Prov. Schulcoll. mit der betreffenden
. Regierung zu berathen und näher festzustellen hat, kann ausnahmsweise auch
n jungen Leuten, welche ihren Unterricht und ihre Erziehung nur durch Privat-
und in Privatschulen erhalten, der Zutritt zu den öffentlichen Turn-Anstalten ge-
werden. 12) Von den aus der Einrichtung und Unterhaltung der Turn-Anstalten

erwachsenden Kosten. Die Beiträge der die Turn-Anstalt besuchenden Schü
mit Rücksicht auf die örtlichen Verhältnisse festzustellen und, wie das gew
Schulgeld, an die betreffende Schulkasse zu entrichten; in keinem Fall ist
rern der Gymnastik die Einziehung jener Beiträge zuzumuthen; eben so bezieh
Lehrer ihre Besoldung nur aus der betreffenden Schulkasse.

Unter dem 2. April machte Ein Königl. Prov. Schul-Colleg. die Köni
fungs-Commissionen seines Bezirks mit einer Bestimmung Sr. Excellenz de
Staats-Ministers Eichhorn bekannt, in Folge deren zur Anfertigung der m
tischen Maturitäts-Prüfungs-Arbeiten nur vier Stunden bewilligt werden,
bereits in dem Abiturienten-Prüfungs-Reglement §. 17. nur 4 Stunden fes
sind, von welcher Bestimmung aber hier und da abgewichen worden ist, in
für die mathematischen Arbeiten eben so viel Stunden, als für die deutsc
lateinischen, nämlich 5, gewährt hat.

Unter dem 7. Mai Seitens Hochdesselben abschriftliche Mittheilung ei
scripts des Herrn Ministers der geistlichen etc. Angelegenheiten Excelle
22. April, nach welchem bei der Bestimmung unter Nr. 5 der die Turnang
heiten betreffenden Circular-Verfügung vom 7. Febr. (S. oben) nicht die
obgewaltet hat, dass erst eine positive Erklärung von Seiten der Elte
ihrer Stellvertreter darüber abgewartet werden soll, ob sie die Theilnahm
Söhne oder Pflegebefohlenen an den gymnastischen Uebungen wollen; denn
folge der Allerhöchsten Ordre vom 6. Juni 1842 die Leibesübungen als e
wendiger und unentbehrlicher Bestandtheil der männlichen Erziehung in den
Staaten förmlich anerkannt werden sollen: so folge hieraus, dass auch di
nahme an diesen Uebungen von allen Schülern als Regel vorauszusetz
nur auf die motivirte Erklärung der Eltern oder ihrer Stellvertreter, dass
Theilnahme ihrer Angehörigen nicht wollen, eine desfallsige Dispensation u
in ähnlicher Art zu ertheilen sei, wie dies bei einzelnen andern Unterricht
ständen, namentlich auch bei einem integrirenden Theile des Gymnasialunt
dem Griechischen, geschehe; obwohl mit Grund zu erwarten sei, dass die
von deren freiem Ermessen die Theilnahme ihrer Angehörigen an den Leib
gen der Allerhöchsten Bestimmung gemäss abhängig bleiben solle, in richtig
digung des wohlthätigen Einflusses der gymnastischen Uebungen ihre Ang
an denselben bereitwillig werden Theil nehmen lassen und nicht ohne di
Motive eine desfallsige Dispensation für ihre Angehörigen nachsuchen wer
scheine es Sr. Excellenz dennoch räthlich, auf die noch obwaltenden Vo
mancher Eltern gegen das Turnen eine schonende Rücksicht zu nehmen u
in den hoffentlich seltenen Fällen, wo ohne vollgenügende Motive die Disp
von der Theilnahme an den Leibesübungen nachgesucht werde, einem solch
langen zu willfahren. Zuletzt genehmigen Se. Excellenz, dass bei allen A
wo der Aufwand für die Einrichtung und Unterhaltung der Turnplätze, so
die Besoldung der Lehrer der Gymnastik weder aus den Fonds der betr
Schule, noch aus Zuschüssen der betreffenden städtischen Gemeinde gedec
den kann, von allen Schülern mit Ausnahme der Freischüler, ein mässige
den jedesmaligen Ortsverhältnissen zu bestimmender Zusatz zu dem bis
Schulgelde, welcher aber bei keiner Schule mehr als Einen Thaler jährlich
gen dürfe, durch die Schulkasse erhoben werde.

Unter dem 22. Mai Seitens Eines Königl. Consistoriums und Prov.-Schul-giums im Auftrage des Herrn Staatsministers Eichhorn Excellenz Zufertigung r Exemplare von dem unter dem 9. August vor. J. von der Generalver-lung deutscher Vereine gegen das Branntweintrinken erlassenen und die Theil-e für die Enthaltsamkeitssache bezweckenden Aufrufe an den deutschen Lehrstand.

nter dem 29. Mai benachrichtigte Ein Königl. Prov.-Schul-Coll. die Gymna-:ectoren, dass Sr. Majestät der König mittelst Allerhöchster Cabinets-Ordre 19. April zu bestimmen geruht haben, dass auf den Universitäten, mit Aus-e der Universität zu Königsberg, ingleichen auf der Academie zu Münster Herbstferien zwei Monate, vom 15. Aug. bis zum 14. Oct., die Osterferien :en nur 3 Wochen und zwar, wenn Ostern in den Monat März fällt, vom age Palmarum bis zum Sonntage Misericord. Dom. und wenn Ostern in den : April fällt, vom Sonntage Judica bis zum Sonntage Quasimodog. dauern , und forderte in Folge dessen Hochdasselbe die Directoren auf, den Schluss Winter- und Sommer-Cursus so einzurichten, dass die zur Universität ab-den Schüler einige Zeit vor dem gesetzlichen Anfange der Vorlesungen an betreffenden Universitäts-Orte sich einfinden können.

Unter dem 23. Juli setzte Hochdasselbe den Director in Folge einer Mit-ig der Königl. Regierung zu Erfurt davon in Kenntniss, dass die Zurückerstat-ler Wittwenkassen-Beträge an die betreffenden Lehrer der im Bereiche der ge-n Königl. Regierung befindlichen Gymnasien in Zukunft nur dann erfolgen , wenn von dem Director des betreffenden Instituts unter der Quittung des ciaten ausdrücklich bescheinigt sei, dass derselbe oder dessen Ehefrau kein igen oder doch nicht so viel Vermögen besitze, dass dessen Einkünfte mit echnung seiner Besoldung von .... Rth. .. Sgr. .. ₰ den Betrag von jähr-00 Rth. erreichen.

Unter dem 16. August remittirte Hochdasselbe die Abiturienten-Prüfungs-ndlungen von Ostern 1844.

Unter dem 4. Sept. benachrichtigte Ein Wohllöblicher Magistrat den Director, Ein Königl. Prov.-Schul-Coll. die Anstellung des Zeichen- und Schreib-s Deicke auf Kündigung genehmigt habe.

Unter dem 17. Oct. Seitens Hochdesselben Mittheilung eines Druckexemplars llerhöchsten Cabinetsordre vom 5. Juli 1844 und der dazu gehörigen allge-n Bestimmungen hinsichtlich der Belassung und Einziehung resp. Wieder-rung des Gnadengehalts der im Civildienste angestellten oder beschäftigten r-Invaliden zur Nachricht und Beachtung, auch resp. weitern Mittheilung Instituts-Beamten.

Unter dem 1. Nov. Seitens Hochdesselben abschriftliche Mittheilung eines pts des Herrn Geheimen Staats-Ministers Eichhorn Excellenz vom 25. Oct., lehrung der Abiturienten über die zweckmässige Einrichtung und Anordnung academischen Studien betreffend, zur Nachricht mit der Aufforderung, 3 Wochen anzuzeigen, ob und in welcher Weise den Schülern vor ihrem ge zur Universität die fragliche Belehrung bisher ertheilt worden ist.

Unter dem 6. Nov. bemerkte Hochdasselbe in einem Circulare an die Gym-Directoren seines Bezirks, dass es zu seiner Kenntniss gekommen sei,

dass hin und wieder die Turner durch Trommelschlag versammelt werd öffentliche Aufzüge halten; da solches der ausdrücklichen, im Ministerial vom 7. Febr. c. enthaltenen Bestimmung, nach welcher der gymnastische richt mit der durch den Zweck bestimmten Einfachheit und mit Entfernu Entbehrlichen und blossen Schaugepränges ertheilt werden solle, zuwiderla der guten Sache leicht zum Nachtheil gereichen könne, so finde sich H selbe veranlasst, die Directoren aufzufordern, mit Ernst und Nachdruck zu halten, dass bei den Turnübungen jegliche Ostentation möglichst ve und der einfache Zweck derselben nach Massgabe des erwähnten Minis scripts Nr. 1. stets im Auge behalten werde.

Unter dem 26. Nov. benachrichtigte Hochdasselbe die Directoren de nasien seines Bezirks, dass der Herr Minister der geistlichen, Unterricht Medicinal-Angelegenheiten mittelst Rescripts vom 14. Nov. bestimmt hab das nach der Verfügung vom 11. Febr. 1832 von den Directoren den Sch candidaten über ihr Probejahr auszustellende Zeugniss von jenen allein stellen und von der Mitunterschrift der Klassen-Ordinarien abzusehen, der von den Directoren über die Lehrgeschicklichkeit, praktische Brauchbark moralische Führung der Candidaten zu erstattende Bericht den Klassen-Ord unter deren nächster Leitung die Candidaten ihr Probejahr abgehalten hab Mitunterschrift vorzulegen sei, wodurch die Ordinarien nur zu einer sorgfä Aufsicht über die Candidaten veranlasst werden könnten.

Unter dem 14. Dec. forderte Hochdasselbe die Direction auf anzu ob die Gymnasial-Bibliothek oder resp. die städtische Bibliothek sich be Besitze der 6 bis jetzt erschienenen Bände der Monumenta Germaniae von Pertz befinde.

Unter dem 24. Dec. genehmigte Hochdasselbe den Druck der Abh für das gegenwärtige Osterprogramm.

Unter dem 11. Jan. machte Hochdasselbe den Director auf die v Geheimen Regierungsrath Lepsius in Naumburg beabsichtigte Herausgab Geschichte der Bischöfe des Hochstifts Naumburg vor der Reformation aufm unter Beifügung eines Exemplars der gedruckten Ankündigung und Pro empfahl das Werk zur Anschaffung für die Gymnasial-Bibliothek.

Unter dem 17. Jan. benachrichtigte Ein Wohllöblicher Magistrat den dass die Ernennung des Dr. Haacke zum Collaborator und Ordinarius von mittelst Rescripts des Königl. Hohen Ministeriums vom 20. Dec. 1844 ge und dessen Bestallung zur Bestätigung an das Königl. Hochlöbliche Pro Schul-Collegium eingereicht sei.

Unter dem 21. Januar machte Hochdasselbe in einem Circulare an di nasial-Directoren der Provinz auf Veranlassung des Königl. Ministeriu geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten auf den Hofmec Wagner zu Berlin, der im Auftrage des gedachten Ministeriums mehrfach matische und physikalische Instrumente, insbesondere für Gymnasien und Bürgerschulen, gegen billige Preise geliefert, für den Fall aufmerksam, da artige Instrumente für die Gymnasien gewünscht werden sollten.

Unter dem 22. Jan. machte Hochdasselbe in einem Circulare auf Veranlassung Herrn Geheimen Staats-Ministers Eichhorn Excellenz auf die von dem Ver- der Alterthumsfreunde im Rheinlande herausgegebenen Jahrbücher aufmerksam empfahl deren Anschaffung für die Gymnasial-Bibliothek.

Unter dem 17. Februar genehmigte Hochdasselbe den Lectionsplan für das ıljahr $18\frac{45}{46}$.

B.

Schulchronik.

1. Das neue Schuljahr begann den 15. April.

2. Das erst zu Ostern 1843 nach dem schnell auf einander erfolgten Ab- ge mehrerer seiner Mitglieder wieder vollzählig gewordene Lehrercollegium im Laufe dieses Jahres ein neuer empfindlicher Verlust. Im Monat November lich folgte der bisherige Oberlehrer und Ordinarius von Tertia, Herr Dr. Friedrich dinand Röder, einem ehrenvollen Rufe als Director an das Gymnasium in stettin. Derselbe hat sich in einem Zeitraume von 14 Jahren durch seine ezeichneten Kenntnisse und Lehrgaben bleibende Verdienste um die Anstalt dadurch gerechte Ansprüche auf den Dank der letztern erworben. Möge ihm zur Verwaltung des neuen Amtes Kraft und Gesundheit verleihen und seine ühungen für einen der edelsten Zwecke, für Bildung und Erziehung der Jugend, dem schönsten Erfolge begleitet sein lassen! Dann wird ihm auch die neue aath bald zur alten werden und für die geliebte Vaterstadt, von der er sich Schmerzen trennte, reichen Ersatz bieten. Kurz vor seiner Abreise drückten die Schüler ihre Theilnahme und Anhänglichkeit durch eine Abendmusik aus. Wiederbesetzung seiner Stelle erfolgte in der Art, dass der bisherige Ordi- ıs von Quarta, Herr Oberlehrer Dr. Theiss, unmittelbar nach dem Abgange Herrn Dr. Röder, in das von diesem bekleidete Ordinariat von Tertia auf- te, an die Stelle jenes aber in Quarta einstweilen der Schulamtscandidat, Dr. Wettin, trat, dessen Probejahr (s. vorj. Programm S. 28) im Laufe Jahres zu Ende gegangen war. Das Interimisticum in Quarta hörte bereits Weihnachten auf, und trat mit dem neuen Jahre Herr Dr. Hermann August cke, aus Nordhausen, der von dem Wohllöblichen Magistrate, als dem Patrone Gymnasiums, in Folge des Abgangs des Herrn Dr. Röder zum Collaborator Ordinarius von Quarta gewählt worden war, seine Functionen an. Derselbe lt seine gelehrte Vorbildung auf dem hiesigen Gymnasium, welches er zu rn 1838 verliess, studirte in Halle Theologie und Philologie, erwarb sich bei philosophischen Facultät daselbst durch öffentliche Disputation über die Ab- lung: De elocutione Apollonii Rhodii den Doctorgrad, ward dann, im Monat luar 1842, Mitglied des Seminars für gelehrte Schulen und als solches zu- h Hülfslehrer an dem Gymnasium zu Stettin, von wo er zu Michael 1844 ner Adjunctur am Pädagogium in Puttbus befördert wurde, aus der er aber be- zu Weihnachten wieder schied, um die ihm am Gymnasium seiner Vater- conferirte Lehrstelle mit dem neuen Jahre antreten zu können. Die von

dem Wohllöblichen Magistrate getroffene Wahl, von der sich die Anstalt b
anerkannten Gelehrsamkeit und Gewissenhaftigkeit des Herrn Dr. Haack
das Beste versprechen darf, erhielt die Bestätigung Sr. Excellenz des
Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten unte
20. December.

3. Sonstige Ereignisse. Den 19. März fand die mündliche P
zweier Abiturienten Statt, denen das Zeugniss der Reife ertheilt wurde. —
1. und 2. April öffentliches Examen, den 3. ejusd. Austheilung de
suren und Translocation, dann Redeactus und Entlassung der Abitu
ten. Die von dem Berichterstatter bei dieser Gelegenheit gehaltene Schluss
Entlassungsrede hat derselbe auf Verlangen in Druck gegeben. — Mit
des Sommersemesters (den 15. April) nahmen die gymnastischen Uebu
unter der Leitung des Turn- und Tanzlehrers, Herrn Stephany, ihren A
Sie fanden wie in frühern Jahren wöchentlich zwei Mal, Montags und Donne
nach den Nachmittagsstunden Statt und hatten bis zum Schlusse des Sem
einen ungehinderten Fortgang. Von 153 Schülern hatten sich 111 durch
schrift ihres Namens zur Theilnahme verpflichtet. In den Fällen, wo Elte
Söhne von den Uebungen dispensirt zu sehen wünschen, wird man sich
genau an die Bestimmungen der Hohen Ministerialverfügung vom 22. April
(s. oben S. 30). Die Lehrer führten auch in diesem Jahre der Reihe na
dem Turnplatze die Aufsicht. Dem Mangel eines Obdachs, wo die Turn
Kleidungsstücke, namentlich Kopfbedeckungen, sicher ablegen können und
dem inspicirenden Lehrer bei plötzlich eintretendem Unwetter Schutz finde
hoffentlich im nächsten Sommer abgeholfen werden. — Bald nach Begi
Sommersemesters Vorlesung der Schulgesetze, der behufs der S
aufsicht gemachten Sectionen derjenigen Schüler, deren Eltern nicht i
wohnen, und der Hauptnummern der Oster-Censuren. — Erste h. A
mahlsfeier, auf welche den Tag vorher Herr Oberlehrer Dr. Rothmaler
üblichen Weise vorbereitet hatte. — Den 20. Aug. beehrte der neue Obe
sident der Provinz Sachsen und Ritter hoher Orden, Her
Wedell, auf der Durchreise zum ersten Male unsre Stadt mit seiner Gege
nahm nach dem Schlusse der Nachmittagsstunden das Local des Gymn
in Augenschein und richtete in seinem Absteige-Quartier, wohin er den D
beschieden hatte, an denselben verschiedene die Lehranstalt betreffende Fra
Den 17. Sept. zweite mündliche Maturitätsprüfung der Abiturient
Entlassung derselben zur Universität den 27. ejusd. (vorher Austheilu
Censuren und Translocation). Der Berichterstatter nahm von der kurz vor
Königsberg Statt gefundenen Jubelfeier der ehrwürdigen Albertina Geleg
in seiner Schluss- und Entlassungsrede von der Achtung vor den Wissens
zu sprechen, indem er zeigte 1) woraus sie entspringe; 2) wie sie sich ä
und 3) wodurch sie befördert werde. — Den 15. Oct. fand früh um 8 U
Kreise der Schüler und Lehrer die Feier des Geburtstags Sr. Maj
des Königs Statt. Die Feierlichkeit begann mit folgendem Liede, welch
Oberlehrer Dr. Rothmaler zu diesem Zwecke gedichtet hatte.

.: „Dir, dir, o Höchster, will ich singen!“
Allgütiger, zu dir erheben
Vir uns mit dankerfüllter Brust.
ür unsres Königs theures Leben
obsingen wir mit heil'ger Lust.
ir tönet froher Lobgesang
om Aufgang bis zum Niedergang.

Du hast dem Fürsten, Deinem Knechte,
eschirmet sein hochheil'ges Haupt,
ass nicht des Frevlers böse Rechte
em Volke seinen Hort geraubt.
u schütztest es so wunderbar;
ir bringen frohen Dank dir dar.

Wie gross ist deine Vaterliebe,
ie reich ist Deine Vaterhuld!
Gott, des Herzens fromme Triebe
trichten laut des Dankes Schuld!
u warst ein Retter in Gefahr;
ch preisen wir nun immerdar.

O schaue gnädig auf ihn nieder,
n du uns zweifach heut geschenkt!
Gieb, dass er christlich heute wieder
Beseligt deiner Huld gedenkt,
Dass ihm der heut'ge Ehrentag
Des Lebens Glück verdoppeln mag.

O sei du auf des Lebens Wegen
Ihm Schutz und Schirm an jedem Ort,
Und träufl' auf ihn den besten Segen!
Erhalt' ihn rüstig fort und fort.
Gieb ihm der Weisheit Sonnenlicht,
Entzieh' ihm deinen Frieden nicht.

Bewahr' ihm seiner Völker Herzen,
Dass sie ihn lieben treu und gut.
Erhöh' ihm Freuden, lindr' ihm Schmerzen,
Und stähle seinen Herrschermuth.
Ja hilf, dass ihm das Vaterland
In Liebe bleibe zugewandt.

So strahle Licht um seine Krone,
Und glänze Recht im Königshaus;
Und Segen ströme von dem Throne
In alle Lande reichlich aus!
Gott, mehre du dem Königspaar'
Glück, Heil und Ruhm von Jahr zu Jahr!

ndem man die 4 ersten Verse gesungen hatte, hielt der Berichterstatter Festrede, in der er von dem entsetzlichen Ereignisse am 26. Juli (dem auf Leben des theuern Königspaares gemachten frevelhaften Angriffe) Gelegenheit h, davon zu sprechen, dass uns dieses Ereigniss vornehmlich zweierlei lehre, ich: 1) Wie tief der Mensch sinken könne, wenn er Gott aus dem Herzen re und ein Sclave seiner Leidenschaften nicht mehr auf die Stimme der Re-, der Vernunft und des Gewissens höre; und 2) wie Gott die Anschläge Bösen zu nichte mache und seinen Getreuen auch da noch helfe, wo keine und Rettung möglich zu sein scheine. Zum Beschluss der Feier sang man rei letzten Verse des obigen Liedes. — Den 6. Nov. die 2. heilige Abend-lsfeier, auf welche der Berichterstatter den Tag vorher die Schüler vorbe-te, indem er zeigte, was wir vor der h. Abendmahlsfeier an uns zu prüfen haben: ich 1) unsern Glauben an Christum; 2) unser Vertrauen zu Gott und 3) unsre zu den Nebenmenschen. — Der Geburtstag Luthers fiel in diesem Jahre auf Sonntag, und fand desshalb die sonst übliche Feier desselben im Gymnasium Statt. — Den 14. Nov. fand, wie im Sommer, die Vorlesung der Schul-tze u. s. w. Statt, nachdem Herr Oberlehrer Dr. Röder Worte des Ab-ls an die versammelten Schüler gerichtet hatte. — Bei der am Schlusse Jahres, vor Anfang der Weihnachtsferien, den 21. Dec. Statt gefundenen ichkeit sprach ich über die Worte: vita brevis, ars longa, und ermahnte na-ich die Schüler, da die Schulzeit und überhaupt das Leben kurz sei, das

letztere nicht noch mehr zu verkürzen, im Gegentheil zu verlängern, inde
zeigte, wie beides geschehe. Choralgesang machte den Beschluss.

C.

Statistische Uebersicht.

1. Eine Uebersicht der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums w
des Schuljahres $18\frac{44}{45}$ enthält die beigefügte Tabelle.

2) Zur Universität gingen nach bestandener Maturitätsprüfung aus Prim

a) zu Ostern:

1) Ludwig Ernst Heinrich Alexander Schultze, aus Halle, 18
alt, 3 Jahre in Prima, studirt in Bonn Jurisprudenz.

2) Karl Friedrich August Brachmann, aus Nordhausen, 18 Jahr
nate alt, in Prima $2\frac{1}{4}$ Jahr, studirt in Halle Theologie.

b) zu Michael:

3) Karl Rudolph Stamm, aus Stöckey, $19\frac{1}{4}$ Jahr alt, in Prima $2\frac{1}{2}$
studirt in Halle Theologie.

4) Bonifacius Bernhard Kleekamm, aus Ellrich, $19\frac{3}{4}$ Jahr alt, in
$2\frac{1}{2}$ Jahr, studirt in Berlin Medicin.

5) Karl Günther Friedrich Wilhelm Wagner, aus Nordhause
Jahr alt, in Prima 3 Jahre, studirt in Halle Theologie, (war im Juni 1843 aus
abgegangen und nahm Michael 1844 an der Maturitätsprüfung Theil, nachd
sich privatim auf dieselbe vorbereitet hatte).

Ausser ihnen gingen ab: Karl Ernst Mirus, aus Frankenhausen, u
einer inländischen Schule seine Studien fortzusetzen, Karl August Hof
ster, aus Boppard, um zunächst seiner Militärpflicht zu genügen, Ludwig
gismund Girschner, aus Wolkramshausen, um sich dem Bau- oder Ber
zu widmen, Karl August Winssel, aus Lauterberg, um auf einer inländ
Schule seine Studien fortzusetzen. Gustav Ernst Kienitz, aus Telgte in
phalen, um zunächst seiner Militärpflicht zu genügen und dann zum Steuerfache ü
gehen, Karl Wilhelm Lauenstein, aus Wallrode, um Büreaugehülfe zu w

Ferner gingen theils zu andern Schulen, theils zu andern Berufsarten

aus Obersecunda:

Friedrich Johann Heinrich Springinsguth, aus Nordhausen (unmittelba
seiner Versetzung in die Klasse), Karl Wilhelm Wagner aus Wickerode, A
Ludwig Eduard Leopold, aus Steigerthal.

aus Untersecunda:

Gottfried Teichmann aus Sachswerfen (unmittelbar nach seiner Verse
in die Klasse), Karl Gustav Linsel, aus Gratzungen, Georg Heinrich He
Hesse, ans Wülfingerode (als er eben zu Michaelis nach Obersecunda versetz
den war), Ernst Hermann Grote, aus Nordhausen, Karl Friedrich Krüger aus Are

aus Tertia:

Hermann Ludwig Wilhelm Gebhard und Julius Köpke, beide aus Nordhaus
unmittelbar nach ihrer Versetzung aus Quarta nach Tertia abgegangen, J

ich Eduard Weise, aus Wofleben, Bruno Gründler, aus Nordhausen, Justin Friedrich Wilhelm Bode, aus Langensalza, Bernhard Krause, aus Walkenried, Kämmerer, aus Nordhausen.

aus Quarta:

Karl August Kämmerer, aus Nordhausen, Christian Gottlob Hellwig, aus n, Rudolph Wenzel, aus Nordhausen, Karl Hugo Edmund Schramke, aus n, Louis Friedrich Dreyling, aus Herreden, Konrad Krause, aus Walkenried, ich Ottomar Buhtz, aus Nordhausen, Gustav Adolph Schulze, aus Liebenrode, lm Kolditz und Hermann Hildebrand, beide aus Nordhausen und unmittelbar der Versetzung aus Quinta nach Quarta abgegangen.

aus Quinta:

Sylvan Steinert, aus Berlin, Emil Julius Gustav Schramke, aus Guben, Adolph von Minnigerode, aus Bockelnhagen, Alphons Krebs, aus Lübeck.

D.

Stand des Lehrapparats.

Die Bibliothek suchte man auch in diesem Jahre hauptsächlich durch f von Büchern in Auctionen zu vermehren. Ausserdem wurden die Fort- gen der schon in frühern Programmen genannten Werke und einige andere Schriften angesehafft, z. E. Leake's Topographie Athen's übersetzt von Bai- d Sauppe, O. Müller's Geschichten hellenischer Städte und Stämme, neue be, Museum des Rheinisch-Wesphäl. Schulmänner-Vereins, Preussen oder ichte seines Volks und seiner Fürsten von Tetzner, Systematisches Verzeich- er in den Programmen der Pr. Gymn. u. Progymn. (v. 1825—41) enthaltenen Ab- ngen, Reden und Gedichte: Münster 1844, Handb. der Provinz Sachsen u. a. Behuf des geographischen Unterrichts liess man die bei Kortmann in Berlin er- enen grossen Wandkarten von Deutschland und von der östlichen und west- Halbkugel auf Leinwand ziehen und mit Stäben versehen, was 10 *Rt.* 15 *Sgr.* e. — An Geschenken empfing die Bibliothek 1) von Einem Königl. n Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal- legenheiten a) die 7. Lieferung des von Spruner'schen historisch-geo- schen Atlasses, b) den 32. Bd. des encyclopädischen Wörterbuchs der me- chen Wissenschaften, c) Fr. A. Wolf's Leben und Studien von Körte, 2 Bde., icker's Analytisch-geometrische Entwickelungen 2 Bde., e) Klöden's diplo- he Geschichte des Markgrafen Waldemar von Brandenburg, 2 Thle. 2) von n Königl. Hochlöbl. Provinzial-Schul-Collegium Meiring's Samm- ateinischer Wörter in etymologischer Ordnung. Ausserdem gingen ihr zu rogramme der inländischen und der dem Programmen-Tausche beigetre- ausländischen Gymnasien, desgleichen die Verzeichnisse der Vorle- n und andere academische Schriften der inländischen Universitäten. Ferner ten ihr: 1) die H. Schultze'sche Buchhandlung in Berlin a) Beauvais sische Sprachlehre und b) Dr. Adolf Müller's Klio: eine Sammlung histori- Gedichte; 2) die Vieweg'sche Buchhandlung in Braunschweig Madvig's prachlehre für Schulen nebst den dazu gehörenden Bemerkungen; 3) die

Bädeker'sche Buchhandlung in Coblenz ein Exemplar des lat. Memorirbu
Dr. Steiner; 4) die Förstemann'sche Buchhandlung in Nordhausen Ott
riss einer kirchlichen Kunst-Archäologie des Mittelalters; 5) die Schmi
Buchhandlung ebendas. zwei Jahrgänge (1842 u. 43) von Jahn's Jahrbb. fü
logie und Pädagogik. Auch sendete der Besitzer derselben, Herr Medi
Dr. Sachs, der Direction ein Exemplar des Verlagskatalogs der Schmi
Buchhandlung zu beliebiger Auswahl derjenigen Artikel, die das Gymnas
ihm als Geschenk annehmen wollte. 6) Der Primaner Kleekamm bei
Abgange a) Matthiä's ausführliche griechische Grammatik. Leipzig 1807;
biger's Aufgaben zur Bildung des lat. Styls; c) Herling's Grundregeln de
schen Styls; 7) Herr Director Dr. Röder Rollin de la maniere d'ense
d'étudier les belles lettres etc. 4 Bde. 8) Der Primaner Lauenstein
nem Abgange Donndorf's Geschichte der Erfindungen, 6 Bde. Quedlinburg 18
Bei den geringen Fonds der Bibliothek und den gleichwohl mit jeder Buchl
Messe zunehmenden Ansprüchen an dieselbe muss der Anstalt jede Berei
ihrer literarischen Hülfsmittel, die ihr durch wohlwollende Gönner, besonde
abgehende Schüler zu Theil wird, willkommen sein, und können sich alle
gen, die durch Bücherspenden zum Wachsthum unserer Schulbibliothek be
unsres aufrichtigsten Dankes versichert halten. — Die Erhaltung des phy
schen Apparats, der im vorigen Jahre durch die Gnade Sr. Excellenz de
Cultus-Ministers einen wesentlichen Zuwachs erhielt (s. vorj. Progr. S. 31),
der Lehrer der Mathemathik und Physik, Herr Dr. Kramer, angelegen sein

E.

Beneficien.

Gern entledigt sich der Berichterstatter auch in diesem Jahre der
im Namen der Anstalt allen den edlen Familien zu danken, die durch Er
von Freitischen oder sonstige Unterstützungen sich um arme und würdige
ler verdient gemacht haben. Die am Conrads-Tage übliche Vertheilung des
mann'schen Legats besorgte im Auftrage des erkrankten Herrn Superindenten
mann der Unterzeichnete; auch vergab letzterer das Obbarius'sche Stipend
den in wissenschaftlicher und sittlicher Hinsicht ausgezeichnetsten Schü
ersten Klasse. Einigen Choristen erliess der Patron des Gymnasiums, Ein W
licher Magistrat, auch in diesem Jahre das Schulgeld.

F.

Ankündigung der öffentlichen Prüfung.

Die öffentliche Prüfung sämmtlicher Klassen ist auf den 17. und 18
anberaumt und wird in folgender Ordnung gehalten werden:

Montags, den 17. März, Vormittags von 8—12 Uhr.

Prima und Obersecunda.

8 — 9 Gesang und Gebet, dann deutsche Sprache mit Prima, Oberl. Dr. Rot
9 — ¾10 Mathematik mit Prima, Collaborator Dr. Kramer.
¾10 — 10 Pause.
10 — 11 Lateinisch (Horaz) mit Prima, Director Schirlitz.

– ½12 Griechisch (Homer's Ilias) mit Obersecunda. Derselbe.
— 12 Französisch mit Obersecunda, Oberlehrer Dr. Rothmaler.

Nachmittags von 2—5 Uhr.

Obersecunda u. Untersecunda.

3 Lateinisch (Cicero) mit Obersecunda, Professor Förstemann.
¾4 Griechisch (Xenophon) mit Untersecunda, Oberlehrer Dr. Theiss.
– ½5 Geschichte mit Untersecunda, Collaborator Nistzsche.
– 5 Mathematik mit Untersecunda, Collaborator Dr. Kramer.

Dienstags, den 18. März, Vormittags von 8—11 Uhr.

Tertia bis Quinta.

½9 Gesang und Gebet, dann Religion mit Tertia, Oberlehrer Dr. Theiss.
– 9 Griechisch mit Tertia, Collaborator Dr. Haacke.
½10 Lateinisch mit Quarta, Collaborator Dr. Haacke.
— 10 Geometrische Formenlehre mit Quarta, Hülfslehrer Weissenborn.
– ½11 Lateinisch mit Quinta, Derselbe.
— 11 Naturbeschreibung mit Quinta, Collaborator Nitzsche.

G.
Redeactus.

An die öffentliche Prüfung wird Mittwochs, den 19. März, früh von 9 Uhr an
Redeactus sich anschliessen, bei welchem folgende Primaner mit Reden und
Arten, die sie selbst verfasst haben, in folgender Ordnung auftreten werden:
Wilhelm Schröder, aus Bleicherode, wird in lateinischer Sprache eine
Rede auf Athen halten.
Robert Stamm, aus Hainrode, wird in einer deutschen Rede die Freund-
schaft als die Sonne des Lebens darstellen.
Ottomar Förster, aus Artern, wird in einem deutschen Gedichte die
Bergung eines Schiffbruchs versuchen.
Hermann Petermann, aus Bleicherode, wird in lateinischer Sprache
die Hauptursachen der Weltherrschaft der Römer zu entwickeln suchen.
Rudolph Nebelung, aus Hesserode, (Abiturient), wird in einer deutschen
Rede von dem Angenehmen sprechen, welches das Studium der Sprachen hat,
und wird sich bei der Schule verabschieden. Den Abschied des Scheidenden wird
Friedrich Burkhart, aus Gerbstädt, in deutschen Versen erwiedern.
Die Schlussworte des Directors.

Zu dieser Schulfeierlichkeit, so wie zu der vorhergehenden öffentlichen Prü-
fung werden die hochverehrten Beschützer und Gönner der hiesigen Schulen, die
Herrn Eltern unserer Zöglinge und alle Freunde des Schulwesens ehrerbietigst
eingeladen.

Endlich wird hierdurch bekannt gemacht, dass die Prüfung der neu eintre-
tenden Schüler den 28. und 29. März Vormittags von 8 Uhr an Statt finden wird.
Der Anfang des neuen Lehrcursus ist Montags den 31. März.

Nordhausen, *den* **1.** *März* **1845.**

Dr. K. A. Schirlitz,
Director.

ÜBERSICHT

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums zu Nor

im Schuljahre von Ostern 1844 bis dahin 1845.

1. Lehrer-Collegium	2. Allgemeiner Lehrplan: Fächer	Klassen und Stunden: I	IIa	IIb	III	IV	V	Summa	3. Verhältnisse: Schüler: In	wären	wurden aufgen.	wurden entlass.	sind jetzt	Abiturier: Es sind entlassen		studiren wo?	
Dir. Dr. Schirlitz.	Lateinisch	8	10	10	10	10	10	58	I	17	4	10	11	mit dem Zeugnisse der Reife	5	in Halle	3
Professor Dr. Förstemann.	Griech.	6	6	6	6	—	—	24	IIa	12	8	7	13			in Bonn	1
	Deutsch	2	2	2	2	4	4	16	IIb	16	10	13	13			in Berlin	1
Oberl. Dr. Rothmaler.	Hebräisch	2	2	—	—	—	—	4	III	20	28	17	31				
	Französ.	2	2	2	—	—	—	6	IV	46	28	34	40				
— Dr. Theiss.	Religion	2	2	2	2	2	2	12	V	33	23	22	34				
Coll. Dr. Kramer.	Philosoph.	2	—	—	—	—	—	2						Sa.	5	Sa.	5
	Mathemat.	4	4	3	3	—	—	14									
Coll. Nitzsche.	Physik	2	1	—	—	—	—	3									
	Naturb.	—	—	2	2	2	2	8	Sa.	144	101	103	142				
Coll. Dr. Haacke.	Gesch. u Geograph.	2	3	3	2	3	3	16									
Hülfslehrer Weissenborn.	Rechn. u Formenl.	—	—	—	—	4	4	8									
	Zeichnen.	—	—	—	2	2	2	6									
Musikdir. Sörgel.	Schönsch.	—	—	—	1	3	3	7									
Schreib- und Zeichenl. Deicke.	Singen	—	—	1	1	1	1	4									
Turnl. Stephany	Summa	32	32	31	31	31	31	188									

Überreicht vom Verfasser.

SITZUNGSBERICHTE 1885.
XXXVIII.

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

Sitzung der physikalisch-mathematischen Classe vom 30. Juli.

Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel.

Von L. KRONECKER.

Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 16. Juli [s. oben S. 689].)

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ eindeutige Functionen der reellen Variabeln x nd $f^{(h)}(x)$, $g^{(h)}(x)$ ihre $h$ten Ableitungen bedeuten, so ist:

$$f^{(h)}(x)\,g^{(n-h)}(-x) - f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h+1)}(-x) = \frac{d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right)}{dx}.$$

immt man hierin $h = 1, 2, \ldots n$ und summirt, so resultirt die ifferentialformel:

$$(\mathfrak{D}) \quad f^{(n)}(x)\,g(-x) - f(x)\,g^{(n)}(-x) = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right)}{dx},$$

nd also auch die Integralformel:

$$(\mathfrak{J}) \quad \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx = \sum_{h=1}^{h=n} \int_{x_0}^{x} d\left(f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)\right),$$

urch welche die verschiedenen Anwendungen der partiellen Integration chematisirt werden.

I. Die Formel $(\mathfrak{J})$ geht unmittelbar in die Taylor'sche über, wenn an die Integrationsvariable z an Stelle von x nimmt und dann:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz, \quad g(z) = \frac{(x+z)^n}{n!}$$

tzt. Denn das erste Integral auf der linken Seite von $(\mathfrak{J})$ wird alsdann das »Restintegral« der Taylor'schen Formel:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n\,F^{(n+1)}(z)\,dz,$$

as zweite, nämlich:

$$-\int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx \text{ wird gleich } -F(x) + F(x_0),$$

und endlich wird, wenn $f^{(h-1)}(x)$ in dem Intervalle (x_0, x) stetig

$$\int_{x_0}^{x} d\left(f^{(h-1)}(x)\, g^{(n-h)}(-x)\right) = -F^{(h)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^h}{h!},$$

so dass in der That die Taylor'sche Formel:

$$(1)\quad F(x) = F(x_0) + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(x-x_0)^h}{h!} F^{(h)}(x_0) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n\, F^{(n+1)}(z)\, dz$$

resultirt.

II. Unter Festhaltung der Voraussetzung der Stetigkeit $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ und bei Annahme von:

$$g(x) = e^{ux}$$

resultirt ferner aus der Formel (J) die Gleichung:

$$(2)\quad \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x) e^{-ux} dx - u^n \int_{x_0}^{x} f(x) e^{-ux} dx = \sum_{h=1}^{h=n} u^{n-h}\left(f^{(h-1)}(x) e^{-ux} - f^{(h-1)}(x_0) e^{-}\right.$$

III. Nimmt man in der Formel (J):

$$g(x) = [(x+x_0)(x+x_1)]^n$$

und erstreckt die Integration von x_0 bis x_1, so verschwinden, u Voraussetzung der Stetigkeit von $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$, die säm lichen Integrale auf der rechten Seite. Man erhält demnach Formel:

$$(3)\quad \int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)\,[(x-x_0)(x-x_1)]^n\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}\, dx,$$

welche die charakteristische Eigenschaft dieser Function $g^{(n)}(-x)$, der Werth des Integrals $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx$, für irgend welche ga Functionen $(n-1)$ten Grades $f(x)$, verschwindet, in Evidenz setzt. ist aber jene Eigenschaft, auf welcher Jacobi in seiner Abhandlu »Über Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise finden« die Bestimmung der hier mit $g^{(n)}(-x)$ bezeichneten Functi

$$\frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n}$$

basirt, und er gebraucht dazu a. a. O. im §. 4 auch eine Formel die Darstellung von $\int u\, v\, dx$, welche von der Gleichung (J) nur for verschieden ist und aus ihr hervorgeht, wenn $u = f(x)$ und $v = g^{(n)}(-$ gesetzt wird.

IV. Nicht bloss in dem hier behandelten speciellen Falle, sond überhaupt, wenn die Functionen:

$$f^{(h-1)}(x)\, g^{(n-h)}(-x) \qquad (h = 1, 2, \ldots$$

tetig sind und an beiden Integrationsgrenzen einerlei Werth haben, erschwindet der Ausdruck auf der rechten Seite der Formel (J) und s kommt:

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x_1} f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx .$$

Die angegebenen Voraussetzungen sind erfüllt, wenn die Inteation in der Formel (J) von 0 bis 1 erstreckt, ferner:

$$g(x) = \cos 2k(x+y)\pi$$

esetzt und für k irgend eine ganze Zahl, für $f(x)$ aber irgend eine nction genommen wird, die ebenso wie jede ihrer $n-1$ Ableitungen:

$$f'(x)\,,\ f''(x)\,,\ \ldots\ldots f^{(n-1)}(x)$$

m $x=0$ bis $x=1$ stetig ist und an den beiden Grenzen des tervalls $x=0$ und $x=1$ denselben Werth hat. Die Gleichung (4) ht alsdann, da:

$$g^{(n)}(x) = (2k\pi)^n \cos(2kx + 2ky + \tfrac{1}{2}n)\pi$$

rd, in folgende über:

$$(5) \qquad \int_0^1 f^{(n)}(x) \cos 2k(y-x)\pi dx = (2k\pi)^n \int_0^1 f(x) \cos(2ky - 2kx + \tfrac{1}{2}n)\pi dx ,$$

welcher y eine Variable bedeutet. Bestimmt man nun $c_k, c_k^{(n)}, v_k, v_k^{(n}$ mäss den Bedingungen:

$$\int_0^1 f(x) \cos 2k(y-x)\pi dx = c_k \cos(2ky - v_k)\pi$$

$$\int_0^1 f^{(n)}(x) \cos 2k(y-x)\pi dx = c_k^{(n)} \cos(2ky - v_k^{(n)})\pi ,$$

gelten — unter der einzigen Voraussetzung, dass die Function $f^{(n)}(x)$ rhaupt durch eine FOURIER'sche Reihe darstellbar ist — die henentwickelungen:

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} c_k \cos(2kx - v_k)\pi\,,\quad f^{(n)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} c_k^{(n)} \cos(2kx - v_k^{(n)})\pi.$$
$$(0<x<1)$$

der Gleichung (5) folgt aber, dass:

$$c_k^{(n)} \cos(2ky - v_k^{(n)})\pi = \frac{d^n c_k \cos(2ky - v_k)\pi}{dy^n} ,$$

$$c_k^{(n)} = (2k\pi)^n c_k\,,\quad v_k^{(n)} = v_k - \tfrac{1}{2}n$$

t und die Entwickelung von $f^{(n)}(x)$ wird daher folgende:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^n c_k \cos(2kx - v_k + \tfrac{1}{2}n)\pi \qquad (0<x<1) ,$$

d. h. sie geht durch $n$malige gliedweise Differentiation aus der Entwickelung von $f(x)$ hervor.[1]

In jeder der Entwickelungen:

$$f^{(h)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^h c_k \cos(2kx - v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad (h=1,2,\ldots n; 0<x<$$

fehlt das von x unabhängige, dem Werthe $k = 0$ entsprechen Glied. Denkt man sich dieses Glied der Fourier'schen Reihe f $f^{(h)}(x)$ durch das Integral: $\int_0^1 f^{(h)}(x)\,dx$ dargestellt, so kommt:

$$\int_0^1 f^{(h)}(x)\,dx = f^{(h-1)}(1) - f^{(h-1)}(0) = 0\,.$$

Man kann also, von irgend einer, in eine Fourier'sche Reihe en wickelbaren, im Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ durchweg endli bleibenden Function $\psi(x)$ ausgehend, zuerst die Function $f^{(n)}(x)$ dur die Gleichung:

$$f^{(n)}(x) = \psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\,dx\,,$$

hiernächst die Function $f^{(n-1)}(x)$ durch die beiden Relationen:

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 f^{(n-1)}(x)\,dx = 0$$

definiren, ferner ebenso die Function $f^{(n-2)}(x)$ gemäss den Bedingunge

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{df^{(n-2)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 f^{(n-2)}(x)\,dx = \sigma$$

und endlich in analoger Weise nach einander die übrigen Function $f^{(n-3)}(x), f^{(n-4)}(x), \ldots f'(x), f(x)$ bestimmen.

Für die so bestimmten $n+1$ Functionen $f^{(h)}(x)$ gelten dann Reihenentwickelungen:

$$f^{(h)}(x) = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} (2k\pi)^h c_k \cos(2kx - v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots n-1;\ 0\leqq x\leqq \\ h=n;\ 0<x<1 \end{pmatrix}$$

und die Werthe der darin vorkommenden Grössen c_k, v_k können a der Entwickelung irgend einer dieser $n+1$ Functionen $f^{(h)}(x)$ e nommen werden.

V. Nimmt man in der Formel (J) für $f(x)$ eine Function, wel nebst ihren Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ in dem ganzen Interva

[1] Vergl. Hrn. P. du Bois-Reymond's Aufsatz »Über die Integration der trigo metrischen Reihe« Math. Annalen Bd. XXII. S. 260.

von x_0 bis x_r endlich und stetig ist, für $g(x)$ aber eine solche, deren $(n-1)$te Ableitung an einzelnen durch die Werthe:

$$-x = x_1, x_2, \ldots x_{r-1} \qquad (x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{r-1} < x_r)$$

bezeichneten Stellen des Intervalls (x_0, x_r) unstetig, dabei jedoch durchweg endlich ist,[1] so verwandelt sich die Gleichung (J) in eine ganz allgemeine Summenformel, und hierin besteht wohl die merkwürdigste Anwendung, welche man von jener Integralformel (J) machen kann.

Unter der angegebenen Voraussetzung wird nämlich das erste, dem Werthe $h=1$ entsprechende Integral auf der rechten Seite von (J):

$$\int_{x_0}^{x_r} d\big(f(x)\, g^{(n-1)}(-x)\big)$$

gleich der Summe:

$$-f(x_0)g^{(n-1)}(-x_0) + \sum_{k=1}^{k=r-1} f(x_k) \lim_{\varepsilon=0} [g^{(n-1)}(\varepsilon^2 - x_k) - g^{(n-1)}(-\varepsilon^2 - x_k)] + f(x_r)g^{(n-1)}(-x_r),$$

und diese wird daher gemäss der Integralformel (J) durch den Ausdruck:

$$f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx - \int_{x_0}^{x_r} f(x)\, g^{(n)}(-x)\, dx + \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_0) g^{(n-h)}(-x_0) - \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_r)\, g^{(n-h)}(-x_r)$$

dargestellt, wenn die Function $g^{(n-1)}(x)$ innerhalb jedes einzelnen Intervalles (x_k, x_{k+1}), in welchem sie stetig ist, zugleich Ableitungen $g^{(n)}(-x)$ mit endlichen Werthen besitzt.

Man kann also irgend welche r stetige, differentiirbare Functionen:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots \phi_r(x)$$

annehmen und alsdann die Function $g^{(n-1)}(x)$ durch die Bedingung:

$$g^{(n-1)}(-x) = \phi_k(x) \text{ für } x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots r),$$

d. h. also dadurch definiren, dass sie in jedem der r Intervalle:

$$x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

mit der bezüglichen Function $\phi_k(x)$ übereinstimmen soll.

Es ist dann auch:

$$-g^{(n)}(-x) = \phi_k'(x) \text{ für } x_{k-1} < x < x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

zu setzen, wo $\phi_k'(x)$ die erste Ableitung von $\phi_k(x)$ bedeutet, und die Functionen $g^{(n-2)}(x), g^{(n-3)}(x), \ldots g(x)$ sind durch die Gleichung:

$$\int_{u_h}^{x} g^{(h)}(x)\, dx = g^{(h-1)}(x)$$

[1] Die Functionen $g(x), g'(x), \ldots g^{(n-2)}(x)$ sind alsdann offenbar endlich und stetig.

zu bestimmen, wenn man darin der Reihe nach $h = n-1, n-2, \ldots$ und die unteren Grenzen $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots u_1$ ganz beliebig annimmt.

Da nun bei den angegebenen Bestimmungen:

$$\lim_{\varepsilon=0} g^{(n-1)}(\varepsilon^2 - x_k) = \phi_k(x_k), \quad \lim_{\varepsilon=0} g^{(n-1)}(-\varepsilon^2 - x_k) = \phi_{k+1}(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

wird, so erhält man die ganz allgemeine Summenformel:

$$(\mathfrak{S}) \quad \sum_{k=0}^{k=r} [\phi_k(x_k) - \phi_{k+1}(x_k)] f(x_k) = \int_{x_0}^{x_r} f(x)\phi'(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\,dx$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_0)\, g^{(n-h)}(-x_0) - \sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_r)\, g^{(n-h)}(-x_r),$$

in welcher:

$$\phi_0(x_0) = 0, \quad \phi_{r+1}(x_r) = 0$$

und für $x_{k-1} < x < x_k$:

$$\phi'(x) = \phi'_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

zu setzen ist. Nimmt man speciell:

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{n-1} = x_0,$$

so wird $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(n-2)}(x_0) = 0$ und der Ausdruck

$$\sum_{h=2}^{h=n} f^{(h-1)}(x_0)\, g^{(n-h)}(-x_0)$$

auf der rechten Seite der Formel $(\mathfrak{S})$ fällt alsdann weg.

VI. Setzt man:

$$\phi_k(x) = x - x'_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

und wählt dabei die Grössen x' so, dass:

$$x_{k-1} \leqq x'_{k-1} \leqq x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

wird, so ist $\phi'(x) = 1$, und die Formel $(\mathfrak{S})$ ergiebt alsdann (bei Festhaltung jener über die Grössen u getroffenen Bestimmung: $u_1 = u_2 = \ldots = u_{n-1} = x_0$) den Ausdruck:

$$(A) \quad \int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx - \sum_{h=1}^{h=n-1} f^{(h)}(x_r) g^{(n-h-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\,dx$$

als den Werth der Summe:

$$(x'_0 - x_0)f(x_0) + (x'_1 - x'_0)f(x_1) + (x'_2 - x'_1)f(x_2) + \ldots + (x_r - x'_{r-1})f(x_r$$

Diese Summe, in welcher je ein Functionswerth $f(x_k)$ mit dem absoluten Werthe eines das Argument enthaltenden Intervalls $(x'_{k-1}, x'_k$ multiplicirt ist, stellt in allgemeinster Weise einen Näherungswert jenes Integrals:

$$\int_{x_0}^{x_r} f(x)\,dx$$

lar, welches den ersten Theil des Ausdrucks (A) bildet. Der Unterschied zwischen dem Näherungswerthe und dem Integralwerthe selbst wird daher durch den übrigen Theil des Ausdrucks, nämlich durch:

$$-\sum_{h=1}^{h=n-1} f^{(h)}(x_r)\, g^{(n-h-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx$$

dargestellt. Dabei ist

$$g^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} g^{(n-1)}(x)\, dx,$$

also, wenn x zwischen x_{k-1} und x_k liegt:

$$g^{(n-2)}(x) = -\sum_{h=1}^{h=k-1} \int_{x_{h-1}}^{x_h} (x + x'_{h-1})\, dx - \int_{x_{k-1}}^{x} (x + x'_{k-1})\, dx$$

oder:

$$-g^{(n-2)}(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x'_{k-1}x - \tfrac{1}{2}x_0^2 - x_{k-1}x'_{k-1} + \sum_{h=1}^{h=k-1} x'_{h-1}(x_h - x_{h-1}),$$

und die Functionen $g^{(n-3)}(x)$, $g^{(n-4)}(x)$, ... sind durch weitere Integrationen zu bilden.

VII. Bedeutet $\psi(x)$ irgend eine, für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ endliche, stetige und differentiirbare Function, deren Werthe für die beiden Intervallgrenzen von einander verschieden sind, und setzt man:

$$\psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\, dx = g^{(n-1)}(-x),$$

so kann $g^{(n-1)}(-x)$ durch eine FOURIER'sche Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2})\,\pi \qquad (0 < x < 1)$$

dargestellt werden, in welcher die Summation deshalb nur von $k = 1$ bis ∞ zu erstrecken ist, weil nach der über $g^{(n-1)}(-x)$ getroffenen Festsetzung:

$$\int_0^1 g^{(n-1)}(-x)\, dx = 0$$

wird. Man kann nun von der Function $g^{(n-1)}(-x)$ ausgehend — gemäss den Darlegungen am Schlusse des art. IV — durch successive Integration zu $n - 1$ Functionen:

$$g^{(n-2)}(-x),\ g^{(n-3)}(-x),\ \ldots\ldots g'(-x),\ g(-x)$$

gelangen, für welche die Relationen:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx},\quad \int_0^1 g^{(h)}(-x)\, dx = g^{(h-1)}(-1) - g^{(h-1)}(0) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1)$$

und die Reihenentwickelungen:

$$g^{(n-h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi \qquad (h=1,2,\ldots$$

gelten.

Hierbei sind also:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots; \; v_1, v_2, v_3, \ldots.$$

beliebige Grössen, welche nur die Bedingung erfüllen müssen, da die Reihe:

$$(A_1) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2})\pi$$

für alle Werthe von x convergire und eine innerhalb des Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ durchweg endliche, stetige, differentiirbare, ab bei $x = 0$ und $x = 1$ unstetige Function darstelle, welche, wenn m einerseits x bis zu Null abnehmen, andererseits bis zu Eins zunehm lässt, sich zwei verschiedenen Grenzwerthen nähert. Die übrig $n - 1$, durch die Reihen:

$$(A_h) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}h)\pi$$

für $h = 2, 3, \ldots n$ dargestellten Functionen sind dann

durchweg endliche, stetige, differentiirbare, periodische Functione

von denen eine jede die Ableitung der folgenden, negativ genomme ist, und für welche also, wenn sie beziehungsweise mit:

$$g^{(n-2)}(-x), g^{(n-3)}(-x), \ldots g'(-x), g(-x)$$

bezeichnet werden:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx} \qquad (h=1,2,\ldots n-$$

ist. Diese Relation gilt ferner auch für $h = n - 1$, wenn man $g^{(n-1)}(-$ als den Werth der Reihe (A_h) für $h = 1$ definirt. Wenn man endli den — der Voraussetzung nach existirenden — Differentialquotient von $g^{(n-1)}(x)$ mit $g^{(n)}(x)$ bezeichnet, so sind die $n + 1$ den Werth $h = 0, 1, \ldots n$ entsprechenden Functionen $g^{(h)}(-x)$ durch die Gleichunge

$$g^{(h)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^{n-h}} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}h)\pi \quad (h=0,1,\ldots n-$$

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}, \quad g^{(n)}(x) = g^{(n)}(x+1)$$

für alle reellen Werthe von x definirt.

Setzt man nun diese Functionen $g^{(h)}(-x)$ in die Integralformel (J) in, nimmt man ferner für $f(x)$ eine nebst ihren ersten $n-1$ Abeitungen stetige Function und integrirt von Null bis zu einer ganzen ahl r, so resultirt die Gleichung:[1]

$$(6)\qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_0^r f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx$$
$$= -\gamma_0 \sum_{k=0}^{k=r-1} f(k) + \gamma_1 \sum_{k=1}^{k=r} f(k) + \sum_{h=2}^{h=n} g^{(n-h)}(0)\left(f^{(h-1)}(r) - f^{(h-1)}(0)\right),$$

welcher γ_0, γ_1 folgendermaassen bestimmt sind:

$$= \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2k\varepsilon^2 + v_k + \tfrac{1}{2})\pi\,,\quad \gamma_1 = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \cos(2k\varepsilon^2 - v_k - \tfrac{1}{2})\,\pi.$$

Bezeichnet man die Differenz $\gamma_0 - \gamma_1$ durch δ, so dass:

$$\delta = -2 \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \sin 2k\varepsilon^2\pi \cos v_k\pi$$

ird, und setzt man der Gleichförmigkeit halber:

$$\gamma_h = g^{(n-h)}(0)\,,$$

kann die obige Gleichung (6) in folgender Weise als eine

»allgemeine Summenformel«

rgestellt werden:

$$\delta \sum_{k=0}^{k=r-1} f(k) = \int_0^r f(x) g^{(n)}(-x)\,dx + \sum_{h=0}^{h=n-1} \gamma_{h+1}\left(f^{(h)}(r) - f^{(h)}(0)\right) - \int_0^r f^{(n)}(x) g(-x)\,dx\,,$$

welcher:

$$g(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^n} \cos(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}n)\,\pi\,,\quad g^{(n)}(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}\,,$$

$$\gamma_h = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^h} \cos(2k\varepsilon^2 - v_k - \tfrac{1}{2}h)\,\pi \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

$$\delta = -2 \lim_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{2k\pi} \sin 2k\varepsilon^2\pi \cos v_k\pi$$

VIII. Nimmt man in der Formel (S'):

$$n = 2m\,,\ a_k = -2\,,\ v_k = 0\,,$$

wird:

$$g(-x) = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2m}} \cos 2kx\pi\,,$$

$$g^{(n-1)}(-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi} = \tfrac{1}{2} - x\,,\ \text{also}\ g^{(n)}(-x) = 1\,,$$

$$\gamma_{2h} = (-1)^{h+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots m),$$

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{2}\,,\ \gamma_3 = \gamma_5 = \ldots = \gamma_{2m-1} = 0\,,\ \delta = 1\,,$$

[1] Vergl. die Ausdrücke (S°) und (J°) im art. V.

und die obige allgemeine Summenformel ($\mathfrak{S}'$) geht alsdann in
folgende specielle über:

$$(\mathfrak{S}'')\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)= \\ &\int_0^r f(x)\,dx+\sum_{h=1}^{h=m}\left(f^{(2h-1)}(0)-f^{(2h-1)}(r)\right)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^h\,2}{(2k\pi)^{2h}}+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\cos}{(2k} \end{aligned}$$

welche zuerst von Poisson in seiner, am 11. December 1826 in
Pariser Akademie gelesenen, Abhandlung: »Sur le calcul numériq
des Integrales définies« entwickelt worden ist.[1]

Eben dieselbe Formel hat Jacobi auf einem von dem Poiss
schen verschiedenen Wege in der vom 2. Juni 1834 datirten,
XII. Bande des Crelle'schen Journals abgedruckten Abhandlung: »
usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae« hergeleitet.
findet sich a. a. O. auf S. 265 unter Nr. 10 und wird dort als »*f*
mula memorabilis« bezeichnet. Nur äusserlich unterscheidet si
diese Jacobi'sche Formel von der Poisson'schen dadurch, dass
oben in der Gleichung ($\mathfrak{S}''$) auf der rechten Seite unter dem Re
integrale (ebenso wie bei Poisson) vorkommende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

bei Jacobi durch eine sogenannte Bernoulli'sche Function, d. h. du
diejenige ganze Function von x ersetzt ist, welche den Werth
Reihe für alle zwischen Null und Eins liegenden Werthe von x d
stellt. Da die Übereinstimmung dieser Reihe mit der von Jac
benutzten ganzen Function von x (im Intervalle $0 < x < 1$) bekan
und übrigens auch aus der citirten Poisson'schen Abhandlung sel
— nämlich aus den dort mit (13) und (14) bezeichneten Gleichungen
zu entnehmen war, so erscheinen mir die Worte[2] nicht gerechtferti
mit denen Jacobi nur ganz kurz auf die Poisson'sche Formel hinwei
welche doch das Hauptresultat der Jacobi'schen Abhandlung sch
vollständig enthält.

IX. Im Anfange des vorhergehenden Artikels (VIII) ist:

$$g^{(n-1)}(-x)=\tfrac{1}{2}-x$$

gesetzt worden. Hiermit sind aber auch, gemäss den in art. IV u

---

[1] Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France. Tome
1827, p. 571.

[2] Der Schluss der citirten Jacobi'schen Abhandlung lautet folgendermaass
Residui seriei summatoriae Maclaurinianae expressionem a nostra diversam dedit ill. Pois
in commentatione egregia. »Sur le calcul numérique des Intégrales définies«. (Acad.
Sciences Vol. VI. p. 571 sqq.)

rt. VII enthaltenen Darlegungen, die übrigen Functionen $g(x)$ völlig estimmt; sie gehen nämlich mit Hülfe der Relationen:

$$g^{(h)}(x) = \frac{dg^{(h-1)}(x)}{dx}, \quad \int_0^1 g^{(h)}(-x)\,dx = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1)$$

er Reihe nach durch Integration aus einander hervor. Es ergeben ch also auf diese Weise nach einander jene ganzen Functionen, welche ie Werthe der Reihen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}} \qquad (0 < x < 1)$$

ir $m = 1, 2, 3, \ldots$ darstellen. Aber man gelangt dazu auch ganz rect, wenn man die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung:

$$(7) \qquad \frac{we^{2wx\pi i}}{1 - e^{2w\pi i}} = \frac{w}{2\pi i} \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{e^{2kx\pi i}}{k - w}$$

ich steigenden Potenzen von w entwickelt; denn der Coefficient von w^n ird dann auf der rechten Seite die Reihe:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^n} \left(e^{2kx\pi i} + (-1)^n e^{-2kx\pi i} \right),$$

d auf der linken Seite eine ganze Function von x, deren Coefficienten e Entwickelungscoefficienten von:

$$\frac{1}{1 - e^{2w\pi i}}$$

d also die BERNOULLI'schen Zahlen enthalten.

Wenn man in der Formel ($\mathfrak{S}''$) an Stelle der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

wie es bei JACOBI und seitdem in fast allen Arbeiten über diesen genstand geschehen ist — ihre Summe als ganze Function von x führt, so verliert die Formel wesentlich an Eleganz. Denn dieser mmenausdruck ist für die verschiedenen Intervalle $0 < x < 1$, $1 < x < 2$, $x < 3, \ldots r-1 < x < r$ verschieden, und das von 0 bis r erstreckte egral muss deshalb in r Integrale getheilt werden, deren jedes sich über eines der r Intervalle erstreckt. Wenn man alsdann die grationsvariabeln so ändert, dass sich alle Integrationen von Null Eins erstrecken, so erscheint an Stelle der Function $f^{(2m)}(x)$ unter n letzten Integralzeichen in der Formel ($\mathfrak{S}''$) eine Summe solcher nctionen, wie sie sich in der That in der citirten JACOBI'schen mel findet.

X. Die oben benutzte Gleichung (7) habe ich schon in meiner Mittheilung vom April 1883[1] angegeben. Sie gilt für reelle, nicht negative Werthe von x, die kleiner als Eins sind, und aber für ganz beliebige (auch complexe) Werthe von w. Sie lässt sich übrigens noch in folgender eleganten Weise darstellen:

$$(8) \qquad (e^{2w\pi i} - 1) \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{e^{-2(w+k)x\pi i}}{2(w+k)\pi i} = 1,$$

und, indem $e^{2w\pi i} = u$ gesetzt wird, auch so:

$$(9) \qquad (u-1) \lim_{\mu=\infty} \sum \frac{e^{-x \log u}}{\log u} = 1 \qquad (0 \leqq x <$$

wenn unter u eine beliebige complexe Grösse verstanden und die Summation auf alle Werthe von $\log u$ ausgedehnt wird, deren absoluter Werth kleiner als μ ist. Aus der Gleichung (9) ergiebt sich endlich die für jede reelle Grösse x geltende bemerkenswerthe Relation:

$$(10) \qquad \lim_{\mu=\infty} \sum \frac{e^{-x \log u}}{\log u} = \frac{1}{u^{[x+1]} - u^{[x]}},$$

in welcher mit $[x]$ nach Gauss'scher Weise die durch die Ungleichheits-Bedingungen:

$$[x] \leqq x < [x] + 1$$

bestimmte ganze Zahl bezeichnet ist.

Die Gleichung (7) lässt sich aus den schon oben citirten, in der Poisson'schen Abhandlung mit (13) und (14) bezeichneten, Formeln erschliessen; sie geht aber in ganz directer Weise aus der Entwicklung von:

$$\cos 2wx\pi + i \sin 2wx\pi$$

in eine nach cosinus und sinus der Vielfachen von $2x\pi$ fortschreitende Reihe hervor. In ähnlicher Weise gelangt man dazu, wenn man die $w$te Potenz einer complexen Variabeln ζ durch das Cauchy'sche Integral darstellt. Offenbar ist nämlich:

$$2\pi i \zeta^w = \int \frac{z^w}{z-\zeta} dz,$$

wenn man die Integration von einem Punkte $z = Re^{vi}$ an, bei festem R bis zum Punkte $z = Re^{(v+2\pi-\varepsilon)i}$ erstreckt, dann bei Festhaltung des Bogenwerthes $v + 2\pi - \varepsilon$ und abnehmendem Radius vector bis zum Punkte $z = re^{(v+2\pi-\varepsilon)i}$, ferner bei festem r und abnehmenden Bogenwerthen bis zum Punkte $z = re^{vi}$ und endlich von da bei Festhaltung des Bogenwerthes v und wachsendem Radius vector zurück zum Ausgangspunkt $z = Re^{vi}$. Hierbei ist angenommen, dass:

[1] Zur Theorie der elliptischen Functionen. Sitzungsbericht XX, XXI, S. 499

$$r < |\zeta| < R$$

ei, oder also, wenn $\zeta = \rho e^{\sigma i}$ gesetzt wird:

$$r < \rho < R.$$

Es ist ferner angenommen, dass der Werth von ε positiv aber beliebig klein sei, und dass der Bogenwerth σ jedenfalls zwischen v und $+2\pi - \varepsilon$ liege. Alsdann umschliesst der angegebene Integrationsweg den Punkt ζ, und die Function z^w ist für alle Werthe von z in dem umschlossenen Gebiete eindeutig.

Von den vier Integralen, welche auf die angegebene Weise resultiren, lassen sich die beiden, bei denen der Radius vector fest bleibt, beziehungsweise nach positiven Potenzen von:

$$\frac{\zeta}{R} \text{ und } \frac{r}{\zeta}$$

entwickeln und die anderen beiden Integrale können in eines vereinigt werden. Man erhält hiernach die folgende Darstellung von ζ^w für alle Werthe von ζ, deren absoluter Betrag zwischen r und R liegt:

$$\frac{2\pi i \zeta^w}{e^{wi}(e^{2w\pi i} - 1)} = \frac{R^w}{w} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{R^w}{w-k} (R^{-1} e^{-vi} \zeta)^k + \frac{r^w}{w+k} (r^{-1} e^{-vi} \zeta)^{-k} \right\} - \int_r^R \frac{t^w \, dt}{t - \zeta e^{-vi}}.$$

etzt man hierin $\zeta = \rho e^{\sigma i}$, $\sigma = v + 2x\pi$, $\rho = \delta R$, $r = \delta\rho$, so resultirt die für alle zwischen Null und Eins liegenden Werthe von x und δ gültige Formel:

$$(12) \qquad \frac{2\pi i e^{2wx\pi i}}{1 - e^{2w\pi i}} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{\delta^{\varepsilon(k-w)} e^{2kx\pi i}}{k-w} + \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{t^w \, dt}{t - e^{2x\pi i}},$$

$$(\varepsilon = 1 \text{ für } k \geqq 0;\ \varepsilon = -1 \text{ für } k < 0)$$

welche in die oben mit (7) bezeichnete Formel übergeht, wenn sich δ dem Grenzwerthe $\delta = 1$ nähert.

Die Gleichung (12) kann noch, wenn man, wie oben, $e^{w\pi i} = u$ setzt, in folgende transformirt werden:

$$(13) \qquad \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} \frac{z^w \, dz}{z - 1} = \frac{2\pi i}{u^{[x]} - u^{[x+1]}} + \lim_{\nu=\infty} \sum_{k=-\nu}^{k=+\nu} \frac{(\delta^{-\varepsilon} z_0)^{w-k}}{w-k}.$$

Die Integration ist hier in Beziehung auf die complexe Variable z. Bei Festhaltung des Bogenwerthes, von demjenigen Werthe an, bei dem $|z| = \delta$ ist, bis zu dem, bei welchem $|z| = \frac{1}{\delta}$ ist, zu erstrecken, und der Werth des Integrals wird alsdann durch den Ausdruck auf

der rechten Seite dargestellt, wenn darin z_0 dem bei der Integrati fest bleibenden Werthe: $\frac{z}{|z|}$ gleich genommen, und dann $\log z_0 = -2x$ gesetzt wird.

XI. Dass das Restintegral der Euler'schen oder Maclaurin'sche Reihe[1] bei Poisson in eleganterer Form erscheint als bei Jacobi, i schon oben, am Schlusse des art. IX, bemerkt worden. Aber ei noch grösserer Vorzug der Poisson'schen Form des Restintegrals i darin zu finden, dass bei Anwendung der Cosinus-Reihe der typisch Charakter der allgemeinen Formel ($\mathfrak{S}'$) des art. VII besser erhalte bleibt und also auch besser zu erkennen ist, als bei Einführung jene Bernoulli'schen Function, welche die Summe der Cosinus-Reihe fü ein bestimmtes Intervall des Arguments darstellt.

Dabei ist hervorzuheben, dass die Verallgemeinerung der Poisson schen Summenformel, welche in der mit ($\mathfrak{S}'$) bezeichneten Gleichun gegeben ist, nicht etwa eine bloss formale, sondern vielmehr ein wichtige sachliche Bedeutung hat. Soll nämlich, wie in jener Poisson schen Formel ($\mathfrak{S}''$), eine Summe:

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(r-1) + \tfrac{1}{2}f(r)$$

durch einen Ausdruck mit dem »Haupttheile«:

$$\int_0^r f(x)\,dx$$

dargestellt werden, so enthält diese Aufgabe insofern eine wesentlich Unbestimmtheit, als bei der Summe $\frac{1}{2}f(0) + f(1) + \ldots$ nur die Werth der Function $f(x)$ für $x = 0, 1, \ldots r$, bei dem Integrale $\int_0^r f(x)\,dx$ abe die Werthe für alle Argumente zwischen $x = 0$ und $x = r$ in An wendung kommen.

Diesem Umstande, welcher offenbar bei jener Frage der Dar stellung von Summen:

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(r-1) + \tfrac{1}{2}f(r)$$

eine besondere Beachtung verdient, wird in der allgemeinen Summen formel ($\mathfrak{S}'$) bis zu einem gewissen Grade dadurch Rechnung getragen, dass in dem »Haupttheile« des Ausdrucks auf der rechten Seite:

$$\int_0^r f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx$$

[1] Man vergleiche die historischen Notizen, welche unser Ehrenmitglied, Hr. Malmsten, über die erwähnte Reihe in der Einleitung seiner im 35. Bande des Crelle'schen Journals abgedruckten Abhandlung gegeben, sowie auch die Abänderungen, welche er bei dem Wiederabdruck im 5. Bande der Acta Mathematica angebracht hat.

ie Function $f(x)$ mit einer Function $g^{(n)}(-x)$ multiplicirt ist, welche
ı dem ersten Intervalle von $x = 0$ bis $x = 1$ ganz willkürlich ange-
ommen werden kann, deren übrige Werthe aber alsdann durch die
eriodicitätsgleichung:

$$g^{(n)}(-x) = g^{(n)}(-x-1)$$

ı bestimmen sind.

Um die hier betonte Willkürlichkeit der Function $g^{(n)}(-x)$ genauer
arzulegen, erinnere ich daran, dass den Entwickelungen im art. VII
gend eine für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ endliche, stetige
ıd differentiirbare, der Ungleichheitsbedingung $\psi(0) \gtrless \psi(1)$ genügende
unction $\psi(x)$ zu Grunde gelegt und dann:

$$\psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\,dx = g^{(n-1)}(-x)$$

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}$$

setzt worden ist. Geht man nun von irgend einer endlichen, integrir-
ren Function $g^{(n)}(-x)$ aus, deren Wahl einzig und allein durch die
dingung: $\int_0^1 g^{(n)}(-x)\,dx \gtrless 0$ beschränkt wird, so hat man — um
ıe für die weitere Deduction geeignete Function $g^{(n-1)}(-x)$ daraus
zuleiten — nur $g^{(n-1)}(-x)$ durch die Differentialgleichung:

$$g^{(n)}(-x) = -\frac{dg^{(n-1)}(-x)}{dx}$$

d die Constante der Integration so zu bestimmen, dass:

$$\int_0^1 g^{(n-1)}(-x)\,dx = 0$$

rd.

XII. Für die Abschätzung des Werthes des Restintegrals:

$$\int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx$$

der Summenformel $(\mathfrak{S}')$ ist man bei der Allgemeinheit der Function
$-x)$ auch nur auf die allgemeine Untersuchung von Integralen an-
wiesen, deren Integrand das Product zweier Functionen ist.

Sind nun $\phi(x)$, $\psi(x)$ eindeutige Functionen, $\phi'(x)$, $\psi'(x)$ ihre Ab-
ungen und $\xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{2\nu-2}$ die sämmtlichen zwischen ξ_0 und $\xi_{2\nu}$
genden, ihrer Grösse nach geordneten Werthe von x, wofür $\phi'(x)$
schwindet, so lassen sich Werthe $\xi_1, \xi_3, \ldots \xi_{2\nu-2}$ so bestimmen, dass:

(J)
$$\int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi'(x)\,\psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu} \big(\phi(\xi_{2k}) - \phi(\xi_{2k-2})\big)\,\psi(\xi_{2k-1})$$

$$(\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \cdots < \xi_{2\nu-2} < \xi_{2\nu-1} < \xi_{2\nu})$$

wird. Dies erhellt unmittelbar, wenn das Integrations-Intervall $(\xi_0, \xi$ in die Theilintervalle $(\xi_0, \xi_2), (\xi_2, \xi_4), \ldots$ zerlegt wird, innerhalb der $\phi'(x)$ sein Vorzeichen bewahrt.

Ersetzt man das Integral auf der linken Seite der Gleichung (durch:

$$\phi(\xi_{2\nu})\,\psi(\xi_{2\nu}) - \phi(\xi_0)\,\psi(\xi_0) - \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\,\psi'(x)\,dx$$

und ordnet alsdann die Glieder auf der rechten Seite nach den einzeln Functionen ϕ, so ergiebt sich die Formel:

$$(\mathrm{J}') \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\,\psi'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{k=\nu} \big(\psi(\xi_{2k+1}) - \psi(\xi_{2k-1})\big)\,\phi(\xi_{2k})\,,$$

in welcher:

$$\xi_{-1} = \xi_0\,, \quad \xi_{2\nu+1} = \xi_{2\nu}$$

zu nehmen ist, und in welcher die Argumente der Functionen ϕ a der rechten Seite deren Minimal- oder Maximalstellen bezeichnen. Ma kann daher die beiden Formeln (J), (J′) auch in folgender Weise da stellen:

$$(\mathrm{J}_0) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi'(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi'(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx$$

$$(\mathrm{J}_0') \qquad \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \phi(x)\,\psi'(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_{2\nu}} \overline{\phi}(x)\,\psi'(x)\,dx\,,$$

wo erstens

$\overline{\phi}(x)$ durch die Bedingung:

$$\overline{\phi}(x) = \phi(\xi_{2k}) \text{ im Intervalle } \xi_{2k-1} < x < \xi_{2k+1}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots \nu$ bestimmt ist, also eine Function b deutet, welche in gewissen, je eine der Minimal- oder Max malstellen einschliessenden Intervallen den festen Minima oder Maximalwerth beibehält,

und wo zweitens

$\overline{\psi}(x)$ durch die Bedingung:

$$\overline{\psi}(x) = \psi(\xi_{2k-1}) \text{ im Intervalle } \xi_{2k-2} < x < \xi_{2k}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots \nu$ definirt ist, also eine Function bedeute welche in den verschiedenen Intervallen, in denen $\phi'(x)$ sei Vorzeichen nicht ändert, einen festen (Mittel-) Werth be behält.

Die zweite Formel (J′) braucht nicht — wie hier geschehen ist — aus der ersten Formel (J) abgeleitet zu werden. Sie resultirt vielmeh

lirect, und unabhängig von der Voraussetzung der Existenz einer Derivirten $\phi'(x)$, wenn das Integrations-Intervall in Theilintervalle $\xi_0, \xi_4), (\xi_4, \xi_8), \ldots$ zerlegt wird, innerhalb deren nur ein Maximum oder Minimum von $\phi(x)$ liegt. Denn wenn das Integral:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \big(\phi(x) - \phi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx$$

ls Grenzwerth der Summe:

$$\sum_k (x_{2k} - x_{2k-2}) \big(\phi(x_{2k-1}) - \phi(\xi_2)\big)\, \psi'(x_{2k-1}) \qquad (k = 1, \ldots m, m+1, \ldots n)$$

ei wachsendem m und n und bei Festhaltung der Werthe:

$$x_0 = \xi_0\,,\quad x_{2m} = \xi_2\,,\quad x_{2n} = \xi_4$$

ufgefasst und die auf die Werthe $k = 1, 2, \ldots m$ bezügliche Theilumme mittels der abkürzenden Bezeichnungen:

$$\phi(x_{2k-1}) - \phi(\xi_2) = a_k\,,\ (x_{2k} - x_{2k-2})\psi'(x_{2k-1}) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

1 der Form:

$$\sum_k a_k b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

argestellt wird, so ist für den Fall, dass die Function $\phi(x)$ bei $x = \xi_2$ in Minimum hat:

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_m > 0.$$

Nun liegt der Werth von:

$$\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{k=m} a_k b_k,$$

ie bei jener ABEL'schen Schlussweise erhellt, zwischen dem grössten nd dem kleinsten der verschiedenen Werthe, welchen die Summe:

$$\sum_{k=1}^{k=\nu} b_k$$

r $\nu = 1, 2, \ldots m$ annimmt. Für zwei von diesen m Summen:

$$\sum_{h=1}^{h=\lambda} b_h\,,\quad \sum_{h=1}^{h=\mu} b_h\,,$$

e der Grösse ihres Werthes nach unmittelbar auf einander folgen, uss demnach eine Ungleichheit:

$$a_0 \sum_{h=1}^{h=\lambda} b_h < \sum_{h=1}^{h=m} a_h b_h < a_0 \sum_{h=1}^{h=\mu} b_h$$

stehen, und aus dieser resultirt, wenn man zur Grenze übergeht, ne Gleichung:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_2} \big(\phi(x) - \phi(\xi_2)\big)\, \psi'(x)\, dx = \phi(\xi_0) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi'(x)\, dx\,,$$

in welcher ξ_1 einen zwischen ξ_0 und ξ_2 liegenden Werth von x bedeutet. Ganz ebenso resultirt eine Gleichung:

$$\int_{\xi_2}^{\xi_4} \big(\phi(x) - \phi(\xi_2)\big)\,\psi'(x)\,dx = \phi(\xi_4)\int_{\xi_3}^{\xi_4} \psi'(x)\,dx\,,$$

in welcher ξ_3 ein zwischen ξ_2 und ξ_4 liegender Werth von x ist, und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \phi(x)\,\psi'(x)\,dx = \phi(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi'(x)\,dx + \phi(\xi_2)\int_{\xi_1}^{\xi_3} \psi'(x)\,dx + \phi(\xi_4)\int_{\xi_3}^{\xi_4} \psi'(x)\,dx\,,$$

so dass in der That:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_4} \phi(x)\,\psi'(x)\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi_4} \bar{\phi}(x)\,\psi'(x)\,dx$$

wird.

Die Formel (J′) geht, wenn die Integration nur von ξ_0 bis ξ_2 erstreckt wird, in jene über, welche Hr. P. du Bois-Reymond in seiner in LXIX. Bande des Journals für Mathematik abgedruckten Abhandlung entwickelt und dort als »Mittelwerthsatz« bezeichnet hat; doch tritt ihre eigentliche Bedeutung bei dieser Beschränkung des Integrationsgebietes weniger hervor.

Die Formel (J′) lässt sich andererseits auch aus der specielleren P. du Bois-Reymond'schen Gleichung ableiten, wenn man das Integral auf der linken Seite von (J′) in ν Theilintegrale mit den Grenzen $(\xi_0, \xi_2), (\xi_2, \xi_4), \ldots (\xi_{2\nu-2}, \xi_{2\nu})$ zerlegt.

Für die Abschätzung des Restintegral-Werthes in der allgemeinen Summenformel ($\mathfrak{S}'$) braucht man nur eine der beiden Formeln (J), (J′) zu benutzen. Denn wenn man:

$$\phi(x) = f^{(n-1)}(x)\,, \quad \psi(x) = g(-x)$$

nimmt, so erhält man durch die Formel (J) einen Ausdruck für das Restintegral:

$$\int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx\,,$$

aus welchem derjenige unmittelbar hervorgeht, welchen die Formel (J′) für das Integral:

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\,g'(-x)\,dx\,,$$

also für ein Restintegral liefert, in dem die Zahl n durch die Zahl $n-1$ ersetzt ist.

---

[1] A. a. O. S. 82, Gleichung (9).

Aber man hat, um das Restintegral $\int f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx$ mit dem ıtegral der Formel (J) zu identificiren, nicht nur, wie eben ange- ɔmmen wurde:

$$\phi'(x) = f^{(n)}(x), \quad \psi(x) = g(-x),$$

ɔndern auch andererseits:

$$\phi'(x) = g(-x), \quad \psi(x) = f^{(n)}(x)$$

ı setzen. Doch kann statt dessen, wenn das Integral:

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\,g'(-x)\,dx$$

s Restintegral betrachtet wird:

$$\phi'(x) = g'(-x), \quad \psi(x) = f^{(n-1)}(x)$$

setzt werden. Man erhält hiernach mittels der Formel (J) zur Ab- hätzung des Restintegral-Werthes die beiden Gleichungen:

$$(K_1) \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu} \Big(f^{(n-1)}(\xi_{2k}) - f^{(n-1)}(\xi_{2k-2})\Big)\,g(-\xi_{2k-1}),$$

$$(K_2) \qquad \int_0^r f^{(n-1)}(x)\,g'(-x)\,dx = \sum_{k=1}^{k=\nu'} \Big(g(-\xi'_{2k}) - g(-\xi'_{2k-2})\Big)\,f^{(n-1)}(\xi'_{2k-1}),$$

i denen

$$\xi_2, \xi_4, \ldots \xi_{2\nu-2} \qquad (\xi_2 < \xi_4 < \ldots < \xi_{2\nu-2})$$
$$\xi'_2, \xi'_4, \ldots \xi'_{2\nu'-2} \qquad (\xi'_2 < \xi'_4 < \ldots < \xi'_{2\nu'-2})$$

ɜ diejenigen Argumentwerthe zwischen o und r bedeuten, für welche erseits die Functionswerthe:

$$f^{(n-1)}(\xi_2), f^{(n-1)}(\xi_4), \ldots f^{(n-1)}(\xi_{2\nu-2})$$

ı andererseits die Functionswerthe:

$$g(-\xi'_2), g(-\xi'_4), \ldots g(-\xi'_{2\nu-2})$$

wechselnd die Maxima und Minima sind.

Wenn nun die Summe der absoluten Werthe:

$$\left| f^{(n-1)}(\xi_{2k}) - f^{(n-1)}(\xi_{2k-2}) \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu)$$

ı $V\big(f^{(n-1)}(x)\big)$ und in analoger Weise die Summe der absoluten Werthe:

$$\left| g(-\xi'_{2k}) - g(-\xi'_{2k-2}) \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu')$$

ı $V\big(g(-x)\big)$ bezeichnet wird, wenn ferner $M\big(f^{(n-1)}(x)\big)$, $M\big(g(-x)\big)$ ıssen bedeuten, für welche in dem ganzen Intervalle $o < x < r$:

$$\left| f^{(n-1)}(x) \right| \leqq M\big(f^{(n-1)}(x)\big), \; g(-x) \leqq M\big(g(-x)\big)$$

bt, so ist gemäss der Gleichung (K_1):

$$(\mathrm{M}) \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx \leqq M\big(g(-x)\big)\, V\big(f^{(n-1)}(x)\big),$$

und gemäss der Gleichung (K_2):

$$\int_0^r f^{(n-1)}(x)\, g'(-x)\, dx \leqq M\big(f^{(n-1)}(x)\big)\, V\big(g(-x)\big).$$

Setzt man in dieser letzteren Ungleichheit $f^{(n)}(x)$ an die Stelle v $f^{(n-1)}(x)$ und $g(-x)$ an die Stelle von $g'(-x)$, so kommt:

$$(\mathrm{M}') \qquad \int_0^r f^{(n)}(x)\, g(-x)\, dx \leqq M\big(f^{(n)}(x)\big)\, V\Big(\int g(-x)\, dx\Big).$$

Die hier mit (M), (M′) bezeichneten Ungleichheiten werden u mittelbar evident, wenn man berücksichtigt, dass:

$$V\big(f^{(n-1)}(x)\big) = \int_0^r |\, f^{(n)}(x)\,|\, dx, \quad V\Big(\int g(-x)\, dx\Big) = \int_0^r |\, g(-x)\,|\, dx$$

ist; ihre eigentliche Bedeutung aber tritt erst dann hervor, we man die Bedeutung der mit V bezeichneten Grössen näher in's Au fasst.

Man kann nämlich $V\big(f^{(n-1)}(x)\big)$ als den Gesammtbetrag d Veränderungen charakterisiren, welche die Function $f^{(n-1)}(x)$ in de Intervalle von $x = 0$ bis $x = r$ erfährt, und die Ungleichheit (M) zei hiermit die wahre Bedeutung der allgemeinen Summenformel $(\mathfrak{S}')$ dari dass der Ausdruck rechts ohne das Restintegral den Werth d Summe mit wachsendem n immer genauer darstellt, sobald nur einerse die mit g bezeichneten Functionen ihrem Werthe nach stets in gewiss Grenzen eingeschlossen bleiben, und andererseits die durch weite Differentiation entstehenden Functionen f — wenigstens innerhalb d Summations-Intervalls — immer mehr an Veränderlichkeit verlier und sich also immer näher an eine Constante anschliessen. We zugleich die durch weitere Integration aus einander entstehenden Fu tionen $g(-x)$ immer kleinere Werthe erhalten, so wächst auch hie mit die Genauigkeit jener Darstellung.

Die Ungleichheit (M′) zeigt, dass die Werthverminderung des Re integrals der Summenformel $(\mathfrak{S}')$ mit wachsendem n auch durch d Verminderung der Werthe der Ableitungen $f^{(n)}(x)$ selbst bewirkt wi vorausgesetzt dass dabei die Veränderlichkeit der Functionen $g(-$ sich ebenfalls vermindert oder wenigstens nicht vergrössert.

Nimmt man in der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^n} \cos\left(2kx + v_k + \tfrac{1}{2}n\right)\pi,$$

welche die Function $g(-x)$ darstellt, $n = 2m$ und die Grössen v sämmtlich gleich Null, so ist die Anzahl der Maxima und Minima, durch welche die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (K_2) bestimmt wird, für jede der Functionen:

$$g(x)\,,\ g''(x)\,,\ g^{(4)}(x)\,,\ \ldots\ g^{(2m-2)}(x)\,,$$

d. h. also für jede der Reihen:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k}{(2k\pi)^{2h}} \cos 2kx\pi \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

nicht grösser als für die vorhergehende. Dies ist für den Fall der POISSON'schen Formel, d. h. für den Fall, dass sämmtliche Grössen a_k einander gleich sind, zuerst von Hrn. MALMSTEN in seiner oben citirten Abhandlung entwickelt worden, und es ist auch für den allgemeineren Fall in derselben Weise, wie dort, zu erschliessen.

Wenn nämlich $g^{(2h)}(x)$ innerhalb des Intervalls von $x = 0$ bis $x = 1$ genau μ Maxima und Minima hat, so hat $g^{(2h-1)}(x)$ in eben diesem Intervalle genau μ Nullstellen. Die Function $g^{(2h-1)}(x)$ hat also, da sie auch an den beiden Grenzen des Intervalls verschwindet, innerhalb dieses Intervalls mindestens $\mu + 1$ Maxima oder Minima. Die derivirte $g^{(2h-2)}(x)$ hat demzufolge eine gleiche Anzahl Nullstellen und daher wiederum mindestens μ Maxima und Minima, d. h. also mindestens ebenso viele als für die Function $g^{(2h)}(x)$ vorausgesetzt worden sind.

XIII. Von besonderem Interesse ist auch der specielle Fall, wo ausser den Grössen v_k noch eine Anzahl von den ersten Grössen a, z. B. $a_1, a_2, \ldots a_{s-1}$ gleich Null sind, die folgenden Grössen a aber sämmtlich einen und denselben von Null verschiedenen Werth haben,

Nimmt man nämlich in der mit $(\mathfrak{S}')$ bezeichneten allgemeinen Summenformel des art. VII:

$$n = 2m\,,\ v_1 = v_2 = \ldots = 0\,,$$
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{s-1} = 0\,,$$
$$a_s = a_{s+1} = a_{s+2} = \ldots = -2\,,$$

so wird:

$$g(-x) = (-1)^{m+1} \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}$$

$$g^{(2m-1)}(-x) = \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi} = \frac{1}{2} - x - \sum_{k=1}^{k=s-1} \frac{\sin 2kx\pi}{k\pi}$$

$$g^{(2m)}(-x) = \sum_{k=-s+1}^{k=s-1} \cos 2kx\pi = \frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}$$

$$\gamma_{2h} = (-1)^{h+1} \sum_{k=s}^{k=\infty} \frac{2}{(2k\pi)^{2h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{2}\,,\ \gamma_3 = \gamma_5 = \ldots = \gamma_{2m-1} = 0\,,\ \delta = 1\,,$$

und es resultirt die speciellere Summenformel:

$$(\mathfrak{S}'_0) \qquad \tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)=$$

$$\int_0^r f(x)\frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}dx+\sum_{h=1}^{h=m}\left(f^{(2h-1)}(0)-f^{(2h-1)}(r)\right)\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{(-1)^h 2}{(2k\pi)^{2h}}+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\sum_{k=s}^{k=\infty}\frac{2\cos}{(}$$

Hier wird nicht nur das Restintegral, sondern auch jedes d übrigen Glieder auf der rechten Seite, mit Ausnahme des ersten, u so kleiner, je mehr man s wachsen lässt; und die Formel liefe daher auch eine immer bessere Reihe für den Werth der Summe:

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r),$$

je grösser man die Zahl s annimmt. Vor Allem aber erscheint d Formel $(\mathfrak{S}'_0)$ wohl dadurch bemerkenswerth, dass sie eine Verbindu zwischen der Poisson'schen (oder Euler-Maclaurin'schen) Summe formel und zwischen derjenigen herstellt, welche Dirichlet in sein Abhandlung: »*Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation d séries finies ou infinies*« im XVII. Bande des Crelle'schen Journals (S. 6 angegeben, und von welcher er dort so interessante Anwendung gemacht hat. Während nämlich die Formel $(\mathfrak{S}'_0)$ einerseits für $s=$ mit der im art. VIII $(\mathfrak{S}'')$ angeführten Poisson'schen Formel identis wird, geht sie andererseits für den Grenzwerth $s=\infty$, für welch sich der Ausdruck auf der rechten Seite auf

$$\lim_{s=\infty}\int_0^r f(x)\frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}dx$$

reducirt, in die erwähnte Dirichlet'sche Summenformel über.

Ausgegeben am 27. August.

Berlin, gedruckt in der Reichsdrucker

Überreicht vom Verfasser.

820

Festschrift,

herausgegeben von der

Mathematischen Gesellschaft

in

Hamburg

anlässlich ihres

200jährigen Jubelfestes 1890.

Sonder-Abzug.

Über die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaufsschen Reihen. Von L. Kronecker.

Leipzig,
Druck von B. G. Teubner.
1890.

Über die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaufsschen Reihen.

(Von L. Kronecker.)

I. In der Dirichletschen Summenformel:

$$0)+f(1)+\cdots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)=\lim_{s=\infty}\int_0^r f(x)\sum_{n=-s}^{n=+s}\cos 2nx\pi dx,$$

he unmittelbar aus der Fourierschen Reihenentwickelung von $f(x)$ orgeht, kann der Ausdruck auf der rechten Seite durch:

$$\lim_{s=\infty}\int_0^r f(x)\sum_n e^{2nx\pi i}dx \qquad (-s-p\leqq n\leqq s+q)$$

zt werden, wo p, q beliebige positive ganze Zahlen bedeuten. ı hierbei ist nur das Aggregat:

$$i\int_0^r f(x)\sum_{n=-s}^{n=+s}\sin 2nx\pi dx$$

$$+\int_0^r f(x)\sum_m \cos 2mx\pi dx+i\int_0^r f(x)\sum_m \sin 2mx\pi dx$$

$$(-s-p\leqq m<-s,\quad s<m\leqq s+q)$$

ıgefügt, dessen erster Teil an sich gleich Null ist, während der Integrale:

$$\int_0^r f(x)\cos 2(s+h)x\pi dx,\quad \int_0^r f(x')\sin 2(s+h)x'\pi dx',$$

ıe den zweiten und dritten Teil bilden, für wachsende Werte : gleich Null wird. Führt man nämlich neue Integrationsvariabeln mittels der Substitutionen:

$$x=3rz-\frac{1}{4(s+h)},\quad x'=3rz'$$

ein und setzt zur Abkürzung $6r(s+h) = w$, so verwandeln sic beiden Integrale in folgende:

$$\text{(B)} \quad 3r\int_{\frac{1}{2w}}^{\frac{1}{2w}+\frac{1}{3}} f\left(3rz - \frac{3r}{2w}\right)\sin wz\pi dz, \quad 3r\int_{0}^{\frac{1}{3}} f(3rz')\sin wz'\pi dz'.$$

Nun ist aber nach jener berühmten Dirichletschen Abhandlung die Konvergenz der trigonometrischen Reihen[1]):

$$\lim_{w=\infty}\int_{0}^{\xi} F(z)\sin wz\pi dz = \tfrac{1}{2}\lim_{v=0}\sin v\pi F(v),$$

wenn $\xi \leqq \frac{1}{2}$ ist, die Variable v sich von der positiven her der Null nähert, und $\sin v\pi F(v)$ die a. a. O. von Dirichle gegebenen Bedingungen erfüllt. Jene beiden Integrale (B) n sich daher mit wachsendem Werte von w der Null, wenn — hier vorausgesetzt werden soll — $f(x)$ für endliche Werte von x lich bleibt und in jedem endlichen Intervalle nur eine endliche zahl von Maxima und Minima hat.

II. Nimmt man oben in (A) $p = 0$, $q = 2\lambda - 1$, $s = 2t\lambda$ λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und setzt dann $n = 2k\lambda$ so erhält man den Ausdruck (A) in folgender Form:

$$\lim_{t=\infty}\int_{0}^{r} f(x)\sum_{h,\,k} e^{2(2k\lambda+h)x\pi i}dx \quad \left(\begin{matrix}h=0,1,2,\ldots 2\lambda-\\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\end{matrix}\right.$$

und wenn endlich hierin $x - kr$ für x gesetzt wird, so nimm Dirichletsche Summenformel die Gestalt an:

$$\text{(C)} \quad \tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(r-1) + \tfrac{1}{2}f(r)$$
$$= \lim_{t=\infty}\sum_{h,\,k}\int_{kr}^{(k+1)r} f(x-kr)e^{2(2k\lambda+h)x\pi i}dx,$$
$$(h=0,1,2,\ldots 2\lambda-1;\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm t)$$

in welcher sie sich am besten zur Benutzung bei Summierung Gaufsschen Reihen eignet.

III. Wird für r eine gerade Zahl 2μ genommen, ferner Funktion $f(x)$ durch $e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}} f(x)$ ersetzt und hierbei $f(x)$ als perio

1) Crelles Journal Bd. 4, S. 157 und G. Lejeune Dirichlets Werke, Bd. I,

der Periode 2μ angenommen, so resultiert unmittelbar aus der chung (C) die Formel:

$$\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}} f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}} f(x) \sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{2hx\pi i} dx,$$

man erhält also, für ganz beliebige Werte von $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(2\mu-1)$ die Summe:

$$\sum_{k} e^{\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}} f(k) \qquad (k=0,1,2,\ldots 2\mu-1)$$

ch das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu} + (2\lambda-1)x\pi i} \cdot \frac{\sin 2\lambda x\pi}{\sin x\pi} f(x)dx$$

gedrückt, wenn nur die Funktion $f(x)$ aufserhalb des Intervalles 2μ) gemäfs der Periodicitätsgleichung $f(x) = f(x+2\mu)$ bemt wird.

IV. Nimmt man in der Formel (D) $f(k) = 1$ und führt auf der ten Seite eine neue Integrationsvariable mittels der Substitution:

$$x = y\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - h\frac{\mu}{\lambda}$$

wobei $\frac{\mu}{\lambda}$ und $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ als positiv anzunehmen sind, so erhält man fundamentale Relation:

$$\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi} = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| \sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{y^2\pi i} dy,$$

he eine Reciprocitätsbeziehung zwischen den zwei Gaufsschen Reihen:

$$\sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi}, \qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$$

tellt. Diese Relation hat Dirichlet nur für den besonderen Fall 2 aus seiner Summenformel abgeleitet, und dies genügt auch Wertbestimmung der Gaufsschen Reihen $\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{2k^2\pi i}{\mu}}$. Aber allgemeinere Relation (E) geht, wie sich hier gezeigt hat, so einfach aus der Dirichletschen Summenformel hervor, wie die

speciellere für $\lambda = 2$, und sie gewährt überdies den Vorteil, [illegible] unmittelbar zur Wertbestimmung der allgemeinen Gaufsschen Re[illegible] $\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu} k^2 \pi}$ zu führen.

V. Um dies näher darzulegen, bezeichne ich, wie in mein[illegible] Aufsatze „Über den vierten Gaufsschen Beweis des Reciprocit[illegible] gesetzes für die quadratischen Reste“[1]), mit $(\sqrt{re^{2vi}})$ den durch [illegible] Gleichung:

$$(\sqrt{re^{2vi}}) = |\sqrt{r}|\, e^{vi} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < v \leq [illegible]\right)$$

definierten Wert der Quadratwurzel aus einer komplexen Gröfse [illegible] und mit $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$ die durch die Gleichung:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{-\frac{\lambda i}{\mu} k^2 \pi}$$

definierte Gaufssche Reihe. Alsdann stellt sich die Relation (E), w[illegible] darin $-i$ für i gesetzt wird, in folgender Weise dar:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 \pi i} dy,$$

und da sich hieraus der Wert des Integrals, indem man $\lambda = 2$, μ [illegible] setzt, gleich $\frac{|\sqrt{2}|}{1+i}$ bestimmt, so resultiert die Hauptgleichung:

(F) $$\left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right).$$

Diese Gleichung ist allerdings nur unter der Voraussetzung, daf[illegible] positiv sei, abgeleitet worden, aber sie gilt offenbar auch für [illegible] Fall, dafs $\frac{\lambda}{\mu}$ negativ ist; denn, um dies einzusehen, braucht man [illegible] i in $-i$ zu verwandeln.

Da $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = 0$ ist, wenn λ und μ beide ungerade sind, so [illegible] darf es allein der Betrachtung der Gaufsschen Reihen:

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right),$$

und hierbei kann noch angenommen werden, dafs $\mu \equiv 1 \pmod 4$ [illegible] da ja gleichzeitig das Vorzeichen von λ und μ verändert werden k[illegible] ohne den Wert des Arguments ven G zu verändern. Setzt man n[illegible]

1) Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1880.

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right) = (\sqrt{\mu})\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right) = (\sqrt{2\lambda i})\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

stimmen die Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ mit den Legendre-Jacobischen
hen überein, welche sich auf diese Weise analytisch dargestellt
en.

Der Beweis dieser Übereinstimmung läfst sich genau so, wie ich
a dem erwähnten Aufsatze ausgeführt habe, aus den folgenden,
evidenten Grundeigenschaften der Gaufsschen Reihen G:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu} + 2i\right) = G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) \qquad (\lambda, \mu \text{ beliebige ganze Zahlen}),$$

$$G(2\lambda i) = 1, \quad G\left(\frac{\mu}{2i}\right) = 1 + i \qquad (\lambda, \mu \text{ ganze Zahlen und } \mu \equiv 1 \pmod 4),$$

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu\nu}\right) = G\left(\frac{\lambda\nu i}{\mu}\right) G\left(\frac{\lambda\mu i}{\nu}\right) \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ ganze Zahlen und zu einander prim}),$$

erbindung mit jener durch die Gleichung (F) dargestellten Haupt-
schaft derselben herleiten, und diese Gleichung (F) liefert als-
direkt die Reciprocitätsbeziehung für das allgemeinere Legendre-
bische Zeichen in der bemerkenswerten Form:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{(\sqrt{\mu})}{(\sqrt{2\lambda i})}\left(\sqrt{\frac{2\lambda i}{\mu}}\right),$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(1-\operatorname{sgn}.\lambda)(1-\operatorname{sgn}.\mu)},$$

, wie vorausgesetzt worden, $\mu \equiv 1 \pmod 4$ ist.

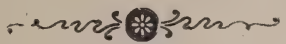
L.

VÝROČNÍ ZPRÁVA

k. vyššího gymnasia

v Jindřichově Hradci

za školní rok 1909—1910.



lad a srovnání hlavních způsobů, jakými se provádějí tak zvané ližné kvadratury. Napsal prof. JAN KUBÍČEK.

ředitelem c. k. školním radou Augustinem Pirchanem. Napsal prof. . KARTÁK.

olňky katalogu knihovny učitelské. Sestavil prof. RICH. PLICKA.

olní zprávy podává ředitel Dr. ANT. DECKER a sbor profesšorský.

Nákladem vlastním.

Tisk c. a k. dvorní knihtiskárny A. Landfrasa Syna v Jindř. Hradci.

Výklad a srovnání

avních způsobů, jakými se provádějí tak zvané přibližné kvadratury.

(Dokončení.)

e stati uveřejněné ve výroční zprávě c. k. českého gymnasia v Č. vicích za školní rok 1897-8 podány byly nejdříve všeobecné dějiny ur, načež vyloženy byly čtyři hlavní způsoby, jimiž se tak zvané é kvadratury provádějí a to: 1. methoda obdélníková, 2. lichoběžní-. Simpsonovo pravidlo a 4. interpolační methoda Cotesova. V ná-ím pojednání vyloženy budou ještě dvě methody a to Gaussova a a formule Eulerova.

V. Methoda Gaussova.*)

»Principiis« od Newtona čteme methodu, jakým způsobem lze počtem bodů položiti parabolickou křivku. Jest to analiticky interpolační z více členů nějaké řady najíti její člen obecný. Známější případ u-li vzdálenosti pořadnic daných bodů stejně velké, aneb analyticky tvoří-li hodnoty prvku tvořícího tu řadu, pro něž i hodnoty členů ých dány jsou, arithmetickou řadu. Úkon početní, jejž udává Newton, e se na všeobecnější případ, když intervally pořadnic daných bodů odnoty prvku tvořícího tu řadu libovolnými jsou. Newton užil toho ratury. Položil více body křivku, jejíž kvadratura určena býti měla, pořadnice vypočteny jsou, a jejíž kvadratura v těchže mezích, mezi vadratura dané křivky stanoviti se měla, přibližnou hodnotu dává. pojednal o tomto interpolačním problému a jeho užití na kvadratury odus differentialis« a byl mimo jiná pojednání ve vydání Amstero-m »Principia« od r. 1723 připojen.

auss ukázal, že vhodnou volbou úseček, pro něž se pořadnice vy-jí, stupeň přibližnosti lze zdvojnásobiti; poněvadž jest určení toto

---

A. Markoff: Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des integrales Mathematische Annalen XXV.) — R. Radau: Remarques sur la formule de quadra-Gauss. (Comptes Rendus hebdomadaires de scéances de l' Académie des Sciences. O. Callandreau: Sur la formule de quadrature de Gauss. (Comptes Rendus aires de scéances de l' Académie des Sciences. XC.) — F. August: Über die Ver-erung der Gauss'schen Methode der mechanischen Qnadratur. (Grunertův Archiv. - A. Pujet: Exposition nouvelle et généralisation de la méthode de Gauss pour cal-roximativement une intégrale définie. (Comptes Rendus hebdomadaires de scéances démie des Sciences. LXXXIV.)

od povahy křivky určené ke kvadrirování nezávislé, lze dle tak zd
lené methody tabulky zhotoviti, o něž se i Gauss pokusil. Gauss
ke svým výsledkům cestou těžké indukce, již tak zvanou Kästnerov
hodou — platí-li něco pro číslo n, totéž dokázati lze pro číslo (n +
k všeobecnosti povznésti lze.

Jednoduchou a přímou cestou lze přijíti k výsledkům, jež určil

Vezměmež integrál

$$\int y\,dx$$

v mezích

$$x = 0 \text{ a } x = 1.$$

Jiné meze lze lehce na tyto převésti. Buďtež zároveň hodnoty x, p
je y známo,

$$\alpha', \alpha'' \alpha''' \ldots\ldots \alpha^{(n)}$$

tak, aby, dosadíme-li

$$y = f(x),$$

příslušné hodnoty y byly

$$f(\alpha'), f(\alpha''), f(\alpha'') \ldots f(\alpha^{(n)}).$$

Utvořme součin

$$(x - \alpha')(x - \alpha'') \ldots\ldots (x - \alpha^{(n)})$$

a nazvěmež jej

$$\varphi(x),$$

pak máme, je-li

$$y = f(x)$$

celá rationální funkce stupně $(n - 1)^{ho}$, rozložením v částečné zlomk

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(\alpha')}{\varphi'(\alpha')(x-\alpha')} + \frac{f(\alpha'')}{\varphi'(\alpha'')(x-\alpha'')} + \frac{f(\alpha''')}{\varphi'(\alpha''')(x-\alpha''')} + \ldots\ldots + \frac{f(}{\varphi'(\alpha^{n})(}$$

kdež značíme tím

$$\varphi'(\alpha^{(m)})$$

hodnoty

$$\varphi'(x) = \frac{d\,\varphi(x)}{dx} \text{ pro } x = \alpha^{(m)}.$$

Tímto vzorcem najdeme násobením $\varphi(x)$ ihned y ze zvlášt
hodnot

$$x = \alpha', x = \alpha'', \ldots\ldots\ldots x = \alpha^{(n)}.$$

Stane-li se však y vyššího stupně než $(n-1)^{ho}$, pak dává vý
pravé straně znaménka rovnosti, jejž chceme G zváti, jen pravý
v nepravém $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ vězící, takže, je-li f (x) na př. stupně $(n + p)^{ho}$ a

$$f(x) = U + V\,\varphi(x),$$

kde je U nejvýše stupně $(n-1)^{ho}$,

V pak p^{ho};

$$G = \frac{U}{\varphi(x)}, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{U}{\varphi(x)} + V = G + V.$$

Rozvineme-li G a zlomek $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dle klesajících mocností x, má

$$G = \frac{U}{\varphi(x)}$$

ní, V positivní mocnosti toho x, jež jsou ve vyvinutí toho $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Položíme-li

$$(x) = \alpha + \alpha' x + \alpha'' x^2 + \ldots + \alpha^n x^n + \alpha^{n+1} x^{n+1} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha^{2n} x^{2n} + \ldots$$

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{A^{n+1}}{x^{2n}} + \ldots,$$

ne

$$^n) A' + \alpha^{(n+1)} (A' x + A'') + \alpha^{(n+2)} (A' x + A'' x^2 + A''') + \ldots$$
$$\ldots + \alpha^{(2n-1)} (A' x^{n-1} + A'' x^{n-2} + \ldots + A^{(n)}) + \ldots$$

nova přibližná methoda záleží v tom:

$$y = f(x)$$

i funkci

$$U = G\,\varphi(x).$$

b či rozdíl integrálů funkce dané a dosazené bude potom:

$$\Delta = \int y\,dx - \int U\,dx$$
$$= \int \varphi(x)\,V\,dx.$$

eličiny α', α'', ... $\alpha^{(n)}$ mají se tak stanoviti, aby chyba Δ byla co n malá aneb přibližnost co možná přesná. Kde se přibližné methody á v takových případech musejí součinitelé dosazené za y klesati rychle. ce prvních součinitelů v této řadě, jež jsou hlavními ve výrazu, pro u Δ zmizí, tím bude chyba všeobecně menší a přibližnost větší.

ežto ve výrazu pro

$$\Delta = \int \varphi(x)\,V\,dx$$

i telé od nullté mocniny až $(n-1)^{vé}$ zmizely, chceme vhodným n oněch veličin také členy opatřené součiniteli mocniny $n^{té}$ až $(2n-1)^{é}$ e nechati, čímž se stupeň přesnosti zdvojnásobí.

o bude vždy možno, poněvadž počet libovolných veličin a těch, jež kám vyhověti mají, týž jest. Takové určení toho $\varphi(x)$ jest třeba; o z výrazu nalezeného pro V;

integrály

$$\int \varphi\,(x)\,dx, \quad \int x\,\varphi\,(x)\,dx, \quad \int x^2\,\varphi\,(x)\,dx, \ldots \int x^{n-1}\,\varphi$$

v mezích $x = 0$ a $x = 1$, v nichž se integrál

$$\int y\,dx$$

vzíti má, zmizejí t. j.

$$\int_0^1 \varphi\,(x\,dx = 0$$

$$\int_0^1 x\,\varphi\,(x)\,dx = 0$$

$$\vdots$$

$$\int_0^1 x^{n-1}\,\varphi\,(x)\,dx = 0.$$

Vyhovíme tomu učiníce

$$\varphi\,(x) = \frac{d^{n+1}\,x^{n+1}\,(x-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}.$$

Integrál

$$\int x^p\,\varphi\,(x)\,dx$$

lze redukčním vzorcem na mnohonásobné integrály toho $\varphi\,(x)$ zpět p

Máme totiž:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int du \int v\,dx$$

$$\int du \int v\,dx = du \int^2 v\,dx - \int^2 du \int^2 v\,dx$$

$$\int^{2} du \int^{2} v\,dx = {}^{2}du \int^{3} v\,dx - \int^{3} du \int^{3} v\,dx$$

$$\int^{m} du \int^{m} v\,dx = {}^{m}du \int^{m+1} v\,dx - \int^{m+1} d\,u \int^{m+1} v\,dx,$$

ždý vzorec obdržíme, dáme-li

$$\frac{du}{dx} \text{ za } u \quad \text{a} \quad \int v\,dx \text{ za } v.$$

toho tedy ihned plyne:

$$v\,dx = u \int v\,dx - du \int^{2} v\,dx + {}^{2}du \int^{3} v\,dx - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{m}\,{}^{m}du \int^{m+1} v\,dx + (-1)^{m+1} \int^{m+1} du \int^{m+1} v\,dx.$$

že-li

$$u = x^{m} \qquad v = \varphi(x),$$

me z toho:

$$\int x^{m} \varphi(x)\,dx = x^{m} \int \varphi(x)\,dx - m\,x^{m-1} \int^{2} \varphi(x)\,{}^{2}dx + m(m-1)\,x^{m-2} \int^{3} \varphi(x)\,{}^{3}dx - \ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{m}\,m(m-1)(m-2)\ldots 1 \int^{m+1} \varphi(x)\,{}^{m+1}dx.$$

áme-li tomu m po sobě hodnoty 0, 1, 2, 3, ... n — 1, dostaneme:

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx$$

$$\int x\,\varphi(x)\,dx = x \int \varphi(x)\,dx - \int^{2} \varphi(x)\,{}^{2}dx$$

$$\int x^{2} \varphi(x)\,dx = x^{2} \int \varphi(x)\,dx - 2x \int^{2} \varphi(x)\,{}^{2}dx + 2 \int^{3} \varphi(x)\,{}^{3}dx$$

$$\int^{n-1} \varphi(x)\,dx = x^{n-1} \int \varphi(x)\,dx - (n-1)\,x^{n-2} \int^{2} \varphi(x)\,{}^{2}dx +$$

$$+(n-1)(n-2)\,x^{n-3}\int^{3}\varphi(x)\,dx^{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1}(n-1)(n-2)\ldots 1\int^{n}\varphi(x)\,dx^{n}.$$

Tyto vzorce jsou známy. Vidno z nich zároveň, že, mají-li:

$$\int\varphi(x)\,dx \quad \int x\,\varphi(x)\,dx, \quad \int x^{2}\varphi(x)\,dx, \quad \int x^{3}\varphi(x)\,dx, \ldots$$

$$\ldots\ldots \int x^{n-1}\varphi(x)\,dx$$

pro jisté meze zmizeti, mezi týmiž mezemi také

$$\int\varphi(x)\,dx, \quad \int\varphi(x)\,dx^{2} \ldots \int\varphi(x)\,dx^{n}$$

zmizeti musejí a opáčně.

Ježto však $(m+1)$ nanejvýše se rovná n, lze naznačené in vypočísti, neboť $\varphi(x)$ jest $(n+1)^{\text{nt}}$ derivace,
a dávají za výsledek polynomy, jež, obsahujíce v každém výrazu x a $1-x$ nejméně, jsou všecky malé na obou mezích, jak bylo

$$\int_{0}^{1} x^{m}\varphi(x)\,dx = 0.$$

Všechny kořeny rovnice

$$x^{m+1}(1-x)^{m+1} = 0$$

jsou realné;
$(n+1)$ z nich jsou rovny nulle a ostatních $(n+1)$ rovny jedné a jsou dle velmi známé poučky algebraické všechny kořeny postupnýc vací a zvláště kořeny $(n+1)$ prvních také realné a mezi nullou a obsaženy.

Tvar rovnice (1.) ukazuje, že kořeny rovnice

$$\varphi(x) = 0$$

dva a dva dohromady dávají jednu a, je-li jich číslo sudé, jeden rovná se $\frac{1}{2}$. Vezmeme-li tyto hodnoty za $x_0, x_1, \ldots x_n$, bude integrál nahražen tím

$$\int_{0}^{1} R\,dx;$$

R jsa polynomem stupně n^{ho}, který se stává rovným $\varphi(x)$ pro h $x_0, x_1, \ldots x_n$ proměnné,

touto podmínkou a rovná se

$$\sum_{0}^{n} \frac{\varphi(x_p)}{T_p} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{x - x_p},$$

í vyhovuje, učiníme-li

$$T_p = (x_p - x_0)(x_p - x_1) \ldots (x_p - x_{p-1})(x_p - x_{p+1}) \ldots (x_p - x_n)$$

řibližná hodnota integrálu $\int_0^1 \varphi(x)\,dx,$

ak míti tvar

$$\int dx = A_0 \varphi(x_0) + A_1 \varphi(x_1) + \ldots + A_n \varphi(x_n) \qquad 2.$$

de jsou hodnoty $x_0, x_1, \ldots x_n$ a logarithmy činitelů odpovídajících
: prvních hodnot n.

$n = 0$: $x_0 = 0{\cdot}5$; $A_0 = 1$;

$n = 1$: $x_0 = 0\,21132487$; $A_0 = A_1 = 0{\cdot}5$; $\log A_0 = 9\,6989700$*)
$x_1 = 0{\cdot}78867513$;

$n = 2$: $x_0 = 0\,11270165$; $A_0 = A_2 = \frac{5}{18}$; $\log A_0 = 9{\cdot}4436975$
$x_1 = 0{\cdot}5$;
$x_2 = 0{\cdot}88729835$; $A_1 = \frac{4}{9}$; $\log A_1 = 9{\cdot}6478175$

$n = 3$: $x_0 = 0{\cdot}06943184$; $A_0 = A_3 = 0{\cdot}1739274$; $\log A_0 = 9{\cdot}2403681$
$x_1 = 0{\cdot}33000948$; $A_1 = A_2 = 0{\cdot}3260726$; $\log A_1 = 9\,5133143$
$x_2 = 0{\cdot}66999052$;
$x_3 = 0{\cdot}93056816$;

$n = 4$: $x_0 = 0\,04691008$; $A_0 = A_4 = 0{\cdot}1184634$; $\log A_0 = 9{\cdot}0735843$
$x_1 = 0{\cdot}23076534$; $A_0 = A_3 = 0{\cdot}2393143$; $\log A_1 = 9{\cdot}3789687$
$x_2 = 0{\cdot}5$; $A_2 = 0{\cdot}2844444$; $\log A_2 = 9{\cdot}4539975$
$x_3 = 0{\cdot}76923466$;
$x_4 = 0{\cdot}95308992$;

$$\log \varphi(x_2) = 9{\cdot}823908741$$
$$\log A_2 = 9{\cdot}453997456$$
$$\log \varphi(x_2) + \log A_2 = 9{\cdot}277906197$$
$$A_2\, \varphi(x_2) = 0{\cdot}18962965;$$

$$\log \varphi(x_3) = 9{\cdot}7522146$$
$$\log A_3 = 9{\cdot}3789687$$
$$\log \varphi(x_3) + \log A_3 = 9{\cdot}1311833$$
$$A_3\, \varphi(x_3) = 0{\cdot}13526433;$$

$$\log \varphi(x_4) = 9{\cdot}7092778$$
$$\log A_4 = 9{\cdot}0735843$$
$$\log \varphi(x_4) + \log A_4 = 9\,7828621$$
$$A_4\, \varphi(x_4) = 0{\cdot}060654375.$$

$n = 5$: $x_0 = 0{\cdot}03376524$; $A_0 = A_5 = 0{\cdot}0856622$; $\log A_0 = 8{\cdot}9327895$;
$x_1 = 0{\cdot}16939531$;
$x_2 = 0{\cdot}38069041$; $A_1 = A_4 = 0{\cdot}1803808$; $\log A_1 = 9{\cdot}2561903$;
$x_3 = 0{\cdot}61930959$; $A_2 = A_3 = 0{\cdot}2339570$; $\log A_2 = 9{\cdot}3691360$.

*) K vůli krátkosti bude u logarithmů vynecháno vzadu — 10.

$x_4 = 0{\cdot}83060469;$
$x_5 = 0{\cdot}96623476;$

Užijme methody Gaussovy na integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1\,2 = 0{\cdot}69314718056.$$

Zde máme podrobný výpočet, učiníme-li $n = 4$.

$$\begin{array}{r} \log \varphi\,(x_0) = 9{\cdot}98009062 \\ \log A_0 = 9{\cdot}07358435 \\ \hline \log \varphi\,(x_0) + \log A_0 = 9{\cdot}05367497 \\ A_0\,\varphi\,(x_0) = 0{\cdot}11315532 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \varphi\,(x_1) = 9{\cdot}9098247 \\ \log A_1 = 9{\cdot}3789687 \\ \hline \log \varphi\,(x_1) + \log A_1 = 9{\cdot}2887934 \\ A_1\,\varphi\,(x_1) = 0{\cdot}19444350 \end{array}$$

Užijeme-li vzorce (2.) uvedeného na stránce 9., dostaneme, jež

$$\begin{array}{r} A_0\,\varphi\,(x_0) = 0{\cdot}11315532 \\ A_1\,\varphi\,(x_1) = 0{\cdot}19444350 \\ A_2\,\varphi\,(x_2) = 0{\cdot}18962965 \\ A_3\,\varphi\,(x_3) = 0{\cdot}13526433 \\ A_4\,\varphi\,(x_4) = 0{\cdot}06065438 \\ \hline \int_2^1 \frac{dx}{1+x} = \qquad 0{\cdot}69314718 \end{array}$$

Vezměmež za druhý příklad integrál

$$\int_0^1 \frac{1\,(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\,1\,2 = 0{\cdot}272198612879$$

a budiž $n = 4$.

Zde budeme míti $\varphi = \dfrac{\log (1+x)}{1+x^2}$ a

$x_0 = 0{\cdot}04691008;$ $x_1 = 0{\cdot}23076534;$
$x_2 = 0{\cdot}5$ $x_3 = 0{\cdot}76923466;$ $x_4 = 0{\cdot}95308992.$

$$\begin{array}{r} \log \varphi\,(x_0) = 8{\cdot}6603188 \\ \log A_0 = 9{\cdot}0735843 \\ \hline \log \varphi\,(x_0) + \log A_0 = 7{\cdot}7339031 \\ A_0\,\varphi\,(x_0) = 0{\cdot}00541880; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \varphi\,(x_1) = 9{\cdot}2947709 \\ \log A_1 = 9{\cdot}3789687 \\ \hline \log \varphi\,(x_1) + \log A_1 = 8{\cdot}6737396 \\ A_1\,\varphi\,(x_1) = 0{\cdot}04717801; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \varphi\,(x_2) = 9{\cdot}5110435 \\ \log A_2 = 9{\cdot}4539975 \\ \hline \log \varphi\,(x_2) + \log A_2 = 8{\cdot}9650410 \\ A_2\,\varphi\,(x_2) = 0{\cdot}09226584; \end{array}$$

$$\log \varphi\,(x_3) = 9{\cdot}5544240$$
$$\log A_3 = 9{\cdot}3789687$$
$$\log \varphi\,(x_3) + \log A_3 = 8{\cdot}9333927$$
$$A_3\,\varphi\,(x_3) = 0{\cdot}08578132;$$

$$\log \varphi\,(x_4) = 9{\cdot}5450289$$
$$\log A_4 = 9{\cdot}0735843$$
$$\log \varphi\,(x_4) + \log A_4 = 8{\cdot}6186132$$
$$A_4\,\varphi\,(x_4) = 0{\cdot}4155404;$$

Jžitím vzorce 2. uvedeného na str. 9, dostaneme:

$$\int_0^1 \frac{l\,(1+x)}{1+x^2}\,dx = 0{\cdot}27219801,$$

lo přešně na šest desetinných míst vypočítáno.

VI. Formule Eulerova.

Z řady Maclaurinovy odvodil Euler formuli uhlazenou a často užíc pro přibližný výpočet integrálů omezených. Máme, ať je $\varphi\,(x)$ jakékoli:

$$\cdot h) - \varphi\,(x) = h\,\varphi'\,(x) + \frac{h}{2}\left[\varphi'\,(x+h) - \varphi'\,(x)\right] +$$
$$- \frac{h^2}{12}\left[\varphi''\,(x+h) - \varphi''\,(x)\right] + \frac{h^4}{720}\left[\varphi^{IV}\,(x+h) - \varphi^{IV}\,(x)\right] + \qquad 3.$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{B_n\,h^{2n}}{1.2.3.\ldots 2n}\left[\varphi^{2n}\,(x+h) - \varphi^{2n}\,(x)\right] + \ldots\ldots,$$

B_n značí $n^{té}$ číslo Bernoulliho.*)

Formule tato odvodila se z methody neurčitých součinitelů; byly tedy nky přesnosti a sbíhavosti pominuty, proto jest třeba přesnějšího a tšího důkazu.

Nejdřív dokážeme znova formuli Taylorovu a dáme výrazu zbytku ý var.

Máme, ať je $\varphi\,(x)$ jakékoliv, identicky:

$$\varphi\,(x+h) - \varphi\,(x) = \int_x^{x+h} \varphi'(z)\,dz,$$

ložíme-li $\qquad z = x + h - u$

$$\varphi\,(x+h) - \varphi\,(x) = \int_0^h \varphi'\,(x+h-h)\,du.$$

---

*) Uvedeme zde některá čísla Bernoulliho:

$$B_1 = \frac{1}{6};\ B_2 = \frac{1}{30};\ B_3 = \frac{1}{42};\ B_4 = \frac{1}{30};\ B_5 = \frac{5}{66};\ B_6 = \frac{691}{2730}\ \ldots\ldots$$

Integrujíce po částech a vztahujíce integraci k
du, udu, $u^2 du$ . . . . . shledáváme:

$$\int_0^h \varphi'(x+h-u)\,du = h\,\varphi'(x) + \int_0^h u\,\varphi''(x+h-u)\,du$$

$$\int_0^h u\,\varphi''(x+h-u)\,du = \frac{h}{2}\varphi''(x) + \int_0^h \frac{u^2}{2}\,\varphi'''(x+h-u)\,du$$

$$\int_0^h \frac{u^2}{2}\varphi'''(x+h-u)\,du = \frac{h^3}{1.2.3.}\varphi'''(x) + \int_0^h \frac{u^3}{1.2.3.}\,\varphi^{IV}(x+h-u)\,du$$

— — — — — — — — — — — — — — —

Z toho soudíme:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2.}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3.}\varphi'''(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^n}{1.2.3.\ldots n}\varphi^n(x) + \int_0^h \frac{u^n}{1.2.3.\ldots n}\,\varphi^{n+1}(x+h-u)\,du$$

To je přesná formule Taylorova, v níž zbytek (n + 1) prvních doplňující jest omezeným integrálem vyjádřen.

K odvození rozvinutí výše připomenutého z této formule dos v rovnici:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\,\varphi'(x) + \frac{h^2}{12}\varphi''(x) + \frac{h^3}{123}\varphi'''(x) +$$

$$\ldots + \frac{h^{2n}}{1.2.3.\ldots 2n}\varphi^{2n}(x) + \int_0^h \frac{u^{2n}}{1.2.3.\ldots 2n}\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du$$

postupně za $\varphi(x)$, jež zůstává libovolným,

$$\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \varphi'''(x) \ldots\ldots\ldots \varphi^{2n-1}(x),$$

a zmenšemež pokaždé dovolený počet výrazů zachovaných ve druhém o jednu jednotku, takže $\varphi^{2n+1}(x+h-u)$ vyskytuje se ve všec sledních výrazech pod znamením integrace; dostaneme pak:

$$\varphi'(x+h) - \varphi'(x) = h\,\varphi''(x) + \frac{h^2}{1.2.}\varphi'''(x) + \ldots + \frac{h^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}$$

$$+ \int_0^h \frac{u^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)}\varphi^{2n+1}(x+h-$$

$$\varphi''(x+h) - \varphi''(x) = h\,\varphi'''(x) + \frac{h^2}{1.2.}\varphi^{IV}(x) + \ldots + \frac{h^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\varphi^{2n}$$

$$+\int_0^h \frac{u^{2n-2}}{1.2.3.\ldots.(2n-2)}\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du;$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\varphi^{2n-1}(x+h)-\varphi^{2n-1}(x)=h\,\varphi^{2n}(x)+\int_0^h u\,\varphi^{2n+1}(x+h-u)\,du.$$

ložme shodujíce se s obvyklým označením:

$$q^p(x+h)-q^p(x)=\Delta q^p(x),$$

íjme předešlé rovnice, do jichž počtu třeba i rovnici 4. bráti, když i byli násobili

$$1;\ A_1 h;\ A_2 h^2;\ \ldots\ldots\ A_{2n-1} h^{2n-1},$$

mne-li konstanty $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n-1}$ tak, aby z druhého členu zmizely ve $q'(x), q''(x) \ldots\ldots q^{2n}(x)$, dostaneme pak:

$$\varphi+A_1 h\,\Delta q'(x)+A_2 h^2\,\Delta q'(x)+\ldots\ldots A_{2n-1} h^{2n-1}\,\Delta\varphi^{2n-1}(x)=$$

$$=h\,q'(x)+\int_0^h \varphi^{2n+1}(x+h-u)\,F(u)\,du. \qquad 5.$$

Položíme-li: $F(u)=\frac{u^{2n}}{1.2.3.\ldots.2n}+A_1\frac{hu^{2n-1}}{1.2.3.\ldots.(2n-1)}+\ldots\ldots$

$$\ldots\ldots+A_{2n-1}uh^{2n-1}, \qquad 6.$$

součinitelé $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_{2n-1}$

rovnicemi: $A_1+\frac{1}{1.2.}=0$

$$A_2+\frac{A_1}{1.2.}+\frac{1}{1.2.3.}=0$$

— — — — — — — —

$$A_{2n-1}+\frac{A_{2n-2}}{1.2.}+\frac{A_{2n-3}}{1.2.3.}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3.\ldots.2n}=0$$

eme-li $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ čísly Bernoulliho, jest těmto relacím vy-, vezmeme-li:

$A_1=-\frac{1}{2}$; $A_2=\frac{1}{2}B_2$; $A_3=0$

$A_4=-\frac{1}{1.2.3.4.}B_2$ $A_5=0$; $A_6=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.}B_4$;

$=0$); $A_8=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.}B_4$; $A_9=0$;

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}B_5, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\ldots\ldots A_{2n-2}=(-1)^n\frac{1}{1.2.3.\ldots.(2n-2)}B_{n-1};\quad A_{2n-1}=0.$$

ovnice 5. promění se v:

$$\tfrac{1}{2}h\,\Delta\varphi'(x)+\frac{1}{1.2.}B_1 h^2\,\Delta\varphi''(x)+\ldots+\frac{(-1)^n}{1.2.3.\ldots.(2n-2)}B_{n-1}h^{2n-2}\,\Delta^{2n-2}\varphi(x)=$$

$$= h\,\varphi'(x) + \int_0^h \varphi^{2n+1}(x+h-u)\,F(u)\,du,$$

kdež F (u) značí funkci 6, již lze napsati:

$$F(u) = \frac{h^{2n}}{1.2.3.\ldots(2n-1)}\left[\frac{\left(\frac{u}{h}\right)^{2n}}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{h}\right)^{2n-1} + \frac{B_1}{1.2.}\left(\frac{u}{h}\right)^{2n-2}(2n-\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n B_{n-1}\left(\frac{u}{h}\right)^{2}-\right.$$

Činitel v závorkách jest mnohočlen, jenž vyjadřuje součet m (2n — 1) prvních (n — 1) čísel celých, v níchž u jest nahraženo tím

$$F(u) = \frac{h^{2n}}{1.2.3.\ldots(2n-1)}\,\varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right).$$

Rozvinutí do nekonečna jest jen tehdy na místě, jestli zbytek:

$$\frac{h^{2n}}{1.2.3.\ldots(2n-1)}\int_0^h \varphi^{2n+1}(x+h-u)\,\varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)du$$

směřuje k nulle, roste-li u nekonečně; mění-li se u od 0 k h, mění od 0 k 1.

Činitel $\varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)$ nemění znaménka a lze tedy druhého $\varphi^{2n+1}(x+h-u)$ ze znamení integračního vyjmouti, nahradíme-li střední hodnotou $\varphi^{2n+1}(x+\Theta h)$,
takže integrál zbytek vyjadřující rovná se

$$\frac{h^{2n}}{1.2.3.\ldots(2n-1)}\,\varphi^{2n+1}(x+\Theta h)\int_0^h \varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)du.$$

Máme však: $\varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n}\,\frac{d\,\varphi_{2n}(x)}{dx} - (-1)^n B_n$

tedy: $\int_0^h \varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)du = \int_0^h \frac{1}{2n}\,\frac{d\varphi_{2n}\left(\frac{u}{h}\right)}{du}\,h\,du - (-1)^n \int_0^h B$

t. j., ježto $\varphi_{2n}\left(\frac{u}{h}\right)$ není nullou pro u = h a u = 0:

$$\int_0^h \varphi_{2n-1}\left(\frac{u}{h}\right)du = -h\,(-1)_n B^n,$$

a zbytek řady Maclaurinovy, určíme-li jej výrazem na $\Delta\varphi^{2n-2}(x)$,

$$\frac{(-1)^{n+1}\,h^{n+1}}{1.2.3.\ldots 2n}\,\varphi^{2n+1}(x+\Theta h)\,B_n$$

Čísla Bernoulliho rostou pak s n tak rychle, že vzorec Macla do nekonečna prodloužený jest vůbec nepřesný. V přibližném počítán

ce výhodnou zvláštní odchylkou. Doplňovací výraz i tehdy, roste-li e zajisté velmi malý pro málo značné hodnoty n. Výraz 7. bude i, a bude jej lze v největším počtu případů zanedbati pro jisté t n, a vzorec na malý počet výrazů obmezený zanechá toliko ne- chybu. Máme ku př.:

$$\frac{B_{10}}{1.2.3.\ldots.20} = 0{\cdot}00000000000000021749.$$

ožíme-li: $\varphi'(x) = f(x)$,

ne: $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx$,

3. dá: $$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = h\,f(x) + \tfrac{1}{2}h\,\Delta f(x) - \tfrac{1}{2}B_1 h^2 \Delta f'(x) + \frac{1}{1.2.3.4.} B_2 h^4 \Delta f'''(x) \ldots\ldots\ldots 8.$$

jeme-li tohoto vzorce k funkci:
$f(x) = 1\,\Gamma(x)$, najdeme:

$$(x)\,dx = h\,1\Gamma x + \tfrac{1}{2}h\,\Delta 1\,\Gamma(x) + \tfrac{1}{2}B_1 h^2 \frac{\Delta\,\mathrm{dl}\,\Gamma(x)}{dx} + \ldots.$$

ožíme-li $h = 1, \quad x = 0,$

$$\Delta\,1\,\Gamma(x) = 1\Gamma(x+1) - 1\Gamma(x) = 1x$$

$$\frac{\Delta\,\mathrm{dl}\,\Gamma(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta\,\mathrm{d}^2 1\,\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2}$$

— — — — — — —

$$\int_x^{x+1} 1\,\Gamma(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\,1\,2\pi + x\,1x - x;$$

ně: $$1\,\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\,1\,2\pi - x + (x - \tfrac{1}{2})\,x + \tfrac{1}{2}\frac{B_1}{x} + \frac{1}{3.4}\frac{B_2}{x^3} + \frac{1}{5.6}\frac{B_3}{x^5} + \ldots\ldots$$

nule 8. ve výpočtu integrálů omezených zajímavá vyjadřuje se n jiným tvarem. Jest zajisté tím přesnější, čím hodnota h bude roto často dělíme před jejím užitím integrál ve více jiných, jichž s i užší.

ne, položíme-li: $b - a = nh$,

$$(x)\,dx = \int_a^{a+h} \varphi(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} \varphi(x)\,dx + \ldots\ldots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} \varphi(x)\,dx,$$

a užijeme-li formule 8. na každý z integrálů, které skládají dru
najdeme dle zřejmých redukcí:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = h\left[\varphi(a)+\varphi(a+h)+\ldots\ldots+\varphi(a+nh)\right]+$$

$$-\frac{1}{2}h\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right]-\frac{1}{2}B_1 h^2\left[\varphi'(b)-\varphi'(a)\right]+$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.}B_2 h^4\left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right]-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.}B_3 h^6\left[\varphi^V(b)-\varphi^V(\right.$$

Učiníme-li $n = 1$,

máme: $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right]-\frac{B_1(b-a)^2}{1.2}\left[\varphi'(b)-\varphi\right.$$

$$+\frac{B_2(b-a)^4}{1.2.3.4}\left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right]-\frac{B_3(b-a)^6}{1.2.3.4.5.6}\left[\varphi^V(b)-\varphi^V(a)\right]+$$

a odvodíme-li $\varphi'(b)-\varphi'(a)$

této rovnice pro dosazení do rovnice 9., najdeme, podotkneme-li, ž

$b-a=nh$

$$\int_a^h \varphi(x)\,dx = \frac{nh}{2(n^2-1)}\left\{2n\sum_{K=1}^{K=n-1}\varphi(a+kh)+(n-1)\left[\varphi(b)+\varphi(\right.\right.$$

$$-\frac{B_2 n^2 h^4}{1.2.3.4.}\left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right]+\frac{B_3 n^4 h^6}{1.2.3.4.5.6.}(n^4-1)\left[\varphi^V(b)-\varphi^V\right.$$

Užijeme-li libovolného čísla n a srovnáme-li mezi sebou o
vzorce, lze utvořiti velký počet zajímavých výsledků.

Položíme-li: $b-a=p=8\Theta$

a učiníme-li následovně: $n=2;\quad n=4;\quad n=8,$

obdrželi bychom následující tři vzorce:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{4\left[\varphi(a+4\Theta)+\varphi(a)+\varphi(b)\right]\right\}-\frac{B_2(b-a)^4}{4.1.2.3.4}\left[\varphi'''(b)-\right.$$

$$+\frac{5B_3(b-a)^6}{16.1.2.3.4.5.6.}\left[\varphi^V(b)-\varphi^V(a)\right];$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{30}\left\{\left[8\varphi(a+2\Theta)+\varphi(a+4\Theta)+\varphi(a+6\Theta)\right]\right\}+$$

$$+3\left[\varphi(a)+\varphi(b)\right]-\frac{B_2(b-a)^4}{4.1.2.3.4}\left[\varphi'''(b)-\varphi'''(a)\right]+$$

$$+\frac{17B_3(b-a)^6}{256.1.2.3.4.5.6.}\left[\varphi^V(b)-\varphi^V(a)\right];$$

$$\frac{b-a}{120}\left\{16\left[\varphi\,a+\Theta)+\varphi\,(a+2\Theta)+\ldots\varphi\,(a+7\Theta)\right]\right\}+7\left[\varphi\,a)+\varphi\,b)\right]+$$

13.

$$\frac{(b-a)^4}{1.2.3.4.}\left[\varphi'''\,(b)-\varphi'''\,(a)\right]+\frac{65\,B_3\,(b-a)^6}{4096.1.2.3.4.5.6}\left[\varphi^{V}\,(b)-\varphi^{V}\,(a)\right].$$

Spojíme-li tyto rovnice, abychom vyloučili $\varphi'''(b)-\varphi'''(a)$, najdeme:

$$\varphi\,)\,dx=\frac{p}{90}\left\{7\left[\varphi\,(a)+\varphi\,(b)\right]+32\left[\varphi\,(a+2\Theta)+\varphi\,(a+6\Theta)\right]+\right.$$

$$\left.\varphi a+4\Theta)\right\}-\frac{B_3\,p^6}{64.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}\left[\varphi^{V}\,(b)-\varphi^{V}\,(a)\right];\qquad 14.$$

$$\varphi\,)\,dx=\frac{p}{1890}\left\{77\left[\varphi\,(a)+\varphi\,(b)\right]+320\left[\varphi\,(a+2\Theta)+\varphi\,(a+3\Theta)\right]+\right.$$

$$\left.a+5\Theta)+\varphi\,(a+7\Theta)\right]\right\}+\frac{152p}{1890}\left[\varphi\,(a+2\Theta)+\varphi\,(a+4\Theta)+\varphi\,(a+6\Theta)\right]+$$

15.

$$-\frac{B_3\,p^6}{1024.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}\left[\varphi^{V}\,(a)-\varphi^{V}(a)\right]$$

Známe-li $\varphi^{V}(b)-\varphi^{V}(a)$

$$)\,dx=\frac{p}{5670}\left\{217\left[\varphi\,(a)+\varphi\,(b)\right]+352\left[\varphi\,(a+2\Theta)+\varphi\,(a+6\Theta)\right]\right.$$

16.

$$\left.\varphi\,(a+4\Theta)\right\}+\frac{1024p}{5670}\left[\varphi\,(a+\Theta)+\varphi\,(a+3\Theta)+\varphi\,(a+5\Theta)+\right.$$

$$\left.+\varphi\,(a+7\Theta)\right].$$

Užijme různých těchto vzorců k vyhledání integrálu:

$$\int_0^1\frac{1\,(1+x)}{x}dx=\frac{\pi^2}{12}=0{\cdot}82246703341$$

V omto případě máme: $a=0,\ b=1,\ p=1;$

$\varphi\left(\frac{1}{8}\right)=0{\cdot}942264285;$ $\qquad$ $\varphi\left(\frac{2}{8}\right)=0\,892574205;$

$\varphi\left(\frac{3}{8}\right)=0{\cdot}849209950;$ $\qquad$ $\varphi\left(\frac{4}{8}\right)=0{\cdot}810930216;$

$\varphi\left(\frac{5}{8}\right)=0{\cdot}776812505;$ $\qquad$ $\varphi\left(\frac{6}{8}\right)=0{\cdot}746154384;$

$\varphi\left(\frac{7}{8}\right)=0{\cdot}718409896;$ $\qquad$ $\varphi\,(1)=0{\cdot}693147181.$

Vzorec 11. zredukovaný na první svůj výraz dává:

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = \frac{1}{6}\left[\varphi(0)+\varphi(1)+4\varphi\left(\frac{4}{8}\right)\right] = \frac{1}{6}(1{\cdot}69315 + 3{\cdot}2437$$

$$= 0{\cdot}82281$$

a chyba zasahuje čtvrtou číslici.

Rozdělíme-li integrál ve čtyři jiné vzaté v mezích

0 a $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ a 1

a užijeme-li ke každému vzorce 11., našli bychom:

$$24\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 4.\ 3{\cdot}2866966 + 2.\ 2{\cdot}449658805 + 1{\cdot}6931$$

$$= 19{\cdot}739251335,$$

tedy $$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 0{\cdot}822488806$$

a chyba začíná na šestém místě desetinném.

Vzorec 14. redukovaný na první výraz dává:

$$90\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 7.\ 1{\cdot}6931472 + 32.\ 1{\cdot}6387286 + 12.\ 0{\cdot}810$$

$$= 74{\cdot}0225077,$$

tedy $$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 0{\cdot}8224712$$ se čtyřmi přesnými místy

Rozdělíme-li integrál na dva jiné v mezích 0 a $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ a 1, m

$$180\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 7.\ 3{\cdot}315007613 + 32.\ 3{\cdot}286696636 + 12.\ 1{\cdot}638$$

$$+ 14.\ 0{\cdot}810940216 = 148{\cdot}04407725$$

totiž $$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = \frac{148{\cdot}04407725}{180} = 0{\cdot}822467096;$$

výsledek přesný na šest míst desetinných.

Vzorec 16. dává konečně:

$$5670\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}dx = 217.\ 1{\cdot}693147181 + 1024.\ 3{\cdot}2866966$$

$$+ 352.\ 1{\cdot}638728589 + 436.\ 0{\cdot}810930216,$$

$$\int_0^1 \frac{1\,(1-x)}{x}dx = 0{\cdot}822467078,$$

est sedm míst desetinných přesných.

de uvedeny byly jen ty nejdůležitější způsoby, dle nichž určiti lze ně ploský obsah nějakého obrazce. Mimo tyto methody jest ještě jiných. Ploský obsah nějakého obrazce určiti lze způsobem mecha- a to buď tak zvanými planimetry, jichž se užívá v měřictví prak- — tyto integrují buď v pravoúhlých neb polárních souřadnicích — akreslí se na papíru plocha, opatrně vystřihne a zváží. Při tomto ní ploského obsahu přibližně ustanoviti třeba, co váží jednotka čtver- apíru; tohoto způsobu užívá se tam, kde jsou váhy chemické a plani- chází.

idíme tedy, že ku stanovení ploského obsahu nějakého obrazce jak- omezeného máme velmi mnoho způsobů, jichž se dle potřeby užívá.

Za c. k. školním radou Aug. Pirchanem.

Dne 24. září 1909 uložena na hřbitově sv. Trojice v Písku t schránka c. k. školního rady, jub. ředitele gymnasia našeho p. Aug Pirchana k odpočinku, aby očekávala slavného vzkříšení. Doprovo četné intelligentní obecenstvo písecké, doprovodila ji velká rodina z lého, město naše zastupoval starostův náměstek p. Fr. Kopidlanský s radním komorním radou p. R. Šetkou, gymnasium pak ředitel Dr. Ant. I s pisatelem těchto řádek.

Když se životní pouť zesnulého chýlila k západu, vzdálil se o tělem, ale duch jeho lianou lásky zůstával s námi spojen, nerušeně vzdálí pozoruje, jak símě rozumem jeho zasívané a dechem srdce jel hřívané vzrůstá, vzkvétá, plod přináší, někde pohříchu, jak v tomto slz údolí ani jinak býti nemůže, i v metlici se zvrhá.

Roku 1826 dne 17. prosince v Pelhřimově narozen, zdědil neoch zdraví po matce; dožilať se tato za podpory synovy skoro 100 let. Č nadaného hocha ujal se strýc jeho, farář na patronátě arcibiskupsk ve farském ovzduší doby tehdejší vsála do sebe citlivá duše jinochova n povznesenost, nadšenost a upřímnost, vlastnosti to, kterými všechen život jeho se skvěl, jichž plápolu neutlumila nikdy prosa tohoto svět

Vystudovav dvě třídy gymnasijní v Mostě a čtyři v Něm. Brodě solvoval filosofii v Praze a vstoupil na fakultu medicinskou. Na ní st rok 1848. Již z let studentských pamatuji se, kterak při každé na zmínce o roku tom oko jeho nejprve radostně zazářilo, ale hned p zachmuřilo, zajisté že mihly se v něm tak všecky ty radostné na trpká zklamání času onoho. — Po uklidnění vln rokem tím rozčeř oddal se celou duší na nově organisované fakultě filosofické studiu pisu a zeměpisu a již léta 1850 prohlášen vědeckou komissí v Pra výborně způsobilého k vyučování dějepisu a zeměpisu na vyšších gy siích a latině na nižších. — Na staroměstském gymnasiu odbývá s zkušební a hned léta potomního 1851 jmenován skutečným učitele gymnasiu našem po Václavu Zeleném, jenž byl odtud povolán na gy sium akademické v Praze.

V úřadě tom působil zde nepřetržitě 30 let, tiše sice a nehlučně zato jako teplý, tichý dešť tím požehnaněji a záslužněji. Jak oprav k božstvu svému oddaností a úctou zanícený kněz uváděl s neúna láskou, které nic není za těžko, žáky své do velikolepé svatyně světla pravdy, svědkyně časův, učitelky života. Se vzácnou živostí, jí dařen byl jako málo kdo jiný, předváděl před jejich oči napiatou pozo a zájmem hořící poutavě a napínavě dějiny lidstva a zvláště naší neustále navzájem je srovnávaje, k příčinám a následkům jejich zřetel ceje a na poměry nynější je applikuje. Zejména neocenitelné byly příp vtipné stručné poznámky jeho o jednotlivých událostech a osobách rických, jež zajisté nesmazatelně se vryly v mysl vnímavějších jeho chačů. Na teleologickém principu dějin světových jako na skále pevně dával jasněji a jasněji žákům svým patřiti, jak dějinami prozařuje dob moudrost Ducha Nejvyššího, která dosáhá od konce až do konce n a řídí všecko líbezně; tak pomáhal jim otcovsky, aby si budovali j

ný názor světový. Vléval v srdce jejich úctu k minulosti, lásku k pří-
osti, ku všem těm drahocenným statkům doby naší, které krví a potem
ů nejlepších a nejšlechetnějších jsou vykoupeny, a zapaloval je touhou
sil přispěti něčím k tomu bohatému odkazu pravdy a mravnosti, jejž
po předcích zdědili, a tak zavěsiti svou pomíjející bytost, třebaže jména
nikdo z budoucích nebude znáti, sebe menším článečkem na tom ne-
ném řetězu vinoucím se všemi pokoleními lidskými.

A tuto svou činnost učitelskou podporoval a doplňoval i knihovnickou,
ovněž po celých 30 let laskavým a obětavým správcem knihovny pro-
rské a studentské. Žáky k pilné četbě pobádal, dle schopností jejich
jim knihy do rukou dával a se přesvědčoval, jak jim porozuměli. Mám
že nic nepravdivého neřeknu, pravím-li, že u valné míře i jeho při-
ím studující gymnasia jindřichohradeckého vyznamenávali se láskou
ratuře a znalostí její.

Také formy dbal dále jako vychovatel dokonalý co nejsvědomitěji. Mnoho
učoval filosofické propaedeutice, vždy pak při každé příležitosti k tomu
leznou vytrvalostí přihlížel, aby žáci vyjadřovali se logicky, jasně.
telem byl frasovitosti; hnusilo se mu »zabíjení myšlenky slovy;« ač byl,
sme se již zmínili, letory velice živé, nevyšlo snad nikdy z úst jeho
e škole ani mimo slovo ni prázdné nebo slovo, jež by musil opravo
eb odvolávati. Myslím, že i grafolog vyčetl by tento rys povahy jeho
idárního jeho písma.

Souhlasily s působností tou, ba zvyšovaly ji společenské jeho způ-
prosté, upřímné, vždy důstojné a uhlazené. Sami žáci jsme si povšimli
na př., že zevnějšek jeho byl vždy bezvadný, kabát zapiatý, že kdy-
lo třídy na podium vstoupil aneb z ní vycházel, pokaždé lehce se
il. Tak mohl naléhati a vskutku také důtklivě a neúprosně naléhal na
é chování studujících, neslušnost a hrubost se mu do duše příčila,
ědčivě ukazoval, že uhlazené, jemné vystupování jest jinochovi užiť-
m doporučením v životě. A věděl nadto, že city esthetické jsou silnou
ou mravnosti, any potlačují náklonnosti, které jí odporují, a probou-
íy, jež ji podporují. Věděl, že jako vůně rostlině, tak krása moudrým
em přidána jest dobru, aby požitek z dobra dodával lásce k dobru
síly, silnější intensivnosti, pevnějšího trvání a oné energie, jíž by schop-
byla veškero jednání pořádati a na všechen život rozhodný vliv míti.
i jinak, kdekoli se mu příležitost udála, city esthetické v žácích pro-
l'a posiloval.

Záslužná tato činnost jeho byla také vyššími úřady školními pochvalně
rána, vyznamenán VIII. třídou hodnostní a roku 1881 jmenován Nejv.
dnutím ředitelem c. k. reálného gymnasia v Třeboni. Když odjížděl
1. listopadu na své nové působiště, rozloučili se s ním před 8. hod.
na náměstí kollegové jeho a studující s pocity opravdu smíšenými,
mu vyznamenání radostně přejíce, jednak neradi ho ztrácejíce.
uhých dvou řadách stáli jsme tam s hlavou odkrytou a s vděčnou
očima zarosenýma jej provázeli. Ve třídě pak málomluvný sice, ale
ž pro karakter svůj ryzí a svědomitost námi milovaný professor Ign.
promluvil k nám oktavánům s patrným pohnutím: »Tu vidíte, jak
se muž poctivý.«

I v Třeboni, ač pobyl tam pouze ne celá dvě léta, zamluvil se mile
skou láskou k žákům a přívětivostí k professorům a všem vrstvám
telstva do srdce všech a podnes od pamětníků vyslovuje se tam jméno
s úctou.

Od r. 1883 pak až do roku 1892 byl ředitelem gymnasia
Vrátil se do té úctyhodné, rozšafné »staré gardy« professorské, jejíž
stabilita budila všude obdiv, která nad 30 let v nejlepší shodě a př
pospolu působila a horlivou činností učitelskou a pravým pochopen
chovatelského svého úřadu zjednala učilišti zdejšímu chvalné jméno
daleko. **In necessariis unitas, in dubiis libertas, in omnibus autei
ritas.** Slova ta byla mu jako řediteli vůdčí hvězdou a výborně ho
terisují. Liberálně v pravém a krásném smyslu slova toho vedl si
jsa muž širokého rozhledu a lásky neuhasitelné, znal a pochopoval
jemné srdce lidské, v němž zarodky dobra i zla vedle sebe klíčí, a
opatrným vyluzoval z něho květy ušlechtilé. **Opravdově jako primu
pares** vystupoval ve sborovně mezi professory, laskavým přátelst
vlídnými povznášejícími radami získávaje si mysli všech, jako starc
dobrý otec mezi žáky, kteří dobře mladistvou svou duší lásku jeho
jíce, báli se špatným chováním jej zarmucovati. Čest ústavu, pravá,
deckého a mravního pokroku žactva plynoucí byla mu nade vše.

Proto hleděl také, aby gymnasium representovalo se stále dů
V dobré paměti všech současníků žijí na př. podnes tak zvané akade
večery, na něž scházeli se professoři s mnohými intelligenty místním
přátelským hovorem, básněmi a různými nepolitickými publikacemi
bavili. A co říci máme o Literární jednotě zdejší, této duchovní dceř
na niž právem byl vždy hrdý, »od které«, jak mi jako nynějšímu p
níku jejímu nedávno psal člen rodiny jeho, »až do smrti, aby se nep
se neodlučoval«, zůstávaje i po odchodu svém r. 1897 do Písku ne
jejím členem? Od jejího založení r. 1886 byl starostou jejím po 11 let
péčí dostalo se jí zdarma od vys. c. k. ministerstva vyučování mís
v budově gymnasijní, za něho, jak vidno z výročních zpráv horlivé
jího jednatele tehdejšího prof Jos. Štefka, pořádala 142 literární před
a zakoupila pro členy své za 23527 K 20 h dobrých knih českých
není tudíž divu, že jmenovala ho prvním svým členem čestným. A v
jiná dobrá myšlenka, ať vznikla v hlavě v které vznikla, nalezla v
upřímného a obětavého podporovatele.

Ze všech těch příčin byl zjev »starého pána« v městě našem
tak sympatický; proto poctěn byl čestným měšťanstvím, proto získal
nasiu našemu tak četné dobrodince; z velkého počtu jich uvádím
p. Pakostu, který odkázal fondu chudých studujících 2000 zl.

Tak úplných 39 let pracoval se zdarem a požehnáním o zvel
učiliště našeho a stál v předních řadách mezi těmi, kteří, ježto láska
rodí, k tomu přispěli, že ovívávalo je a stále ovívá ono sladké kouzl
ciťované všemi, již na něm studovali. Odlehlost sebe větší a doba sebe
nejsou s to, aby sílu kouzla toho zmenšily. Na blízku i v dáli, k
sejdou se a domluví bývalí studující jindř.-hradečtí, hned, ať jsou
sebe různějšího, lnou k sobě přátelskou příchylností. Kouzlo to dovád
co rok do města našeho ze všech krajů vlasti naší hojně mužů mla
i starých zvláště na sjezdy abiturientské, aby zde upomínkami na své
pookřáli.

Odcházeje r. 1892 na odpočinek, vyznamenán byl titulem c k.
ního rady; těšilo ho vyznamenání to jako všecka ostatní, ale největš
dostí mu bylo, že umíraje mohl o sobě říci: **„Non omnis moriar."** N
světlo, které rozsvěcoval, jest neuhasitelné a znova a znova rozsvěcová
svítiti bude v budoucích a budoucích generacích všude tam, kde usilu
aby uskutečnila se modlitba Božského Mistra: **„Přijď království Tvé**

Josef Karl

Doplňky katalogu knihovny učitelské

při c. k. gymnasiu v Jindř. Hradci.

Sestavil prof. Richard Plicka.

C. Spisy a časopisy o klassické filologii.

(Pokračování.)

č. inv. 3579. **Sintenis C. H.,** Versuch einer praktischen Anleitung zu Cicero's Schreibart. Wien 1813. 8, 1 sv.

3580. **Vaniček Alois,** Griechisch-lateinisches etymologisches Wörterbuch. Bd. I. II. Leipzig 1877. 8, 2 sv.

3581. **Vaníček Alois,** Lateinische Schulgrammatik. I. Formenlehre. Prag 1856. 8, 1 sv.

3382. **Wörterbuch Allgemeines Deutsch-lateinisches.** Von einigen gelehrten Freunden bearbeitet. Leipzig 1796. 8, 1 sv.

3583. **Zejda Jaromír,** Slovník k Breindlovu Výboru básní Ovidiových. Praha 1909. 8, 1 sv.

D. Klassická archaeologie a literární historie.

č. inv. 3584. **Baumgarten F., Poland F., Wagner R.,** Die hellenische Kultur. Leipzig-Berlin 1905. v. 8, 1 sv.

č. 1414. **Cybulski Stephan,** Tabulae, quibus antiquitates Graecae et Romanae illustrantur. I—IV., X., XII—XIV. a, b, XVI—XX. Mit Text zu Tafel XVI. bis XX. v. Amelung Walther. Leipzig 1903. v. 8, 14 obrazův a 1 sv.

3585 **Groh Dr. Frant.,** Řecké divadlo. Praha 1905. 8, 1 sv.

3586. **Groh Dr. Frant.,** Topografie starých Athen. Část I. Praha 1909. 8, 1 sv.

3587. **Gurlitt L.,** Anschauungstafeln zu Caesar. I.—VI. (Castra Romana, Alesia, Caesaris cum Ariovisto colloquium, Vercingetorix, Exercitus Caesaris in Britanniam exponitur, Avaricum a Caesare oppugnatum.) Gotha b. l. v. fol. 6 obrazů.

3588. **Hemmleb H.,** Anschauungsbilder zur alten u. neuen Geschichte. Weimar b. l. fol., 15 obrazů.

3589. **Nieupoort Ag. H.,** Rituum, qui olim apud Romanos obtinuerunt, succincta explicatio etc. Venetiis 1761. m. 8, 1 sv.

3590. **Reichel Wolfgang,** Homerische Waffen Wien 1901. 4, 1 sv.

3591. **Schanz Martin,** Geschichte der römischen Literatur (bis

zum Gesetzgebungswerk des Kaisers Justinia
2. Aufl. München 1898. v. 8, 1 sv.

78 3592. **Stoll H. W., Lamer H.,** Die Götter des klass.
Leipzig 1907. 8, 1 sv.

79 3593. **Stoll H. W., Lamer H.,** Die Sagen des klass.
Bd. I., II. Leipzig 1907. 8, 2 sv.

80 3594. **Šílený Tomáš,** Řecké starožitnosti. Brno 1906

81 3595. **Wilamowitz-Moellendorf U. v., Krumbacher K.,**
nagel J., Leo F., Norden E., Skutsch F., Die g
und lateinische Literatur u. Sprache. Berlin u
1905, 7. v. 8, 2 sv.

VI. Filologie moderní.

A) Slovanská.

VI. A 326 č inv. 3596. **Bartoš Frant.,** Dialektický slovník morav
Praha 1905, 6. v. 8, 2 sv.

327 3597. **Bílý Frant,** Korrespondence a zápisky Frant. I
kovského. Praha 1907, 9, 10. v. 8, 2 sv.

328 3598. **Brandl Vinc.,** Život Josefa Dobrovského. Brno 188

329 3599. **Brus jazyka českého,** který sestavila komis
sborem Matice České zřízená. Praha 1881. 8, 1

330 3600. **Čapek F. M.,** Šimon Lomnický z Budče. Č. B
b. l. 8, 1 sv.

331 3601. **Černý Fr.,** Evangeliář Olomoucký. Praha 1902.

332 3602. **Černý Frant.,—Váša Pavel,** Moravská jmén
Brno 1907. 8, 1 sv.

333 3603. **Dobrovského Josefa korrespondence.** Díl
V. A. Francev, díl III. Ad. Patera. Praha 1906, 8.

334 3604. **Dušek V, J.,** Hláskosloví nářečí jihočeských.
O změnách slabičných a kvantitě. Praha 1908. v

335 3605. **Dušek Vavřinec Jos.,** Kmenosloví nářečí jih
Praha 1903. v. 8, 1 sv.

336 3606. **Frinta Dr. Ant.,** Novočeská výslovnost. Pokus o so
fonetiku jazyka českého. Praha 1909. v. 8, 1 sv.

k č. 1530. **Gebauer Jan,** Historická mluvnice jazyka čes
III. Tvarosloví. I. Skloňování. Praha 1896. v. 8,

337 3607. **Gebauer Jan,** Slovník staročeský. Díl I. a 6 se
II. Praha 1903. v. 8, 1 sv. 6 seš.

338 3608. **Gotthard Fr.,** Über die possessiven Adjektiva
(ův), ova ovo im Slavischen. Wien 1888. 8, 1 sv

339 3609. **Hanka Václaw,** Gesnerovy Idylly. Praha 1819.

340 3610. **Havlíček Karel,** Kritiky. Praha 1908. 8, 1 sv.

341 3611. **Hlavinka Alois,** O zvučnosti jazyka českého. Br
8, 1 sv.

342 3612. **Hošek Ignác,** Nářečí českomoravské. Podřečí
Část I. a II. Praha 1905. v. 8, 2 sv.

č. inv. 3613. **Hruška J. F.,** Dialektický slovník chodský. Praha 1907. v. 8, 1 sv.

3614. **Jensen Alfred,** Jaroslav Vrchlický. Přel. Arnošt Kraus. Praha 1906. 8, 1 sv.

3615. **Jungmann Josef,** Historie literatury české. Praha 1849. 8, 1 sv.

3616. **Karlik Hugo Johann,** Praktische Grammatik der böhmischen Sprache. Prag 1856. 8, 1 sv.

3617. **Kašík Dr. Ant.,** Popis a rozbor nářečí středobečevského. Praha 1908. v. 8, 1 sv.

3618. **Kašpar Josef,** O spisovné řeči české a vzájemnosti slovanské ve stol. XX. Praha 1900. 8, 1 sv.

3619. **Kocín z Kocinetu,** Spisky drobné. I. Isagoge ad tres sermones Ciceronis De oratore. Vyd. Dr. R. Schmertosch v. Riesenthal. Praha 1908. v. 8, 1 sv.

3620. **Kollár Jan,** Kollárova dobrozdání a nástin životopisný z r. 1849. Vyd. Jos. Karásek. Praha 1903. v. 8, 1 sv.

3621. **Kollár Jan,** Sláwa bohyně a původ jména Slawůw čili Slawjanůw. Pešt 1899, 8, 1 sv.

3622. **Komenský Jan Amos,** Korrespondence II. Vyd. Kvačala Jan, Praha 1902. v. 8, 1 sv.

3623. **Kott Frant. Št.,** Druhý a Třetí příspěvek k Česko-německému slovníku, zvláště grammaticko-fraseologickému. Praha 1901, 6. v. 8, 2 sv.

3624. **Kraus Arnošt,** Pražské časopisy 1770—1774 a české probuzení. Praha 1909. v. 8, 1 sv.

3625. **Křížek Václav,** Anthologie jihoslovanská. Praha 1863. 8, 1 sv.

3626. **Květ Dr. F. B.,** Staročeská mluvnice. — Přehlédl Edv. Novotný. 4. vyd. Praha 1883. 8, 1 sv.

3627. **Literatura česká 19. století.** Díl I. II. III. 1. a 2. část. Vydali Vlček Jar. atd. Praha 1902, 3, 5, 7. 8, 4 sv.

3628. **Lobkovic Jan Hasišteinský z** — Putování k svatému hrobu. Vyd. Strejček Ferd, Praha 1902. v 8, 1 sv.

3629. **Loriš Jan,** Sborník hraběte Baworowského. Praha 1903. v. 8, 1 sv.

3630. **Máchal Jan,** Staročeské skladby dramatické původu liturgického. Praha 1908. v. 8, 1 sv.

3631. **Marco Polo** (Marek Pavlův z Benátek). Milion. Vyd. Justin V. Prášek. Praha 1902. v. 8, 1 sv.

3632. **Modest Pavel,** Přehledy dějin literatur slovanských. Praha 1908. 8, 1 sv.

3633. **Od kolébky Riegrovy.** Almanach. Praha 1908. 8, 1 sv.

3634. **Památník vydaný ve prospěch Heydukovy nadace.** Za komité pořadatelů L. Arietto. Písek 1887. 8, 1 seš.

3635. **Patera Adolf,** Čtenie zimnieho času. (Sbírka pramenů k pozn. liter. života. Čes. Akademie.) Praha 1905. v. 8, 1 sv.

VI. A. 366 č. inv. 3636. **Patera Adolf,** O sv. Jeronymovi knihy tro
1903. v. 8, 1 sv.

367. 3637. **Popelka B.,** Grammatika jazyka starobulhars
Úvodem a komentovanými texty opatřil Frant.
Brno 1885. 8, 1 sv.

368 3638. Pravidla hledící k českému pravopisu a tvarosl
cedním seznamem slov a tvarů. Praha 1902. 8,

369 3639. **Rejzek Ant.,** Bohuslav Balbín T. J. — Jeho živo
Praha 1908. 8, 1 sv.

370 3640. **Sienkiewicz Henryk,** Na slunném pobřeží. Pře
penský. Praha, b. l. 16, 1 sv.

371 3641. **Sinapius Daniel,** Neoforum latinoslovenicum. Tis
1678. Nově vydali J. V. Novák a V. Flajšhan
1908. 8, 1 sv.

372 3642. **Slavík Václav Ot.,** Karla Aloisa Vinařického K
dence a spisy pamětní. I. II. Praha 1903, v. 8,

373 3643. **Slovanský přehled.** Red. Ad. Černý. Roč. I. Pr
8, 1 sv.

374 3644. **Smetánka E.,** Staročeské životy svatých otců
1909. 8, 1 sv.

375 3645. **Souček St.,** Studie Štítenské. Praha 1909. 8, 1

376 3646. **Svoboda Milan,** M. Jakoubka ze Stříbra překla
fova Dialogu. Praha 1909. v. 8, 1 sv.

377 3647. **Šimák Dr. J. V.,** Bohemica v Lipsku. Praha 1907

378 3648. **Tille Václav,** České pohádky do roku 1848. Prah
v. 8, 1 sv.

379 3649. **Tobolka Zdeněk,** Česká bibliografie. I. (duppl.), I
1903, 5. v. 8, 3 sv.

380 3650. **Truhlář Ant.,** Rukověť k písemnictví humanist
zvláště básnickému ve století XVI. I. Praha 1908.

381 3651. **Truhlář Jos,** Katalog českých rukopisů c. k. veř.
knihovny Pražské. Praha 1906. 8, 1 sv.

382 3652. **Voborník Jan,** Julius Zeyer. Praha 1907. 8, 1 s

383 3653. **Vondrák Václav,** Studie z oboru církevněslovansk
semnictví. Praha 1903. v. 8, 1 sv.

384 3654. **Vránek Jan,** Na půdě americké. Básně. Chicag
8, 1 sv.

385 3655. **Výbor z literatury české.** I. Praha 1845. 8, 1 s

386 3656. **Josef Vyhlídal,** Čechové v pruském Slezku. 3 vy
měříž 1900. 8, 1 sv.

387 3657. **Vyhlídal Jan,** Naše Slezko. Praha 1903. 8, 1 sv.

388 3658. **Vymazal Fr.,** Nauka o větě pro žáky na středních š
Praha 1881. 8, 1 seš.

389 3659. **Vysoký Arnošt,** Materiál k slovníku technologi
Litomyšl 1861. 8, 1 sv.

390 3660. **Zahradník Dr. Isidor Theod.,** Slovník latin.-něm
pro Ladislava Pohrobka. „Archiv pro lexikografii
lektologii" Č. Akad. Praha 1904. 8, 1 sv.

391 č inv. 3661. **Zelený Václav,** Život Josefa Jungmanna. 2. vyd. Praha 1878 (81). 8, 6 sešitů.

392 3662. **Zíbrt Čeněk,** Frantova práva. Praha 1904. v. 8, 1 sv.

393 3663. **Zíbrt Č. Dr,** Markolt a Nevím v literatuře české. Praha 1909. v 8, 1 sv.

394 3664. **Zíbrt Čeněk,** Staročeský lucidář. Praha 1903. v. 8, 1 sv.

395 3665. **z Žerotína Karel Starší,** Spisy. Sv. III. Vydal V. Brandl. Praha 1872. 8, 1 sv.

VI. B. Filologie německá.

190 č. inv. 3666. **Auswahl deutscher Gedichte** des XVII., XVIII. u XIX Jahrhunderts nebst Mustern deutscher Prosa etc. Koblenz 1836. 8, 1 sv.

191 3667. **Becker Dr. Karl Ferdinand,** Lehrbuch des deutschen Stiles. Frankfurt a. M. 1850 8, 1 sv.

192 3668 **Collin Heinr. Edler von,** Polyxena. Ein Trauerspiel. Berlin 1804. 8, 1 sv.

193 3669 **Ebersberg J. S,** Der Beschäftiger zum Nutzen u. Vergnügen Wien 1841. 8, 1 sv.

194 3670. **Egger Alois,** Deutsches Lehr- und Lesebuch. Wien 1871. 8, 1 sv.

195 3671. **Fabriclus M. J A,** Abrisz einer allg. Historie der Gelehrsamkeit. III. Bd. Leipzig 1754. 8, 1 sv.

196 3672 **Falkmann Ch. F,** Praktische Rhetorik für die obern Klassen der Schulen und Selbstunterrichte. Hanover 1831. 8, 1 sv.

197 3673. **Falkmann Ch. F,** Stylistisches Elementarbuch. Hanover 1831. 8, 1 sv.

198 3674 **Hänle C. H.,** Materialien zu teutschen Stylübungen u. feierlichen Reden. II. IV. Theil. Frankfurt a. M. 1822, 4. 8, 2 sv.

199 3675 **Heinsius Theodor,** Geschichte der Sprach- Dich- und Redekunst der Deutschen 2. Aufl Berlin 1818. 8, 1 sv.

200 3676 **v. Herder J. G,** Abhandlungen u. Briefe über schöne Literatur u. Kunst. Wien 1817. 8, 1 sv.

201 3677. **Herling Dr. S. H. A.,** Praktische Zergliederung der stylistischen Darstellungsweisen. Hanover 1837. 8, 1 sv.

202 3678 **Kittel E,** Dunkle Wörter der Deutschen Sprache. Prag 1877. 8, 1 sv.

203 3679. **Klopstock G. F.,** Messias, I.—V. Bändchen. Wien 1794, 5. 8, 5 sv.

204 3680 **von Sindenberg Siegfried,** Sara Reinert, eine Geschichte in Briefen. I. II. Bd. Berlin-Stetten 1796. 8, 2 sv.

205 3681. **Lotz Georg,** Caltborpe oder gesunkenes Glück. Wien 1826. 16, 1 sv.

206 3682. **Madiera K. A.,** Deutsches Lesebuch f. d. I. Gymnasialklasse. Prag 1865. 8, 1 sv.

k č. 3681. **Morgan Lady,** Die Prophetin von Caschimir, oder benskraft und Liebesgluth (Přivázáno k románu: L Calthorpe)

207 3683. **Pyrker L. J.,** Rudolf von Habsburg. Ein Heldeng in 12 Gesängen. Wien 1825 8, 1 sv.

208 3684. **Regeln für die deutsche Rechtschreibung nebst terverzeichnis.** (Grosse Ausgabe.) Wien 1902. 8,

209 3685. **Regeln für die deutsche Rechtschreibung nebst terverzeiohnis** (Kleine Ausgabe.) Neue veränderte lage. Wien 1902. 9, 1 sv.

210 3686. **Schiller Fr.,** Don Karlos, Infant von Spanien. L 1802. 8, 1 sv.

211 3687. **Truxa Dr. Hans Maria,** Richard von Kralik. E bensbild. (Duppl.). Wien-Leipzig 1905 8, 2 sv.

212 3688. **Willomitzer Prof. Dr. Fr,** Deutsche Grammatik für Mittelschulen. Wien 1902. 8, 1 sv.

VI. C. Filologie moderní ostatní.

VI. C 130 č. inv. 3689. **Blair Hugo,** Vorlesungen über Rhetorik und s Wissenschaften. Aus dem Englischen übertrz von Schreiter. I.—IV. Liegnitz und Leipzig 1785—89. 8

131 3690. **Brandes Jiří,** Hlavní proudy literatury století d náctého. Romantická škola ve Francii. Přeložila A Schulzová. Praha 1894. 8, 1 sv.

132 3691. **Křepinský Dr. Maxmilian,** O poměru Hartmannov goria k starofrancouzským legendám o sv. Řehoři. 1905. v. 8, 1 sv.

133 3692. Kubín Josef, Premier cours de leçons françaises co pour l' instruction des étudiens Tchèques. Prague 8, 1 sv.

134 3693. **Majer Dr.,** Französisches Sprachbuch. — 5. Aufl. gart—Tübingen 1848. 8, 1 sv.

135 3694. **Meidinger J. V.,** Praktische französische Gram Frankfurt 1806. 8, 1 sv.

136 3695. **Mozin Abbe,** Francösische Sprachlehre etc. 9. Aus bingen 1820. 8, 1 sv.

VII. Všeobecná jazykověda.

VII. 63 č. inv. 3696 **Bopp Fr.,** Kritische Grammatik der Sanskrita-Sp 2. Ausg. Berlin 1845. 8, 1 sv.

k č. 2120. **České Museum filologické.** R. 9. 10. Praha 19 8, 2 sv.

k č. 2143. **Listy filologické a paedagogické.** Ročník I.— XXX.—XXXIX. Praha 1874—9, 1880, 1; 1903—8 8,

64 3697. **de Sacy A. J. Silvestre,** Grudsätze der allg. Sprac etc. Übersetzt v. Johann Severin Vater. Halle-L 1804. 8, 1 sv.

VIII. Zeměpis, národopis, statistika.

k č 2198. **Čechy**. Díl XIII. Praha 1905. fol., 1 sv.

217 č inv. 3698. **Durch Deutschböhmen**. Prospekt. Karlsbad 1907. 8, 1 sv.

218 3699. **Durdík Pavel,** U lidožroutů. Obrázky ze severní Sumatry. Praha 1897. 8, 1 sv.

219 3700. **Dwiřka Friedrich,** Die Stadt Gmünd in Niederösterreich. Krems 1905. 8, 1 sv,

220 3701. **Dvorský Dr. Viktor,** Černohorskoturecká hranice od ústí Bojany k Taře. Praha 1909. 8, 1 sv.

221 3702. **Dvorský Dr. V.,** Ekonomickogeografické studie z Černé Hory. (Rozpravy Č. Akad. I. tř. č. 37) Praha 1907, 8 1 sv.

k č. 2274. **Český lid.** Red. Dr. Č. Zíbrt. Roč. XIV.—XVIII. Praha 1905—9. 8, 5 sv.

222 3703. **Ehrenbuch** des Kurbades Velden am Wörthersee. Geleitet von Karl Krobath. Klagenhurt b. l. 8, 1 sv.

223 3704. **Geistbeck Dr. Alois**, Bilder-Atlas zur Geographie der aussereuropäischen Erdteile. Leipzig-Wien 1902 8, 1 sv.

224 3705. **Geistbeck Dr. Alois,** Bilder-Atlas zur Geographie von Europa. Leipzig-Wien 1900. 8, 1 sv.

225 3706. **Geographen-Kalender 1903—4**. Herausgegeben von Dr. H. Haack. Gotha 1903. 16, 1 sv.

226 3707. **Harant Krištof z Polžic a Bezdružic,** Cesta z Království Českého do Benátek, odtud do země Svaté, země Judské, a dále do Egypta etc. Praha 1854. 8, 1 sv.

227 3708. **Hartleben A.,** Statistische Tabelle über alle Staaten der Erde. Jhg. XIII. 1905. 1 tab.

228 3709. **Heufler Ludv. R. von,** Österreich und seine Kronländer. Wien 1854—56. 8, 1 sv.

229 3710. **Chodounský K.,** Povšechná orientace v slovanských Alpách. Praha 1904. 8, 1 sv.

230 3711. **Jezdinský Fr.**, Mořské květy. Něm. Brod 1902. 8, 1 sv.

231 3712. **Kříž Dr. Martin** a **Koudelka Florian,** Průvodce do moravských jeskyní. Díl I. a II. Ždánice—Vyškov 1900, 2, 8, 1 sv.

232 2713. **Lexikon obcí** pro království a země na říšské radě zastoupených. IX. Čechy. Vídeň 1904. v. 8, 2 sv.

233 3714. **Národopisný věstník Československý**. Red. J. Jakubec, A. Kraus, J. Polívka. Roč. I.—IV. Praha 1905—9. v. 8, 4 sv.

234 3715. **Niederle Lubor,** Slovanský svět. Praha 1910. 8, 1 sv.

k č. 2309. **Památky archaeologické a místopisné**. Díl XXI—XXIII. Red. J. L. Píč. Praha 1905—9. v. 4, 3 sv.

235 3716. **Otto J.,** Atlas zeměpisný. Red. prof. Dr. J. Metelka. Praha b. l. fol. 10 seš.

236 3717. **Procházková Mil.,** Z pravěku. Olomouc b. l. 8, 1 sv.

237 3718. **Průvodce** Illustrovaný po Praze a okolí. Praha
8. 1 sv.

238 3719. **Průvodce** stručný po Semilech a okolí. Sestavil
(duppl.) Semily 1903. 8, 2 sv.

239 3720. **Sborník** České společnosti zeměvědné. Ročník IX.
Praha 1905—8 8, 4 sv.

k č. 2341. **Sedláček Aug.,** Hrady, zámky a tvrze Král. České
XIV. seš. 1—2 Praha 1906. fol., 2 seš.

240 3721. **Socháň Pavel,** Kroje a svadba v Lopašově na Slo
v nitranské stolici. (Národop. sborník československ
Praka 1905. 8, 1 sv.

241 3722. **Umlauft Friedr,** Geographisches Namenbuch von
reich-Ungarn. Wien 1886. 8, 1 sv.

IX. Dějepis (vyjma rakousko-uherský) s pomocí vědami.

IX. 152 č. inv. 3723. **Böttiger Dr C. W,** Die allg. Geschichte für
u. Haus. 7. Aufl. Erlangen 1836. 8, 1 sv.

153 3724. **Buzeskul V,** Úvod do řeckých dějin. Přel. J. Ve
Praha 1909. v. 8, 1 sv.

k č. 2407. **Časopis Český historický.** Roč. XI—XV. Praha 19
8, 5 sv.

154 3725. **Fuchs Josef,** Hannibal in Mittelitalien. Wien
8, 1 sv.

155 3726. **Kosina Jaroslav,** Dějiny světové Illustrevané. I.
Praha b. l. 8, 3 sv.

156 3727. **Miljukov P. N,** Obrazy z dějin ruské vzdělanosti
Přel. V. J. Dušek. Praha 1902, 3 8, 2 sv.

157 3728. **Oncken Wilhelm,** Allgemeine Geschichte. Berlin 1878
8, 42 sv.

158 3729. **Peroutka Dr. Emanuel,** Dějiny řecké I. Doba p
storická. Praha 1908. 8, 1 sv.

159 1730. **Šusta Jos.,** Dějiny nového věku. Praha 1905. 8,

X. Dějepis Rakousko-uherského mocnářství a jednotlivých zemí.

X. 303 č. inv. 3731. **Archiv český.** Díl XXI. Red. Jos. Kalousek.
1903. v. 4, 1 sv.

304 3732. **Austria.** Ill. volksthümliche Geschichte Österreichs
L. Donins Schriften bearbeitet von A. Weisz, K.
K. Frim. Wien 1902, 3. 8, 6 sv.

305 3733. **Binder Jos,** Heimatskunde des Marktes Scham
Böhmen. Prag 1908. 8, 1 sv.

Zprávy školské.

Sbor učitelský.

A) Změny ve školním roce 1909—1910.

. *Opustili ústav:*

) C. k. professor **Gustav Heš** odešel po své žádosti koncem měsíce
ce 1909 na **trvalý odpočinek** vyn. z 19. května 1909 č. 17740 min.
vna 1909 č. 28063 z. š. r.) a byl mu Nejvyšším rozhodnutím ze
. listopadu 1909 udělen titul **školního rady** (vyn. 26. listopadu 1909
30 min, 7. prosince 1909 č. 67.777 z. š. r.)

) Supplující učitel katecheta **Josef Baštýř,** jenž zastupoval professora
Kartáka v r. 1909/10.

) Vedlejší učitel kreslení **František Lego,** ředitel měšť. školy dívčí
signoval na místo při gymnasiu, působiv zde horlivě po 15 let.

) Vedlejší učitel jazyka francouzského **Jan Veselý,** učitel obecné
odešed z J. Hradce

. *Na ústav vstoupil:*

) **Josef Lamač,** dotud supplující učitel při c. k. české reálce v Praze
é straně, jenž byl jmenován zde c. k. skutečným učitelem po prof.
ovi vyn. min. z 9. června 1909 č. 22787 (17. července 1909 č. 34.869
) dnem 1. září 1909.

) Supplujícími učiteli pro pobočku při IV. třídě byli ustanoveni na
ok 1909—10 loňští suppl. učitelé **Alois Boháček** a **Josef Vlasák**
23. října 1909 č. 58.021 z. š. r.

Vedlejšími učiteli byli ustanoveni vyn. ze 16. října 1909 č. 51.278
a) pro těsnopis Dr. **Karel Müller,** c. k. professor; *b*) pro kreslení
h Prašinger, učitel měšť. školy; *c)* pro tělocvik **Tomáš Sládek,**
ob. školy; *d*) pro zpěv **Kamil Voborský,** ředitel kůru.

Stav učitelského sboru na konci roku školního.

a) **Pro předměty závazné a jazyk německý.**

Jméno a hodnost	Předměty, kterým učil:	Ve třídě:	Kolik hodin do téhodne	Poznámka
Dr. **Antonín Decker,** c. k. ředitel VI. hodn. třídy.	zeměpis filos. propaed.	I. VII.	4	Starosta Podpory studentů. Správce herného náčiní.
Josef Karták, c. k. professor VII. hodn. třídy.	náboženství	I. až VIII.	18	Exhortator pro obě oddělení.

Číslo řadné	Jméno a hodnost	Předměty, kterým učil:	Ve třídě:	Kolik hodin do téhodne	Pozn.
3	**Josef Kořínek,** c. k. professor VII. hodn. třídy.	jazyk český » latinský » řecký	II. II. V.	15	Třídr
4	**Jan Kubíček,** c. k. professor.	mathematika fysika němčina	III. V. VIII. IV. a) IV b). VIII. III.	vl. pol. 20 vll.p l. 21	Správce fysiká
5	**Josef Lamač,** c. k. professor.	zeměpis dějepis zeměpis a dějepis	III. III. V. VI. VII. VIII.	18	Správce zeměp. a
6	Dr. **Karel Müller,** c. k. professor VIII. hodn. třídy.	jazyk latinský » řecký » německý krasopis	VIII. IV. b) VII. VII. I.	17	Třídní
7	**Tomáš Planský,** c. k. professor VII. hodn. třídy.	jazyk latinský » řecký » německý	IV. a) VIII. IV. a) VIII.	17	Třídní
8	**Richard Plicka,** c. k. professor VIII. hodn. třídy.	jazyk latinský » český	VI. V. VI. VII. VIII.	18	Třídní Správce k učitelské, ž a chud
9	**Eduard Procházka,** c. k. professor VII. hodn. třídy.	jazyk český » latinský	I. I. VII.	16	Třídní
10	Dr. **Fr. Procházka,** c. k. professor VII. hodn. třídy.	mathematika fysika a chemie filosof. propae-deutika	II. IV. b) VI. VII. VII. VIII.	18	—
11	**Bedřich Řezník,** c. k. professor VIII. hodn. třídy.	mathematika přírodopis fysika jazyk německý	I. IV. a) I. II. V. VI. III. I.	21	Třídn Správce přírodopi
12	**Josef Sypal,** c. k. professor VIII. hodn. třídy.	jazyk latinský » řecký » německý	V. VI. V. VI.	17	Třídn

Jméno a hodnost	Předměty kterým učil:	Ve třídě:	Kolik hodin do těhodne	Poznámka
František Špírek, c. k. professor VIII. hodn. třídy.	jazyk český » latinský » řecký dějepis	III. III. III. II.	16	Třídní III.
Alois Boháček, suppl. učitel.	dějepis zeměpis jazyk německý	IV. a) IV. b) II. IV.a) IV.b) II. IV. b)	17	Řídil hry.
Josef Vlasák, suppl. učitel, c. k. neaktivní poručík.	jazyk český » latinský » řecký	IV. a) IV. b) IV. b) IV. a)	16	Třídní IV. b)
Ph.Dr. **J. Schwenger,** rabín, učitel náboženství israelského, c. a k. polní rabín v zál.	náboženství israelské	2 oddél.	4	Předmět závazný.

b) **Pro předměty nezávazné kromě němčiny.**

Dr. **Karel Müller,** viz č. 6.	těsnopis	2 oddělení	4	—
Bedřich Prašinger, učitel měšť. školy.	kreslení odděl. I., II. a) II. b), III.	3 oddělení s 1 pobočkou	8	Správce pomůcek pro kreslení.
Tomáš Sládek, učitel obecné školy.	tělocvik I., II., III. odd.	3 oddělení	6	—
Kamil Voborský, ředitel kůru.	zpěv	3 oddělení	6	Správce sbírky pro zpěv a hudbu.

Výpomocný skutečný sluha: **František Fenc.**

C) Dovolené.

1. Professor **Richard Plicka** pro nemoc od 4. dubna do 5
1910 vyn. 18. dubna 1910 č. 21643 z. š. r.

II. Osnova učebná.

A) V předmětech povinných a v jazyku němec

a) Látka učebná s přehledem hodin vyučovacích.

Vyučování dělo se dle nové učebné osnovy, stanovené min. vyn
ze dne 20. března 1909 č. 11662 (Věstník minist 1909 str. 193) a vy
zemským jazykům dle osnovy stanovené min. vyn. ze dne 2. zá
č. 36762.

Předmět	Přehled hodin							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Náboženství . .	2	2	2	2	2	2	2	2
Český jazyk (vyučovací)	4	4	3	3	3	3	3	3
Latinský jazyk . .	7	6	6	6	6	6	5	5
Řecký jazyk . .	—	—	5	4	5	5	4	5
Dějepis . . .	—	2	2	2	3	4	3	3
Zeměpis . . .	2	2	2	2	1	—	—	—
Mathematika . .	3	3	3	3	3	3	3	2
Přírodopis . . .	2	2	2	—	3	2	—	—
Fysika a chemie .	—	—	2	3	—	—	4	I. pol. 3 II. pol. 4
Filosofická propaedeutika	—	—	—	—	—	—	2	2
Kreslení . . .	—	—	—	—	—	—	—	—
Krasopis . . .	1	—	—	—	—	—	—	—
Tělocvik . . .	—	—	—	—	—	—	—	—
Německý jazyk . .	4	4	3	3	3	3	3	3
Celkem . .	25	25	28	28	29	28	29	I. pol. 28 II. pol. 29

b) Četba.

a) Školní.

I. Z jazyka latinského.

Třída III. 1. *Cornelius Nepos:* Aristides, Cimon, Conon, Phocion, Epa-
das, Pelopidas, Agesilaus, Miltiades, Themistocles, Pausanias. 2. *Q.*
ts Rufus: Alexander ira incensus Clitum hasta transfixit.

Třída IV. *Caesar* (Skřivan): Commentarii de bello Gallico I., IV., VI.,
. 1—14.

Třída V. P. *Ovidius* (Breindl): Metam. čl. 9, 11, 12, 14, 18, 20, 22,
mor. čl. 4; Fast. čl. 2, 3, 5; Trist čl. 8. *T. Livi*: Ab u. c. l. I., XXI. c.
(většinou kursoricky). Caes. b. Gall. V. c. 26—58.

Třída VI. *Sallustius:* Bellum Jugurthinum. *Cicero:* In Catilinam I.
r: Bellum civ. III. 1—33. *Vergilius*: Ecl. I., Georg. II. 109—176,
540, IV. 315—558; Aeneis I.

Třída VII. *Cicero:* Pro S. Roscio Amerino. Pro Archia poëta. Laelius.
: Aen. II., IV., VII., IX. 176–502, X. 439—509, XII. 697—952.

Třída VIII. *Tacitus* Germania c. 1—27, Annales I. 1—15, 31—49, 50—54;
26, 41—43, 44—46, 53—55, 62—63, 88. III. 1—7. IV. 34—35, XIV.
3, XV. 38—45, 60—65.
Horatius: (Cumpfe): Carm. I. 1, 2, 3, 4, 7, 11, 14, 22, 24, 37; II. 2, 3,
, 14, 15, 18, 20; III. 2, 3, 5, 9, 16, 30; IV. 2, 3, 7, 15; Epod. 2, 13;
1, I. 9; Epist. II 2. De arte poëtica.

2. Z jazyka řeckého.

Třída V. *Xenofon:* Anab. čl. 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 15. — *Kyr.* čl. 1, 2.
ann.) *Homer:* Ilias I, II (Cumpfe).

Třída VI. *Homer* (Cumpfe): Illias: II, VI, XVI., XVIII., XIX., XXII.
ot (Šuran): VII., VIII c. 97—117.

Třída VII. *Demosthenes:* (Kastner-Himer): Olynth. I., O míru. *Homeros:*
eia I. 1—77, V., VI., IX., X., XI. *Platon* Apologia (Krsek).

Třída VIII. *Platon:* Apologia (Krsek), Laches (Krsek), Euthyfron (Schulz).
es: Filoktetes (Schulz). *Homeros:* Odysseia XXII. (Schulz.)

β) Soukromá četba.

1. Z jazyka latinského.

Třída V. Bauer: Ov. Met. čl. 30., Fasti 4. 11. 18. — Bláha: Ov. Met.
Fasti 11. — Bureš: Met. čl. 17., Fasti čl. 11. — Hamerník: Ov.
l. 10. 21. 27. 30. — Hirschberg: Ov. Met. čl. 17., Amor. čl. 5. —
Jiří: Ov. Met. čl. 10. 21. 25. 27. 28. 30., Amor. čl. 1. 2. 3., Fasti
17., Ex Ponto 3. — Hoenig Karel: Ov. Met. čl. 7. 10. 21., Fasti čl.
18. — Hrůza: Ov. Met. čl. 10. 17. 21. 27. 30, Fasti čl. 4. 11. 18. —
Ant.: Ov. Met čl. 11. 17. 21. 30. — Hůlka Jar.: Ov. Met. čl. 10.,
l. 6. — Hůlka Jos.: Ov. Met. čl. 10. 17. 21. 27. 30. — Listbauer:
. 10. 17. 21. 27. 30., Fasti čl. 4. 11. — Chroust: Ov. Met. čl. 25.
— Menšík: Ov. Met. čl. 17. 21. 27., Amor. čl. 3. 5., Fasti čl. 4. 11. —
Ov. Met. čl. 17., Trist. 1. 2., Fasti čl. 11. — Podlaha: Ov. Met.
17. 30., Fasti čl. 4. 11. — Prchlík: Ov. Met. čl. 27. — Rezek: Ov.

Met. čl. 10., Fasti 4., Trist 6. — Skala: Ov. Met. čl. 21. 30. 31., 4. 11. — Šojsl: Ov. Met. čl. 21. 25. 27. — Tománek: Ov. Met. čl. 27. 29. 30. — Trčka: Ov. Met. čl. 10. (Breindl.) *Jos. Sy*

Třída VI. 1. Černý Kar.: Ovid. Met. III. 528—731; X. 1—63, XII. 575—606; XIV. 581—608. — 2. Peyrek Lad.: Sall. Bell. Cat. c. — Tampír Lad: Ovid. Met. II. 760—801; III. 732—3 IV. 1—35, 3 IV. 615—662; Sall. Bell. Cat. c. XXX.—L. — 4. Vaitauer Em: O X. 1—63, 72—77; X. 110—142; XII. 1—38; XII. 575—606; XIV. 5 Am. II. 6; III. 8, 35—56; Fast. I. 1—26; II. 617—638; Trist. I. 3

Rich. Plic

Třída VII. 1. Bělohrad Fr., Cicero, de imperio Cn. Pompei.

Eduard Procház

Třída VIII. 1. Víta, Verg. Aen. X. 439—509, XI. 648—867.

Dr. *K. Müll*

2. Z jazyka řeckého.

Třída VI. Bláha: Herod. VI. (Šuran). — Černý: Hom. Ilias V. I. c. 86—88; IX. c. 90—92, 96—113. — Eckschlager: Hom. Ilia 1—311. — Vaitauer: Hom. Il. IV. *Jos. Syp*

Třída VII. Hönig: Herod. I. 6, 29—33, 76—77, 79—80, 84—88; III., XV., XXIII., Demosth. Fil. II. Dr. *K. Mül*

3. Z jazyka českého.

Třída V. Všickni žáci čtli: K. J. Erben: Kytice. — Frant. L kovský: Ohlas písní ruských. — L. Quis: Ballady. — Svat. Če stínu lípy. — B. Němcová: Babička.

Třída VI. Všickni žáci čtli: J. Vrchlický: Legenda o sv. Prok J. E. Vocel: Labyrint Slávy. — A. Jirásek: Psohlavci. — K. V. Rais — Svat. Čech: Výlet p. Broučka do XV. století. — J. V. Sládek: písně a české znělky.

Třída VII. Všickni žáci čtli: J. Zeyer: Vyšehrad. — Sv. Čech: z Michalovic. — Frant. L. Čelakovský: Růže stolistá. — A. V. Šmil Za ranních červánků. — V. Beneš-Třebízský: Bludné duše. — J. Vr Bratři.

Třída VIII. Všickni žáci čtli: Sv. Čech: Hanuman. — Ad. H Pod Vítkovým Kamenem. — J. Neruda: Zpěvy páteční. — J. Zey Maria Plojhar. — J. Vrchlický: Noc na Karlstejně. — Al. Jirásek Věk I.—V.

Z jazyka německého:

Třída V. Bauer: Kupfermünzen und Goldstücke. Kleine Erzäh (Ch. Schmid.) — Bláha: Kanarienvogel. Das Johanniskäferchen. (Ch. S Schatzkästlein des rheinl. Hausfreundes. (Hebel.) — Hamerník: Ka vogel. Das Johanniskäferchen. Der Wasserkrug. Das stumme Kind. lone. Wasserflut am Rhein. (Schmid). Märchengarten. (Výbor). kästlein des rheinl. Hausfreundes. (Hebel.) — Hirschberg: Výbor hádek bratří Grimmův. (Šubert.) — Hoenig Jiří: Die Ostereier. (S Tiergeschichten. (Výbor.) — Hoenig Kar: Die Kirschen. Der Wass Die Kapelle bei Wolfsbühl. Das Vogelnestchen. (Schmid.) Erzählung (Weiss.) — Hrůza: Výbor 14 pohádek bratří Grimmův. — Hůlk Das Täubchen. Das Vergissmeinnicht. Die Kirschen. Der Wasserkr

flut am Rhein. Die Kapelle bei Wolfsbühl. (Schmid.) — Hůlka Jar.: schen. Der Wasserkrug. (Schmid.) — Hulka Jos.: Der Diamantring. d.) Märchengarten. (Výbor.) — Chroust: Heinrich von Eichenfels. envogel. Johanniskäferchen. Das hölzerne Kreuz. Das Margareta- en. Das stumme Kind. Die Melone. Die Kapelle bei Wolfsbühl. Das estchen. (Schmid.) Märchengarten. (Výbor.) — Liebzeit: Kupfermünzen oldstücke. Das stumme Kind. Die Melone. (Schmid). Erzählungen Frisch.) — Listbauer: Kupfermünzen und Goldstücke. (Schmid.) 14 pohádek bratří Grimmův. — Menšík: Die Ostereier. Das Täub- Das Vergissmeinnicht. Kupfermünzen und Goldstücke. (Schmid.) — Die Wasserflut am Rhein. Kleine Erzählungen Abt. 3. (Schmid.) — : Heinrich von Eichenfels. Kleine Erzählungen Abt. 2. (Schmid.) — Die Kirschen. Der Wasserkrug. Kleine Erzählungen Abt. 3. — Das stumme Kind Die Melone. Kleine Erzählungen Abt. 1. (Schmid.) 14 pohádek bratří Grimmův. — Šojsl: Kupfermünzen und Gold- Das stumme Kind. Die Melone. (Schmid.) Výbor 14 pohádek bratří iv. — Titze: Kleine Erzählungen č. 2 a 3 (Frisch.) — Tománek: n von Eichenfels. Das hölzerne Kreuz. Das Margaretablümchen. l.) Robinson. (Hofmann.) — Trčka: Die Feuersbrunst. Das Rot- n. Kleine Erzählungen Abt. 4. (Schmid.) *Jos. Sypal.*

Themata k písemným pracím a k řečnickým cvičením.

(Themata označená hvězdičkou jsou školní.)

α) V jazyku českém.

Třída V. 1. *Potopa. (Vypravování dle četby.) — 2. Moravská pověst osefu II. (Vypravování.) — 3. *Smrt kralevice Marka. (Obsah čtené — 4. Ilja Volžanín. (Povahopis dle četby.) — 5. *Ballada o šípu. dle četby.) — 6. *Příchod Aeneův do Italie. (Líčení dle četby.) — Rokycanova k Žižkovi. (Obsah čtené básně.) — 8 *Bitva u Kolína. ování.) — 9. Život lidský a květina. (Příměr.) — 10. *Babička B. á. (Povahopis dle četby.) *Richard Plicka.*

Třída VI. 1 *Mládí Jugurthovo. (Líčení dle Sallustia.) — 2. Po stopách é liturgie. (Úvaha dle lit. výkladův.) — 3. *O nejstarší legendách (Úvaha dle četby.) — 4. Kníže Oldřich hostem u sv. Prokopa. dle soukr. četby.) — 5. *Vstup k Alexandreidě. (Rozbor dle četby.) bětavost bratří Filenských. (Líčení dle četby.) — 7. Povahy osob vě Dagmaře. (Srovnávací povahopis.) — 8. *Chvála rolnictví. (Rozbor z Vergiliových Georgik.) — 9. Péče Karla IV. o Čechy. (Úvaha dle kladův.) — 10. *Kozina, vůdce Psohlavcův. (Charakteristika dle *Richard Plicka.*

Třída VII. 1. *Husovy zásluhy o české písemnictví. (Úvaha dle četby.) il sine magno vita labore dedit mortalibus. (Chrie.) — 3. *O po- ednoty bratrské. (Rozprava dle četby a lit. výkladů.) — 4. Školství arie Teresie. (Úvaha dle dějepisu.) — 5. *O základních vlastnostech (Rozprava dle fysiky.) — 6. *Význam Jana Blahoslava pro čes. (Úvaha dle četby.) — 7. Krise v Tolstého dramatě Car Fedor č. (Rozbor dle četby.) — 8. *Rozkvět čes. písemnictví za cís. Ru- (Rozprava dle lit. dějin.) — 9. Čelakovského »Růže stolistá«. (Roz- četby.) — 10. *Josef Dobrovský. (Charakteristika.)

Themata k řečnickým cvičením:

1. Z minulosti zámku Jindř. Hradce. (Běhálek.) — 2. O básnick
nosti J. V. Sládka. (Bělohrad.) — 3. O Boleslavu Jablonském. (Brad
4. O Boženě Němcové. (Budín.) — 5. Jan Amos Komenský. (Eisenh
6. H. Ibsen. (Groulík.) — 7. Napoleon Bonaparte. (Hönig.) — 8. O roman
(Kadlec.) — 9. Vláda Jiřího z Poděbrad. (Kotek.) — 10. O hvězdném
(Kunft.) — 11. O belletrii A. Jiráska. (Kýza.) — 12. O významu
Palackého. (Lanštják.) — 13. O Karlu IV. (Liebzeit.) — 14. O nábož
reformaci v Čechách. (Mužík.) — 15. O životě F. L. Čelakovského
hava.) — 16. O J. Jungmannovi. (Novotný.) — 17. O lit. činnosti
Tyla. (Petr.) — 18. O lásce k vlasti u starých Řeků a Římanů. (P
— 19. O spisech A. V. Šmilovského. (Prágr.) — 20. O básnické či
J. S. Machara. (Prášek.) — 21. O J. Slowackém. (Procházka.) — 22. (
Dvořákovi. (Rezek.) — 23. O francouzské revoluci. (Roubík.) — 24.
votě a významu B. Smetany. (Schwarzer.) — 25. O krásnu hud
(Soběský.) — 26. O Sv. Čechovi a jeho »Pravdě«. (Strouhal.) —
poesii Ad. Heyduka. (Stufka.) — 28. L. N Tolstoj (Švehla.) — 29. V. E
Třebízský. (Tlachna.) — 30. O významu objevení Ameriky. (Tomšík.

Richard Plicka

Třída VIII. 1. *O literárních sporech v době vzkříšení. (Rozprav
lit. dějin.) — 2. O účincích paprsků slunečních. (Úvaha.) — 3. *O ele
galvanické. (Rozprava dle fysiky.) — 4 Bella gerant alii, tu Felix A
nube! (Rozprava dle dějepisu.) — 5. Dle svobodné volby: a) *O věku r
(Úvaha dle četby.) — b) *O poesii J. E. Vocela. (Rozprava dle litera
— c) *Jaký cíl vytkl si Palacký při skládání svých »Dějin«. (Úval
četby.) — 6. *O byronismu v české poesii. (Úvaha dle literatury.)
Proč Molièrův »Lakomec« jest drama charakterní. (Rozbor dle četb
8. Dle svobodné volby: a) *K osmdesátým narozeninám J. V. cís. Fra
Josefa I. (Úvaha.) — b) *»By činů plod ti zdárně zrál a vzrůstal, jen
spěš, bys štěpy zasadil«. (Úvaha.)

Themata k řečnickým cvičením:

1. O J. Zeyerovi. (Dobrodinský.) — 2. Život a spisy E. Krásnoh
(Fencl.) — 3. Česká literatura kritická. (Frýdecký.) — 4. O liter. či
J. Kollára. (Hilgartner.) — 5. O významu J. Sv. Presla. (Janeček.) —
Shakespearovi. (Kořínek.) — 7. J. Neruda jako básník. (Krbec.) — 8.
lický a jeho činnost dramatická. (Kryštůfek.) — 9. J. E. Purkyně. (M
— 10. O spisech Frant. J. Rubeše. (Neubauer.) — 11. K. H. M
(Reiter.) — 12. K. J. Erben. (Šťastný.) — 13. Vítězslav Hálek. (Ture
14. Václav Stach. (Váša.) — 15. O české poesii v době vzkříšení. (V

Richard Plicka

β) V jazyku německém.

Třída V. 1. Weises Urteil. (Nach einem Lesestücke.) — 2. Wie
Josef II. einen Prahler bestraft hat. (Nach der Schullektüre.) — 3. Die
(Nacherzählung.) — 4. Ein braver Kaufmann. (Nach einem Lesestück
5. Andreas Hofer. (Zur hundertjährigen Gedenkfeier des Todes An
Hofers.) — 6. Wettlauf zwischen einem Krebs und einem Fuchs. (
erzählung.) — 7. Aus dem Leben Rudolfs von Habsburg. (Kurze In
angabe eines Lesestückes.) — 8. Horatius Cocles. (Nacherzählung.)

Josef Sypal

řída VI. 1. Über den Ursprung des Namens des Abgrundes Macocha. inem Lesestücke.) — 2. Die Ehrlichkeit eines Landboten. (Nach- ng.) — 3. Unbestechliche Treue. (Nach der Schullektüre.) — 4. ernährt, Unfriede verzehrt. (Nach einem Lesestücke.) — 5. Andreas (Zur hundertjährigen Erinnerung an den Tod eines Helden Öster- — 6. Ehrlich währt am längsten. (Nacherzählung.) — 7. Der brave (Nach einem Lesestücke.) — 8. Kaiser Napoleon und die Obstfrau nne. (Kurze Inhaltsangabe eines Lesestückes.) *Josef Sypal.*

řída VII. 1. Die Blüte des Rittertums. (Abhandlung auf Grund der ktüre.) — 2. Kriemhildens Rache. (Erzählung auf Grund der Schul-) — 3. Oesterreichs Heldenzeit. (Abhandlung auf Grund des ge- ichen Unterrichtes.) — 4. Der arme Heinrich. (Inhaltsangabe des amigen Gedichtes.) — 5. Die Erlebnisse des Simplicissimus. (Er- auf Grund der Schullektüre.) — 6. Oberon. (Inhaltsangabe des amigen Gedichtes.) — 7. Die Bedeutung Kaiser Franz Josefs I. für eich. (Freie Übersetzung.) — 8. Die Eltern Herrmanns. (Erzählung und der Schullektüre.) Dr. *Karel Müller.*

řída VIII. 1. Welche Phasen des menschlichen Lebens begleitet nach s Lied von der Glocke das Glockengeläute? (Auf Grund der Schul- r) — 2. Leutseligkeit des Kaisers Franz des I. (Freie Übersetzung.) Wie beweist Sokrates, dass der Tod kein Übel sei. (Nach Platons e des Sokrates.) — 4. Der blinde König. (Nach Uhland.) — 5. s Hofers Kämpfe für Kaiser und Vaterland. (Freie Übersetzung.) — timer schildert seine Bekehrung zur katholischen Kirche. (Nach s Maria Stuart.) — 7. Einfluss der deutschen Romantik auf die che Literatur. (Nach dem Schulvortrage.) — 8. Herakles als deus hina im Sophokleischen Drama Philoktetes. (Auf Grund der griech. ktüre.) *T. Planský.*

B) V předmětech nezávazných.

Kreslení. Vyučovalo se ve 3 odděleních s pobočkou ve druhém odinách, celkem 8 hodin týdně. V oddělení I. (I. tř.) Ornament na tvarů geometrických a motivů přírodních. Stilisovány jednoduché rostlinné říše a dán návod k praktickému užití. V oddělení II. a II. a) Kreslení perspektivné těles měřických dle modelů. Kreslení věcné , nádoby). V oddělení II. b) (III. tř.) Perspektivní kreslení snadných ů ve spojení s motivy přírodními; moderní ornament. V oddělení až VIII. tř.) Stínování plastických tvarů listů, květů a nádob dle ch modelů. Kreslení lidské hlavy dle předloh. Kreslení dle přírody. ornament.

Tělocvik. Vyučováno ve 3 odděleních po 2 hodinách, celkem týdně dle osnovy pro vyučování tělocviku na školách středních. o v I. oddělení učivo ustanovené pro I. třídu, ve II. pro II. až IV. tř. oddělení učivo pro vyšší třídy. Při tělocviku cvičeny i hry pro

Zpěv. Vyučovalo se ve 3 odděleních a to po 2 hodinách týdně. lení I. Theorie hudby: Výklad a čtení not; takt, intervaly, stup-

nice, nejdůležitější tvary rhytmické, dynamika tonová. Zpěv dvojhla národní a kostelní. V oddělení II. doplňována theorie; praktick v různých toninách. Zpěv sborový, (soprany a alty). Písně dvojhlas kostelní. V oddělení III. Výklad o akkordech. Všeobecná nauka Zpěv sborový (smíšené a mužské sbory). Písně a sbory. Cvičení sc dle školy Jeremiášovy.

d) **Těsnopis.** Vyučovalo se ve dvou odděleních po 2 hodinác V I. oddělení probrána nauka o tvoření a krácení slov. V II. oddě kovány samoznaky, probíráno krácení větné a logické, cvičen ry v němž docíleno průměrné rychlosti 70 slov za minutu.

III. Sbírky učebné.

A) Příjmy roku školního 1909—1910.

1. Taxy přijímací	165
2. Příspěvky 256 žáků na učebné pomůcky po 2 K, 197 po 4 K	906
3. Taxy za duplikáty na vysvědčení	—
4. Příspěvek obce Jindř. Hradecké na sbírky fysikální . .	300
5. Příspěvek obce Jindř. Hradecké na knihovnu . . .	105
Úhrnem . . .	1476

B) Rozmnožení a stav sbírek.

Návrhy byly schváleny vyn. z 8. února 1910 č. 67900 ai 1909

I. Knihovny.

a) **Knihovna učitelská.**

(Správce prof. Richard Plicka.)

Koncem školního roku 1909—10 obsahuje knihovna 3892 díla svazcích. Přibylo letos 49 děl o 95 svazcích. Sbírka programů má kusů; přibylo 321 kusův.

Letošního roku přibylo: a) Koupí: *1. Spisy periodické:* Arch gické památky 1910. Časopis Musea Král. Českého 1910. Časopis Moravské 1910. Č. pro pěstování mathematiky a fysiky. Č přátel st ností českých. Český časopis historický. Český lid. Česká mysl. Listy filologické. Národopisný věstník. Osvěta. Sborník české spole zeměvědné. Zeitschrift für österr. Gymnasien. Živa.

2. Spisy pokračovací: Ottův Slovník naučný XXVIII. — Otto-Me Zeměpisný atlas, seš. 9.—10. — Pražák: Slovník latinsko-český, seš. 20 — Gebauer-Smetánka: Staročes. slovník, seš. 16.

3. *Díla nová:* Buzeskul-Veverka: Úvod do dějin řeckých. — Voborník: Zeyer. — Niederle: Slovanský svět. — Walters-Peroutka: Řecké umění. — Řecké divadlo (4. část. — Krofta: Majestát Rudolfa II. — Šusta: nového věku. — Šimák: Zpovědní seznamy arcidiecése pražské — Rádl: Dějiny vývojových theorií v biologii. — Westermann: Die lanzen unserer Kolonien. — Píč: Starožitnosti země České. III. (podíl ý). — Studijní nadání v král. Českém. XIV.

) Darem: 1. Od c. k. zem. škol. rady v Praze: Oesterr. botanische rift 1910. — 2. Od c. k. čes. akad. senátu v Praze: Osobní stav c. k. niversity Karlo-Ferdinandovy; Index lectionum. — 3. Od cís. akade- d ve Vídni: Anzeiger der k. k. Akademie der Wissenschaften 1909. Čes. Akademie cís. Františka Josefa: Věstník Čes. Akademie XVIII; vy II. tř. XVIII. Smetánka: Staročeské životy sv. otcův. Zíbrt: Markolt m v strč. literatuře. Dvorský: Černohorskoturecká hranice od ústí k Taře. Tille: České pohádky do r. 1848. Kraus: Pražské časopisy 1774 a české probuzení. Bílý: Korrespondence a zápisky F. L. Českého I. 3. II. Svoboda: M. Jakoubka ze Stříbra Překlad Viklefova Dia- rinta: Novočeská výslovnost Král: T. Hobbesa Základy filosofie společnosti. Strejček: V. Nejedlého Bohyně. Hanuš: M. Adaukt Dr. J. V. Novák: Petra Comestora Historia scholastica. Kott: y k Bartošovu Dialektickému slovníku moravskému. Dr. Zd. To- Český slovník bibliografický I.—5. Od Dědictví sv. Prokopa: Vřešťál: ká mravouka. Kuffner: Sv. Otce Řehoře Vel. Kniha o správě pastýřské. Dr. Jos. Nováka, ředitele v. v. Věstník kr. čes. spol. nauk. Výroční 1908. — 7. Od Jednoty čes. mathematiků: Kaván: Katalog knihovny mathematiků. — 8. Od spisovatelů: a) Kadeřávek: Krasověda a aesthetika. — b) Jiřík: Frant.Ženíšek; Vývoj malířství českého ve X. Chytil-Jiřík: Výstava keramických a skleněných prací čes. původu něm.); Seznam předmětů sbírky Lannovy (duppl. něm.). Chytil: e sbírkami musejními. — c) Hrabák: Hornictví a hutnictví v Krá- Českém. — 9. Od c. k. notáře Ant. Maděry: Wilke: Die Elektri- - 10. Od † měst. důchodního R. Brejchy: Scheller: Ausführliches sches Lexicon I.—III. — 11 Od gymn. ředitele Dra J. Nováka: Anzeiger klemie der Wiss. in Krakau. Math-nat. wiss. Cl. 1908, 9. Phil. hist. Cl. , 8. Sprawozdania z czynności Akademie umiejętności w Krakowie .—12. Od řed. Dr. Ant. Deckera: Kalendář českých professorů, roč. 908. Škrdle: Naše studia v J. Hradci (Vlast XXV. č. 6, 7). — 13. Od a Frant. X. Procházky: Týdenní zprávy o pozorování sněhu 1908-9. c. k. ústř. hydrografické kanceláře XIV. — 14. Od P. Flor. Březiny: r: Pět listů z Obořiště. — 15. Od J. Tischera, c. a k. setníka-audi- ncerus: Cornelius Nepos; Lippolt-Funke: Natur u. Kunstlexicon. Nieu- Rituum Rom. succincta explicatio; Pyrker: Rudolf von Habsburg. — nakladatelův a vydavatelův: Kukula: C. Plinii Secundi Epistulae Lochmann-Květoň-Novák-Bláha: Učebnice čes. těsnopisu dle sou- richovy. — Druhá schůze učitelstva čes. dvoutřídních obch škol.

b) Knihovna žákovská.

(Správce prof. Richard Plicka.)

ncem škol. roku 1909—10 obsahuje knihovna 2251 spisův o 2615 íc. Letošního roku přibylo 44 nových spisův. *1. Časopisy:* Vynálezy ky 1910. *2. Nová díla:* Jirásek: F. L. Věk I.–IV.; U nás I.—IV. Pso-

hlavci (2 výt.); Bratrstvo III. — Vrchlický: Skryté zdroje; Loutky. — Bohatýři; V zášeru minulosti; Dřevorubec; Pod Vítkovým Kamene — Čech: Roháč na Sioně; Výlet p. Broučka do XV. stol. — Zeyer: Plojhar I., II.; Tři legendy o krucifixu: Maeldunova výprava a j. Beneš-Třebízský: Bludné duše. — Vocel: Labyrint Slávy (5 výt.). — Básníkova cesta do pekel. — Strejček: O Sv. Čechovi. — Če Vzpomínky na K. Světlou. — Herbenová: Ruské byliny (2 výt.) — Jiříčkovo podivuhodné cestování — Černý: Naše vzory spořivosti. Nebe a země (2 výt.) — Novák: Fotografie ve vědě a praxi. — N Mašek: Astronomie pro každého.

Sbírka zeměpisná, dějepisná a mincovní.

Správce prof. Jos. Lamač.

Koncem školního roku 1909—10 má sbírka: globů 3, tellu lantů 32, map nástěnných zeměpisných 94, dějepisných 33, obraz měpis a dějepis 456, přírodnin a výrobků 116, jiných pomůcek 79

Koupí přibylo: Mapy: Spruner-Bretschneider, Europa im XVI Baldamus, Zur Gesch. des 19. Jhrh.; mapa Švýcarska (Suisse, Schw zera); Gaebler, Skandinavien und Russland. Dále zakoupeno: Jedl hledy na Prahu

Mincí jest 2112, starých bankovek 44. Darem pana lékárník přibyla stříbrná mince 500 portugal. reis.

Sbírka fysikální.

Správce prof. J. Kubíček.

Koncem šk roku 1909—10 má sbírka 579 čísel (1052 kusů) strojů 984 (kusů 1002), diagramů 14, modelů geometrických v 5 č kusů.

Spotřebované chemikalie a sklo byly doplňovány pro chemii.

Zakoupeno bylo: vývěva rtuťová, lis na korky, tři držátka z ného plechu se šoupátkem a dřevěnou rukojetí, skleněný plynojem $^1/_4$ m² sítě drátěné železné, skleněný hranol na sírouhlík, oblouk s vací žárovkou, dva rovné měděné dráty, dvě misky z českého dras skla s výlevkou, 1 kg skleněných tyčinek, elektromagnet s kotvou

Sbírka přírodní.

Správce prof. B. Řezník.

Koncem šk. roku 1909—10 vykazuje se 1339 inv. č. z zoolog inv. č. z botaniky, 1402 inv. č. z mineralogie a geologie a 8 inv. a potřeb. Přibylo letos 33 inv. č. a to:

A) *Koupí:* Vycpané exempláře: klokan, jestřáb, kukačka, okoun hlava chřestýše, mládě úhoře (monté), vejce žraloka, vývoj krtonožk preparáty: skupina ježovek, ježovka Acrocladia mammillata, ježovk gylocentrotus franciscanus, ukázky kůží hrocha a slona, krab Ca

Sbírka typů obratlů. Zvětšené modely: výtrusnice kapradiny, lodyžka
1. Flora artefacta: zázvor, tabák, kávovník, čajovník, kafrovník, láč-
indic. Postup výroby železa. Postup výroby skla. Stupnice tvrdosti.
ice tavitelnosti. Kopie výbrusů 4 slavných diamantů. Kopie přiroze-
krystalu diamantu (Stewart.) Kopie stříbra z Kongsberku. Zvětšený
hlavy včely. Sbírka histologických preparátů mikroskopických (30 K.)

3) *Darovali:* p. M. Khek, obchodník, langustu (preparoval kustos),
ouk, hajný, větevičník, několik mušlí. Studující: Bláha VI. růženín,
VI. nerosty z Chýnova, Tampír VI. vycpaného racka (L. fuscus),
V. ukázky mramorů, Žemlička IV. vycpaného papoušíčka, Vydra I.
drobnějších přírodnin. Týž žák daroval pěkné velké modely pravi-
h těles pro geometrii.

Sbírka pomůcek kreslicích.

Správce učitel B. Prašinger.

Koncem šk. roku 1909—10 bylo čísel inventárních 177, letos přibylo
l. Koupeno: vycpaní ptáci 2 (kachna divoká v letu, lyska, bažant
ný), dřevěné modely 2 (soudek, kolo vozové), sbírka 10 brouků v za-
ch skříňkách, napodobeniny antických nádob 5 (míska dvojuchá,
ý kalich, okov, roh s hlavou berana, pohár s vysokým uchem) a 10
různých barev.

Sbírka hudebnin.

Správce učitel Kamil Voborský.

bírka má inventárních čísel 314. — Letos koupí přibylo: B. Smetana:
stní sbor pro 4 mužské hlasy; Západ slunce, Ukolébavka, Má hvězda
soprany a 2 alty).

Statistický přehled žactva.

	Ve třídě									
	I.	II.	III. a)	III. b)	IV. a)	IV. b)	V.	VI.	VII.	VIII.	I
1. Počet.											
Koncem šk. r. 1908—9 .	33[2]	36[3]	25	21[1]	38[2]		33[1]	29	17	36	2
Na počátku šk. r. 1909—10	30[2]	33[5]	32[1]		23	21[2]	30[2]	25[1]	31	15	2
Během šk. r. 1909—10 přibyli	—	—	1		—	—	—	—	—	—	
Tedy celkem přijato .	**30[2]**	**33[5]**	**33[1]**		**23**	**21[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**31**	**15**	**2**
Z nich jsou:											
nově přijati: postoupivše	30[2]	1[3]	1[1]		—	—	—	—	1	—	
opakujíce . .	—	1	—		—	1	—	—	1	—	
opět přijati: postoupivše	—	30[2]	30[3]		23	20[2]	28[2]	25[1]	27	15	1
opakujíce . .	—	—	2		—	—	2	—	2	—	
Během šk. r. vystoupili .	2	1	1		1	1	—	—	1	—	
Počet žáků na konci šk. r. 1909—10 . .	**28[2]**	**32[5]**	**32[4]**		**22**	**20[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**30**	**15**	**23**
Z nich bylo veřejných .	28	32	32		22	20	30	25	30	15	2
privatistek .	2	5	4		—	2	2	1	—	—	
2. Rodiště.											
Jindřichův Hradec . .	9[1]	8[3]	13[3]		5	9[2]	9[1]	10[1]	7	3	7
Čechy ostatní	14[1]	23[2]	16[1]		13	9	20[1]	13	17	12	1
Morava	3	—	2		3	1	—	2	5	—	
Dolní Rakousy	1	1	1		1	1	1	—	1	—	
Halič	1	—	—		—	—	—	—	—	—	
Unie S. Americká . . .	1	—	—		—	—	—	—	—	—	
úhrnem . . .	**28[2]**	**32[5]**	**32[4]**		**22**	**20[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**30**	**15**	**23**
3. Jazyk.											
Český	28[2]	30[5]	31[4]		21	20[2]	30[2]	24[1]	30	15	22
Německý	—	2	1		1	—	—	1	—	—	
4. Náboženství.											
Katolické	24[2]	28[5]	29[4]		17	18[2]	28[2]	24[1]	27	15	21
Evangelické a. v. . . .	—	—	—		2	—	—	—	2	—	
» ref. » . . .	1	—	—		—	—	—	—	—	—	
Israelské	3	4	3		3	2	2	1	1	—	1
úhrnem . . .	**28[2]**	**32[5]**	**32[4]**		**22**	**20[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**30**	**15**	**23**

	Ve třídě									
	I.	II.	III.	IV. a)	IV. b)	V.	VI.	VII.	VIII.	Úhrn
5. Věk:										
ých bylo	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
» »	16[1]	1	—	—	—	—	—	—	—	17[1]
» »	5[1]	14[1]	2	—	—	—	—	—	—	21[2]
» »	4	11[2]	21	3	3	—	—	—	—	42[2]
» »	3	6[2]	6[1]	11	13	2[1]	—	—	—	41[4]
» »	—	—	2[3]	3	2	14	1	—	—	22[3]
» »	—	—	1	4	1[1]	7	11	3	—	27[1]
» »	—	—	—	1	1	5	6	12	1	26
» »	—	—	—	—	0[1]	2[1]	6[1]	6	8	22[3]
» »	—	—	—	—	—	—	1	6	5	12
»	—	—	—	—	—	—	—	3	1	4
Úhrnem	**28[2]**	**32[5]**	**34[4]**	**22**	**20[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**30**	**15**	**234[16]**
ydliště rodičů:										
d Hradec	16[2]	15[5]	19[3]	9	15[2]	17[2]	15[1]	19	5	130[15]
n J. Hradec	12	17	13[1]	13	5	13	10	11	10	104[1]
Úhrnem	**28[2]**	**32[5]**	**32[4]**	**22**	**20[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**30**	**15**	**234[16]**
Klassifikace:										
Konec r. šk. 1909-10										
stupu do vyšší třídy										
(po případě nej-										
vyšší třídu dokončili):										
dně způsobilí (s vý-										
borným prospěchem)	10[1]	12[4]	7[2]	5	6[2]	9	7[1]	10	5	71[16]
způsobilí (s dobrým pro-										
spěchem)	17[1]	16[1]	19[2]	13	13	18[2]	16	18	10	140[6]
nedost. způsobilí	1	1	2	1	1	—	—	—	—	6
nezpůsobilí (s nedosta-										
tečným prospěchem)	—	2	4	1	—	2	1	1	—	11
přidáni k opravné zkouš-										
ce a vyhověli	—	1	—	2	—	1	1	1	—	6
klassifikováni	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
soukromní žáci	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Úhrnem	**28[2]**	**32[5]**	**32[1]**	**22**	**20[2]**	**30[2]**	**25[1]**	**30**	**15**	**234[16]**

Dodatek ke škol. roku 1909—9:	I.	II.	III. a)	III. b)	IV. a)	IV. b)	V.	VI.	VII.	VIII.	
přidáni k opravné zkouš-											
ce a vyhověli	—	—	—	—	—		1	5	3	—	9
[illegible]	—	—	—	—	—		1	5	3	—	9
nezpůsobili (nebo nedosta-											
tečně se)	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—
přidáni k dodatné zkouš-											
ce a vyhověli	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—
[illegible]	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—
nezpůsobili	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—
nevyvili se	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—

	Ve třídě									
	I.	II.	III.		IV.		V.	VI.	VII.	VIII.
			a)	b)	a)	b)				
Jest tedy celkový výsledek za rok 1908—9:										
K postupu do vyšší třídy byli (po přídadě nejvyšší třídu dokončili):										
Výborně způsobilí (s výborným prospěchem)	15[1]	17[3]	6	7[2]	10		9[1]	7	4	16
Způsobilí (s dobrým prospěchem)	17[1]	14	15	11	23[2]		20	22	11	20
Celkem způsobilí	—	2	2	2	3		—	—	—	—
Nezpůsobilí (s nedostatečným prospěchem)	1	3	2	1	2		4	—	2	—
Nezkoušeni zůstali	—	—	—	—	—		—	—	—	—
Úhrnem	**33[2]**	**36[3]**	**25**	**21[2]**	**38[2]**		**33[1]**	**29**	**17**	**36**
8. Platy žáků:										
Celé školné platili:					a)	b)				
v I. pololetí	6[2]	5[3]	7[1]		3	5	6[2]	1	7	—
v II. pololetí	—	8	7		5	4	5[1]	5	4	1
Od polovice školného byli osvobozeni:										
v I. pololetí	—	—	—		—	1	—	1	—	—
v II. pololetí	1	—	1		1	1	1	1	—	—
Od celého školného byli osvobozeni:										
v I. pololetí	23	28[2]	25[3]		20	15[2]	24	23[1]	24	15
v II. pololetí	27[2]	24[5]	24[4]		17	15[2]	24[1]	19[1]	27	14
Školní plat obnášel v K:										
v I. pololetí	240	240	240		90	165	240	45	210	—
v II. pololetí	15	240	225		165	135	195	165	120	30
Úhrnem	**255**	**480**	**465**		**255**	**300**	**435**	**210**	**330**	**30**
Taxy přijímací obnášely	134·4	16·8	4·2		—	4·2	—	—	4·2	—
Příspěvky na uč. pomůcky	108·-	128·-	132·-		88·-	86·-	112·-	96·-	106·-	52·-
Taxy za duplikáty	—	—	—		—	—	—	—	—	—
Úhrnem	**242·4**	**144·8**	**136·2**		**88·-**	**90·2**	**112·-**	**96·-**	**110·2**	**52·-**
9. Návštěva nezávazných předmětů:										
Jazyk německý	28[2]	30[4]	31[3]		22	19	30[1]	24[1]	27	15
Kreslení oddě. I.	28[2]	—	—		—	—	—	—	—	—
» » II. a)	—	22	—		—	—	—	—	—	—
» » II. b)	—	0[5]	21[4]		—	—	—	—	—	—
» » III.	—	—	1		11	10[2]	2	4	3	3

	Ve třídě									
	I.	II.	III.	IV. a)	IV. b)	V.	VI.	VII.	VIII.	Úhrn
cvik odděl. I. . . .	28	—	—	—	—	—	—	—	—	28 } 99
» » II. . . .	—	18	11	3	2	—	—	—	—	34
» » III. . . .	—	—	—	6	7	10	6	5	3	37
v odděl. I.	24[2]	—	—	—	—	—	—	—	—	24[2] } 91[9]
» II.	—	15[4]	15[3]	—	—	—	—	—	—	30[7]
» III.	—	—	—	6	5	3	5	14	4	37
nopis odděl. I. . .	—	—	—	14	18[2]	11	1	—	—	44[2] } 68[2]
» » II. . .	—	—	—	—	—	10	6	6	2	24
0. Stipendia:										
et stipendistů . . .	—	4	—	1	4	5	4	3	6	27
os stipendií K . .	—	880	—	200	620	940	660	465	1140	4905

V. Maturitní zkoušky.

A) **Dodatek ke školnímu roku 1908—9.** V letním období roku konaly se ústní zkoušky za předsednictví vládního rady p. Dra *Karla fe,* c. k. ředitele gymnasia v Písku, od 30. června do 5. července a podrobilo se jim všech 36 žáků veřejných a 1 externista.

Dospělými s vyznamenáním uznáno bylo			13
» všemi hlasy	»	»	15
» většinou hlasy	»	»	6
Reprobováni na půl roku			2
» na rok			1 externista
		Úhrnem	36 + 1.

V únorovém období 1910 přihlásili se oba reprobovaní ke druhé ce a písemných prací dle zákona nekonali. Ústní zkouška byla ko- dne 19. února 1910 za předsednictví c. k. ředitele ústavu zdejšího t. Deckra a byli oba abiturienti uznáni dospělými.

Byl tedy konečný výsledek maturitních zkoušek abiturientů z roku ento:

Dospělými s vyznamenáním		13
» všemi hlasy		16
» většinou hlasů		7
Reprobováni na dobu jednoho roku		1 ext.
» » » neurčitou		—
	Úhrnem	36 + 1 ext.

Seznam abiturientů approbovaných roku 1909.

(Hvězdička značí zkoušku s vyznamenáním.)

Číslo	Jméno	Rodiště	Den a rok narození	Hoc věr
1	*Albrecht Vlastimil.	Jindř. Hradec.	6. srpen 1890.	Filosofi
2	Bradáč Karel.	Jindř. Hradec.	14. leden 1890.	Učitelst
3	Bůzek Karel.	Tábor.	28. leden 1889.	Železni
4	Čech Karel.	Studená, Mor.	17. říjen 1889.	Zvěrolé
5	*Decker Antonín.	Třeboň.	5 květen 1891.	Práva.
6	Dráchovský Břetislav.	Hory Ratibořské.	1. prosinec 1889.	Učitelst
7	Dvořák Emil.	Stráž.	4. srpen 1888.	Železni
8	*Gut Otto.	Vlkov u Uhl. Jan.	27. únor 1890.	Lékařst
9	Hochmuth Bohuslav.	J. Hradec.	24. prosinec 1888.	Chemie.
10	*Jilek Tomáš.	Vel. Bednárec.	11. prosinec 1889.	Filosofi
11	Kameník Karel.	J. Hradec.	21. květen 1890.	Theolog
12	*Khek Vladimír.	J. Hradec.	30. prosinec 1890.	Obchod
13	Knapp František.	Smíchov.	23. červenec 1890.	Železnic
14	Kostrouch Bohuslav.	Nový Etink.	21. srpen 1889.	Práva.
15	Kratochvíl Eduard.	Kojatice, Mor.	14. březen 1890.	Učitelst
16	*Kroupa František.	Počátky.	4. říjen 1890.	Práva.
17	Kubák Karel.	Strmilov.	15. leden 1889.	Učitelst
18	*Kubů Jaroslav.	Vlčice.	2. duben 1890.	Státní sl
19	Líškovec Tomáš.	Mlaka.	4. prosinec 1889.	Zeměděl
20	Macek František.	J. Hradec.	24. červenec 1889.	Státní sl
21	*Málek Karel.	Pavlice, Mor.	23. leden 1888.	Theologi
22	Mallát Rudolf.	Benešov.	11. duben 1890.	Státní sl
23	Marsa Václav.	Ratiboř.	24. červenec 1890.	Lékařstv
24	Matys František.	Krahulov, Mor.	10. srpen 1887.	Filosofie
25	*Němeček Bohumír.	Kumžak.	7. listopad 1889.	Lékařstv
26	*Peroutka Josef.	Radounka.	18. únor 1890.	Práva.
27	Petr Josef.	Věžná.	21. srpen 1889.	Státní sl
28	*Petrof Jan.	Telč, Mor.	18. květen 1890.	Práva.
29	Peyrek Zdeněk.	J. Hradec.	3. srpen 1889.	Státní sl
30	Poletín Jindřich.	Hor. Kounice, Mor.	5. červenec 1888.	Učitelstv
31	*Procházka Jiří.	J. Hradec.	3. červen 1891.	Filosofie
32	*Rožďál Jan.	Březina.	16. květen 1890.	Lékařstv
33	Russ Gustav.	Brno, Mor.	8. duben 1890.	Lékařstv
34	Svoboda František.	Mlýny.	27. červen 1887.	Theologi
35	Šedivý Jan.	J. Hradec.	5. červenec 1890.	Chemie.
36	Šindelka Josef.	Březina.	17. říjen 1888.	Zeměděls

Ze všech approbovaných hodlá se věnovati: bohosloví 3, vědán nickým a státním 5, lékařství 6, filosofii 6 (3 humanistické, 3 reali vys. škole zemědělské 2, jinému povolání 14.

B) **Ve školním roce 1909–10.** Ke zkouškám maturitním přihlá všech 15 žáků veřejných osmé třídy a 1 externista. Zkoušky písem nány byly od 9. do 11. června 1910; zkoušencům dány byly tyto

1. Z jazyka latinského: Tacitus, Agricola c. 45.—46.

2. Z jazyka řeckého: Homeros, Ilias VII. 216—255.

3. Z jazyka českého:

a) Přátelství nejdražší poklad člověka. Úvaha.

b) O národohospodářském rozvoji našeho mocnářství za vlády císaře Františka Josefa. Rozprava.

c) O kovech a jejich významu v dějinách vzdělanosti. — Rozprava vědecká.

Ústní zkoušky budou dne 4. a 5. července za předsednictví ředitele gymnasia v Praze (Žitná ul.) pana Dr. *Františka Bayera.*

VI. Podpory udílené chudým žákům.

A) Stipendia viz IV. 10 str. 47.

. Exc. pan c. k. místodržitel **Karel** hrabě **Coudenhove** daroval letos potřebným čtyřem žákům na podporu ve studiích (17/3. 1910 čís. 2 ai 1909) a 4/310 č. 42214 a 48232. — Dále dostali 3 loňští abiturienti **entské** nadace 2 z r. 1860 po 71 K 29 h a 1 z r. 1895 s 88 K; jeden án dostal cestovní nadaci **Karla Říhy** 80 K, celkem 310 K 58 h.

. »**Jubilejní nadace císaře a krále Františka Josefa I. z r. 1907**«, založená památkou na sjezd z r. 1907; základní jistina jest 4% . renta z 1. března 1909 č. 78770 za 3600 K a ve Spořitelně jest ě hotovost 355 K 63 h. — Letos vyplatí se dne 2. července 1910 44 K oktavánovi.

. »**Jubil. nadace z r. 1908 abiturientů z r. 1869**« pro abiturienty; ena a vinkulována renta za 800 K a hotovost činí 108 K 21 h. Letos se 32 K.

. »**Jubilejní nadace manželů** MUDra **Jana a Františky Rybákových**« adní jistinou 4000 K (komunální dlužní úpisy Zemské banky) vin- ou. Ve spořitelně jest hotovost 245 K 99 h.

šecky tyto nadace jsou ve správě ředitelství c. k. gymnasia, jež i na- istiny nyní již schválené pořídilo a je v pokladně školní uschovává.

B) Podpory místní.

I. Fond chudých studujících.

a) Příjem:

J. Exc. p. hraběte Eugena Černína při akademii	20·—
městské spořitelny za rok 1909	300·—
» » při akademii	40·—
Jednoty záložné	25·—
zápise darovali rodiče žáků	132·40
žek akademie 16. dubna 1910 (s ostatními dary 413·90)	353·90
ky z rak. renty od 1. února 1909 do 31. ledna 1910	231·—
ky z peněz ve Spořitelně do 30. června 1910	160·26
adace † ředitele Růžičky úrok	14·—
odloužené taneční hodiny (p. A. Strichovský)	19·60
ek Podpora studujících věnoval	633·45
Úhrnem	*1929·61*

b) Vydání:

1. Obědů 995 pro 14 studujících . . . . . .
2. Oděvů 47 (7 zimníků, 25 obleků zimních, 15 letních) . .
3. Obuv 5 žákům . . . . . .
4. Učebné knihy . . . . . .
5. Nadace † řed. Růžičky žákovi V. třídy . . . . .
6. Svíčky na hrob † řed. Růžičky (80) a porto za talon . .

Úhrnem . .

Příjem 1929 K 61 h, vydání 1929 K 61 h, tedy jest 1. července jmění jako loni **10000 K.**

Vinkulovaná obligace rakouské renty z 1/8 1891 čís. 166.4 na 2750 zl. čili 5500 K, ostatní 4500 K je ve spořitelně.

K akademii studentské sál propůjčil zdarma sl. *c. k. ostrosi sbor* a tisk daroval pan *Vilém Landfras;* sbory hudební nacvičil pan *Voborský,* piano zapůjčil pan Mg Ph. *Fr. Žemlička.*

II. **Jubilejní fond** založený r. 1898 *sborem professorským* na p 50letého panování Jeho Veličenstva císaře a krále Františka Josefa I

4% kommunální dlužní úpis Zems. banky České 1000 K (list květen) 1/12 1899 serie G č. 6437; korunová renta 200 K od prof. *Škalouda,* pak 300 K od vládního rady ředitele *Jana Říhy;* celkem 1

Příjem: Kupony 60 K a ve spořitelně úrok 7 K 41 h. Celke 11 hal. — Vydání: Dne 2. prosince 1909 dáno 2 žákům po 20 K 10 K, celkem 60 K. Roku 1909 bylo v spořitelně 182 K 34 h, přiby 11 h, jest 189 K 45 h. Celé jmění jest **1689 K 45 h.**

III. Podpůrný spolek.

Spolek »Podpora studujících c. k. gymnasia v Jindř. Hradci«. Sta jest dočasný ředitel gymnasia, místostarostou JUDr. Jan Matoušek, m radní, pokladníkem c. k. školní rada G. Heš, jednatelem prof. Jos. H knihovníkem prof. Rich. Plicka a výbory pánové: Jindř. Vlad. Houra rosta města Karel Mert, c. k. vrchní okresní lékař Dr. Jan Rybák, p Řezník, okr. starosta advokát Dr. Jan Slavík, JUDr. Karel Šedivý, ad revisory účtů: knihkupec Vil. Landfras, professor Dr. Fr. Procházk kladník spořitelny Adolf Šetka; náhradníky MUDr. Fr. Hrudička, pr Karel Müller, učitel Tom. Sládek. — Spolek má členů 157 zakládajíc činných 74, přispívajících 19 a přijal letos *základního jmění 30 K, ního 183 K a darů obdržel 302 K 20 h, úroků 151 K 02 h. Základní jest 4000 K, výdajné 307 K 24 h, celkem všeho 4307 K 24 h.*

Členové jsou: *A) Zakládající* (50 K): P. T. pánové: Abiturien 1870, 1872, 1879, 1884, 1902 a 1903. Mat. Andrle, sládek, Slavoňovice Bachrach, statkář a velkoprůmyslník. Edvard Běhálek, ředitel panství. Brejcha, městský důchodní. † Jindř. Bubla, c. k. soud. rada. Frant. professor. † J. Exc. Jaromír hrabě Černín z Chudenic. pí. Anna Česká, po professoru. Dr. Ant. Decker, ředitel c. k. gymnasia. † MUDr. Boh. dvorní rada, Praha. JUDr. Vladimír Fáček, sekretář zem. výboru. † p Gothardová, vdova po professoru. MUDr. Lad. Haškovec, c. k. univ professor. Ed. Hermann, továrník. G. Heš, c. k. šk. rada. † Fr. H c. k. finanční komisař. J. Vl. Houra, ředitel měst. úřadů v. v. † JUI

na, advokát. Jednota záložná. † Msgr Dr. Alois Jirák, infuł. probošt. v. Karlík, revident dráhy, Praha. Jos. Karták, c. k. professor. M. Khek, odník. Fr. Knotek, c. k. pošt. inspektor, Praha. pí. M. Kř. Jindř. Křik, inženýr, ředitel hosp. šk., Vys. Mýto. P. Laffar Ondřej, farář v Praze-III. Landfras, knihkupec. Ferd. Langer, velkoobchodník. JUDr. Edv. Lederer, kát. Fr. Liebzeit, velkostatkář, Čížkov. JUDr. Quido Líbal, advokát, Ve- Ant. Maděra, c. k. notář. Dr. Jan Mayer, c. k. zem. škol. inspektor, . Dr. Ant. Málek, kanovník, Č. Budějovice. Dr. Jan Masopust, c. k. okr. ce, Praha. pí. Fr. Matoušková, maj. realit. JUDr. Jan Matoušek, měst. . Karel Mert, starosta města, okr. tajemník, zem. poslanec. pí. Ter. alová, majetnice realit. Dr. K. Müller, c. k. professor. Jan Musil, děkan břichově (Pečky). JUDr. Jan Musil, vrchní správce, Břeclav. † JUDr. axera, starosta města a advokát. Dr. Jos. Novák, c. k. gymn. ředitel P. Engelbert Pfeifer, O. P., Jihlava. JUDr. Jindřich Picka, advokát. Jos. bský, přednosta trati. Fr. Rösch, lékárník, MUDr. Jan Rybák, c. k. okr. lékař MUDr. Sedloň Vilém, primář, Bohnice. JUDr. Seidl Václav, kát JUDr. J. Siegl, advokát, Soběslav. † J. Exc. Fr. Sieglitz ze Sieg-, c. a k. podmaršálek. Zikmund Singer, továrník. Tom. Sládek, učitel. . Jan Slavík, okr. starosta, advokát. † Kar. Solpera, c. k. professor. Fr. Studnička, dvorní rada. sl. Růžena Studničkova. JUDr. K. Šedivý, kát. P. Šetka Salesius Jos., farář, Kmetňoves. MUDr. Ondřej Schrutz, univ. professor, Praha Hugo Schwarzer, c. k. stav. rada. † Třebický v, maj. realit. Mg. Ph Petr Tušer, m. radní. P. Vaněček Ant., farář uc., ve St. Kníně. † JUDr. Julius Wargha, c. k. univ. professor, Št. ec. † Jan Vávrů, gymn. professor. pí. Kateřina Veselá, Vídeň-II. Frant. na, správce v N. Etinku. Zastupitelstvo obecní. Zastupitelstvo okresní. h. Fr. Žemlička, droguista, říš. poslanec.

B) Činní: (2 K) P. T. pánové: V. Adler, továrník, J. Albrecht, železník. brecht, cukrář. Jos. Blažej, c. k. pošt. officiál. Fr. Brabec, vikář, J. ec. Fr. Bürger, farář, Pěná (4 K.) P. Aug. Cassali, kommandér řádu (4 K). Fr. Czwettler, insp. dráhy v. v. Fr. Černý, stavitel (3 K). M. Do- vá, učitelka. J. Donát, učitel. MUDr. Jan Fähnrich, okr. lékař, Praha). Ad. Fantl, obchodník. Fr. Fára, hostinský. Ad. Felzman, c. k. hl. správce. JUDr. K. Fiedler, c. k. okr. komissař. Jos. Fišer, řed. měšť. Ot. O. O. Františkáni. Ign Friedl, hotelier. pí. Frýdecká, vdova po vrch. fin. komisaři (4 K). Jul. Fürnberg, učitel. Josef Gabriel kupec. Gebhart, hr. správce. Gross V., děkan, N. Rychnov. J. Groulík, c. k. k. inspektor. Jan Hájek, c. k. zem. soud. rada. Al. Hammersack, c. k. ekretář v Praze. sl. Kamila Hermannova, maj. hl. skladu tabáku. K. Holče, upec. P. Jan Holý, farář O. P. v Holišově. Dr. Fr. Hrudička, měst. lékař. sl. líková, odb. učitelka. MUDr. Jos Khek, primář. Fr. Kolář, katecheta. Fr. Ko- ský, m. radní. Jos. Kořínek, c. k. professor. pí. Ter. Kořínková, vdova k. professoru. V. Kroupa, farář, Mláka. Jan Kubíček, c. k. professor. unstovný, c. k. vrch. okr. zvěrolékař. Ludv. Lauseker, kaplan. Frant. řed. měšť. škol. Jos. Liebzeit, obchodník. Jos. Loukotský, c. k. vrch. l v. v. (3 K). Jan Macek, zámečník. Antonín Mančal, farář, Chvojnov. Fr. Máslo, lékař, Chýnov. JUDr. Jos. Matoušek, městský tajemník. toušková, učitelka. Dr. Josef Mrštík, arciděkan, Chrudim (3 K). Ferd. a, hr. důchodní. Nejmenovaná. (M. D.) (4 K). pí. Berta Pauková, správ- sl. M. Pávková, odb. učitelka. sl. M. Petráková, soukr., Tom. Pícha, Mrákov. Tom. Planský, c. k. professor. Rich. Plicka, c. k. professor. olívka, c. k. vrch. pošt. officiál (3 K). J. Prášek, kněz v Garsu (4 K). Šinger, odb. učitel. Dr. Fr. Procházka, c. k. professor (4 K). sl. A.

Rajmanová, učitelka. Mart. Rezek, hodinář. K. Řepa, ekonom. B. Ř
c. k. professor. sl. M. Sedláčková, učitelka. Dr. Jindř. Schwenger,
Ign. Solpera, továrník (4 K). F. Souček, obchodník. Ferd. Strejček,
professor, Ml. Boleslav. sl. M. Suková, učitelka. Jos. Sypal, c. k pro
Ad. Šetka, pokladník spořitelny (4 K). Josef Šimánek, účetní spoře
Fr. Špírek, c. k professor J. Šteffal, optik Rud Tampier, c k. ber.
Fr. Teinitzer, obchodník. J. Uzel, kontrolor Kar. Veselý, kupec. Th.
katecheta. Jan Žák, farář, Oberndorf (D. R) (3 K)

C) Přispívající: P. T. pánové: Ign. Brynda, c. k. berní official
Dvořáček, sollicitátor. Fr Erhart, kancelista K Fára, správce nemo
J Komárek, hr. správce. Jos Kroupa, obchodník. Bedř. Kučera, obch
Bohd. Liška, fotograf. Jak Mrkvička, pekař. K. Prügl, kadeřník. H. Ru
měst. adjunkt Fr Russ, kameník. A Schwarz, obchodník. K. Solpe
official. M Tejčka, kontrolor spoř. Em. Tuzar, vinárník. Jiří Wachtel,
rada. Jos. Vlasák, c. k. professor. Albert Zuna, c k berní správce.

Dary r. 1909—10. Abiturienti z r 1884 sbírku 31 K; ředitel p
p. Ed Běhálek 20 K (za cukr); dr. Ant Decker, c. k. gymn. řed.
jeho Julie k uctění památky pí Hany Krafferové rod. Kubešové a p
Brejchy, měst. důchodního 30 K; denní hosté k uctění památky p
Friedlové, choti hoteliera, 22 K; knížecí archivář p. Hynek Gross s
Luisou v Krumlově k uctění památky pí Kristiny Löfflerové, choti
šk. rady Aug Löfflera 10 K; c k školní rada p. G. Heš 20 K; Jos
kooperator v Břeclavě 10 K a Must Fr. Janda 10 K 20 h při pohřbu
bratra Ant. Jandy IV.; Jan Klement, c. k. cejchmistr 5 K; c. k. okr. s
v Praze p. JUDr Jan Masopust 20 K; Nejmenovaná pí. M Kř)
Nejmenovaný (E. P.) 4 K; ředitel c. k. gymnasia v v. Dr Jos. Novák
památky archiváře p. Fr. Tischera 10 K; c. k priv. sbor ostrostřelc
10 K; professor p. Dr. Fr. Procházka k uctění památky p. R Brejchy
důchodního 10 K; pí. Anna Schirmerová, vdova po obchodníku 15 K
rada zem. soudu p. Josef Šubr v Kolíně při pohřbu svého syna Bohu
abiturienta gymn. Kolínského z r. 1908 40 K; archivář p. Fr. Teplý
pí. Markétka Vodičková rodem Kroiherová-Planská při svém sňatku s
p. Dr. K. Vodičkou; celkem 302 K 20 h.

Na výlet 1910 darovali pánové: poslanec a starosta p. K. Mert
p. JUDr. Jan Siegl, advokát v Soběslavi 20 K, c. k. okr. soudce p.
Jan Masopust v Praze 10 K; po 5 K: notář A. Maděra, lékárník Fr. R

Spolek věnoval z vydajného jmění **633 K 45 h** na podporu ža
se sborem professorským staral se o chudé studující. Učebných knih
čeno 865, slovníků 55, tedy 920 děl 156 žákům; slovníků užívali žáci
lečně dle skupin. Obědů rozdáno 995, obleky uděleny 47 žákům, ob
i jiné podpory. Obědy udělovali též mnozí příznivci studentstva.

Knihy do knihovny pauperum darovali: Nakladatelé: Jednota
logická, Unie a právník Ant. Decker.

* * *

**Ředitelství koná milou povinnost, vyslovujíc všem dobrodi
a příznivcům žactva a ústavu, zvláště spolku Podpoře studujících**

DÍKY NEJVŘELEJŠÍ.

VII. Tělesný výcvik žáků.

(Podání bylo vyřízeno vyn. ze 13. prosince 1909 č. 68393 z. š. r.)

A) *Tělocvikn* bylo na ústavě vyučováno jako vedlejšímu předmětu. viz zprávy pod II. B) c) str. 39 a IV. 47 str.

B) 1. Za příznivého počasí žáci v době respiria po každé hodině se procházejí po nádvoří v budově gymnasijní, aby pookráli i se pro- i a někteří v létě hrávají si míčem, nebo procházejí se po chodbách bených obrazy, výkresy, mapami a podobiznami abiturientů i jubi- zdejších; 2 stereoskopy, z nichž jest jeden rotační, ukazují obrazy cké, zeměpisné a přírodní.

C) *Hry*. Letos byl vybírán poplatek 50 h na pořízení herného náčiní rok 1910; vybráno bylo nově 100 K 50 h, osvobozeno bylo 39 žáků rivatistek.

Místo ke hrám bylo od sl. městské rady vykázáno na tržišti za městem. ící nižších tříd hráli si za příznivého počasí od 10. března denně po ině na podzim a na jaře. Mimo to hráli studující vyšších tříd v ná- gymnasia tennis a jiní žáci croquet, cricket a mety. — V létě hráli na hřišti dle tříd *denně* od 4 do 7 hodin a společné hry byly od- e 4 krát; dne 21. května, 4., 15. a 25. června. Žáků na společné hry elo 198; dozor měli ředitel a všichni professoři; hry řídil a hrám uč. Boháček a spolu řídil společné hry učitel tělocviku Sládek. — ráli tyto hry: metání oštěpů. disku, krychle kamenné, kopanou, po- u, metání plného míče, mety, skřivánka, vyklepávanou, hradního, přeta- lanem, kroužky, chůdy, croquet a cricket, peřáky, tamburiny.

ři hrách i jindy cvičívali se někteří žáci ve hraní na dechové ná- a hrávali též při všech vycházkách celé školy.

D) *Klouzání a bruslení* Spolek bruslařský stanovil pro studující vstupné celou zimu. Klouzání dálo se od 4 do 7 hodin večer a dozírali professoři Sypal, Řezník, Špírek, Müller, Vlasák, Boháček. Přímluvou ly spolku škol. rady Heše dostalo se žákům 60 lístků volných.

) Studentstvo své *plovárny* nemá; obcí jsou vykázána místa ke kou- o studenty plavce v Nežárce u železničního mostu, pro žáky neplavce Vajgaře a potoce Hamerském. Za poplatek 10 h mohou se gymna- upati též na vojenské plovárně na legitimaci a za 3 K smějí se ování. Žáci gymnasijní veslují na loďkách po Vajgaře, šetří-li pravidel daných; poplatek jest 10 až 20 h za půl hodiny.

ycházky podnikli (většinou polodenní:)

Dne 20. října prof. Jos. Sypal s třídou V. k shlédnutí památností sv. Jana. Odborný výklad podal s nevšední ochotou c. k. gymnas. v. v. p. Dr. Jos. Novák.

Dne 16. října prof. J. Sypal se třídou V. astrognostickou vycházku.

Dne 20. října prof. J. Špírek se všemi 8 třídami (I.—VIII.) postupně avku hub.

5. Dne 21. a 28. listopadu prof. J. Sypal s třídou V. do chrámu a, kaple Mikulášské a Spulířské. Výklad podal c. k. gymn. ředitel Dr. Jos. Novák.

Dne 6. prosince prof. Sypal a Kubíček se tř. V. ku pozorování eleskopem.

7. 8. Dne 27. a 28. ledna prof. Sypal a Kubíček s tř. IV. a) astrognostické vycházky.

9. 10. Dne 31. ledna a 6. února prof. Sypal s třídou V. astrotické vycházky.

11. Dne 31. ledna prof. Řezník s třídou I. ku pozorování k »1910 A« a některých souhvězdí.

12. Dne 8. února prof. Sypal s tř. VI. astrognostickou vycházk

13. Dne 19. května prof. B. Řezník s třídou V. botanickou vyc k »lesní pile«.

14. Dne 20. května prof. B. Řezník s třídou I. botanickou vyc kolem Obory k Děbolínu.

15. Dne 20. května prof. Kořínek, Karták a Boháček s tř. II. polo výlet pěšky na sv. Barboru. Pochod tam i zpět, na místě výletním a zpěv.

16. Dne 23. května prof. B. Řezník s tř. VI. vycházku k za Oboru, kde na místě mikroskopem pozorováno živočišstvo a rostl planktonu.

17. Dne 23. května prof. B. Řezník s tř. I. večerní vycházku za ku pozorování komety Halleyovy. Při tom spatřen byl též skvělý me

18. Dne 25. května prof. Sypal s třídou V. celodenní výlet d boně. Pochod po hrázi Rožmberské a odtud do města. Tam prohl kostel a křížová chodba, knížecí archiv a pivovar.

19. Dne 27. května prof. Řezník s třídou V. botanickou vycházk sadů Sv. Jakubských.

20. Dne 4. června prof. B. Řezník s třídou I. do Jarošova (6' pochod, prohlídka družstevní mlékárny. Hry. Pochod zpět.

21. Dne 4. června prof. Karták s VIII. třídou do Jemčiny celo Pochod.

22. Dne 10. června prof. B. Řezník a prof. Kubíček s třídou V. v do Včelničky ku prohlídce tamní sklárny. Odtud pochod do Kam Návrat vlakem.

23. Dne 10. června prof. Špírek s III. třídou polodenní vycházku d do Velkého Bednárce, odtud pochodem údolím u Kamenného Mal přes Rosičku Pejdlovu, Hostějoves a Jarošov; pochod, hry a zpěv.

24. Dne 11. června prof. Vlasák s třídami IV. a) a IV. b) celo výlet do Černovic drahou, odtud pěšky na Choustník, kde prohlédnuty zříceniny hradu a velkolepý rozhled za nejkrásnější pohody. Z Chous šlo se přes Tučapy do Soběslavi, odkud po prohlédnutí některých p ností města nastoupena byla zpáteční cesta vlakem přes Veselí. P přes 25 km.

25. Dne 15. června odpoledne. O 2. hodině pochod se studen hudbou do lesa u Malíře, hry všech tříd do ½8. hodiny; návrat do m v městě uvítání četnými bengály.

	I.	II.	III.	IV.a)	IV.b)	V.	VI	VII.	VIII.	Celkem
Tělocviku se učilo	28	18	11	9	9	10	6	5	3	99
r se účastnilo	28	23	31	18	15	27	22	19	15	198
ování cvičilo	16	20	21	15	11	25	22	15	13	158
Bruslení	18	20	27	18	15	20	21	16	13	168
ízda na kole	—	3	4	5	4	10	11	7	5	49
Veslování	15	18	22	16	9	19	8	10	5	122
Koupání	25	31	28	15	17	29	24	25	15	209
zda na koni	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
ennis hráli	—	—	—	—	2	2	2	4	1	11
Kopaná	22	21	20	20	4	13	1	3	—	104
Počet žáků ve třídě	28[2]	32[5]	32[4]	22	20[2]	30[2]	25[1]	30	15	234[16]

VIII. Kronika ústavu.

Zápis žáků byl ve školním roce 1909—10:
d I. třídy ve dnech 9. a 10. července, pak 16. a 17. září 1909;
d ostatních tříd ve dnech 16. a 17. září. Přijato žáků 240 a 16 priva-
e celkem 256 a zřízena pobočka při IV. třídě min. vyn. z 9. října 1909
3967 (14. října 1909 č. 56847 z. š. r.). Israelskému náboženství i při
žích vyučuje se řádně a závazně. Zkoušky opravné a přijímací vy-
áry 16. září 1909.

Školní rok počal dne 18. září mší sv., vzýváním Ducha Svatého a
ní řádu kázeňského.

Vyučování na zdejším ústavě jest od listopadu 1904 polodenní od
dl hodiny.

Dne 20. září byla zádušní mše sv. za † Františka Xav. Janderu, fa-
e lažejovského, jenž příspěvkem 11.400 zl. zdejšímu gymnasiu r. 1801
la dal k jeho obnovení r. 1807.

Dne 4. října konány byly na oslavu Nejvyšších jmenin Jeho Veli-
s a slavné služby boží v kapli gymnasijní, jimž obcovalo všecko žactvo
el sbor učitelský, kterýž byl též na mši sv. v probošt. chrámu Páně.

Dne 19. listopadu za Její Veličenstvo zvěčnělou císařovnu a královnu
b a konala se v kapli gymnasijní zádušní mše sv. — Mimo to sloužena
a ádušní mše sv. v kapli gymnasijní dne 31. ledna za Jeho Cís. Výsost
o nního prince Rudolfa, pak za Jeho Veličenstvo † císaře a krále Fer-
At a Dobrotivého dne 28. června. Přítomni byli žáci ústavu a jich učitelé.

Dne 2. prosince v den nastoupení **vlády Jeho Veličenstv** *poděleno 61 žáků dary v ceně 1900 K.*

Dne 21. září 1909 v Písku zemřel u věku 83 let života c. k. rada pan **Augustin Pirchan,** bývalý ředitel zdejšího gymnasia, jen byl professorem 30 let (1851—81) a ředitelem 8 let (1883—91), měšťan jindřichohradecký. Pohřbu jeho v Písku dne 24. září spolu s skou deputací súčastnila se deputace sboru professorského, ředitel Decker s professorem Jos. Kartákem; zádušní mše sv. byla v gym dne 29. září. — Vděčná mu pamět!

Dne 22. září v Praze zemřel u věku 64 let c. k. zemský škol spektor pan Dr. **Eduard Kastner,** jenž 40 let působil jako profess ditel a zemský inspektor pro české střední školy. Slavného pohřbu v Praze súčastnili se za zdejší sbor ředitel Dr A. Decker, professoř Karták a Ed. Procházka; zádušní mše sv. byla v gymnasiu dne 27. — Slavná mu pamět!

Dne 30. září doprovodili ke hrobu professoři a žactvo p. **Karla Ho** jenž jako rabín byl od r. 1889 do 1905, tedy po 17 let horlivým, vlí učitelem israelského náboženství na zdejším gymnasiu. — Čestná mu p

Rovněž vyprovodili na hřbitov professoři a žáci dne 7. října ského důchodního pana **Rudolfa Brejchu,** příznivce a podporovatele dentstva a dne 16. března hrab. archiváře pana **Františka Tischer** valého žáka zdejšího, jenž r. 1858 vyhledav zakládací listinu nadac dřichohradeckých způsobil spolu s vrchním panem Václavem Bartů že byly tyto nadace (nyní 31 po 160 K) udíleny jenom žákům zd gymnasia. —

Dne 11. dubna zemřel žák IV. a) třídy **Antonín Janda** smrtí tragic upadnuv ve mdlobě do skleněných dveří nešťastnou náhodou přeř hlavní žílu krční a vykrvácel za krátko po příchodu lékaře. Gymna celé vyprovodilo ho na poslední cestě do domova, do Velkého Jeníl s hudbou a praporem až za město. — Byl student hodný a dobrý, nad

Pravidelné služby Boží slouženy byly každou neděli a svátek v Mimo to byla dle zdejšího zvyku mše sv. na popeleční středu a d července za všechny živé i mrtvé dobrodince a professory ústavu.

K zpovědi a sv. přijímání přistoupili žáci třikrát do roka: dne 11. listopadu, o velikonocích dne 21. a 22. března po obvyklých rek cích a dne 20. a 21. června. V den Božího Těla súčastnili se žáci s porem průvodu, majíce v čele svou hudbu gymnasijní.

Dne 19. února konala se zkouška maturitní. Předsedal ředitel nasia Dr. Ant. Decker.

Dne 12. února 1910 skončeno první pololetí; dne 16. února z pololetí druhé.

Inspekce:

Dne 1., 9., 13. a 16. června bis. ordin. komissař Msgre. Dr. V Cába, inful. probošt, byl na inspekci náboženství.

Prázdniny vánoční byly od 24. prosince 1909 do neděle 2. ledna velkonoční od 22. do 29. března a svatodušní ode dne 14. do 17. kv

Akademie pěvecko-hudební ve prospěch fondu chudých studuj byla dne 16. dubna, čísla orchestrální a pěvecká nacvičil učitel zpěvu Voborský. Čistý příjem byl 413 K (hrubý příjem byl 509 K 04 h).

Maturitní zkoušky písemné byly od 9. do 11. června 1910 a ústní u dne 4. a 5. července.

Dne 2. července skončí se školní rok slavnou mší sv. s Te Deum mus o 8. hodině a pak budou rozdána vysvědčení.

Sbírka na zemskou komisi pro ochranu dětí a péči o mládež vynesla 10 korun 57·60, celkem již 254 K.

Povýšení: 1. Prof. Dr. Karel Müller do VIII. hodnostní třídy od na 1909 vyn. z 9. července 1909 č. 22.986 min. (23. srpna 1909 čís. z. š. r.). — 2. C. k. skut. uč. Jos. Lamač potvrzen v úřadě defi- ě s titulem professora (1. listopad 1909 č. 58884 z. š. r.).

IX. Některá důležitá nařízení.

A) Ministerská nařízení: 1. 1909 22. června: Školní plat jest platiti po- spořitelnou na účet ředitelství ústavu a instrukce k vybírání

2. 1910 8. května č. 19847: O tělesné výchově na stř. školách.

B) Zemské školní rady: 1. 1909 21. června č. 16299: Zdravotní opa- v žákovských knihovnách.

2. 1909 23. července č. 38361: Vybírání školného poštovní spořitelnou eno.

3. 1909 30. července č. 39703: Žákovské legitimace pro jízdu na stát- rahách potvrzuje přednosta výchozí stanice.

4. 1909 10. září č. 48061: Nové učebné osnovy pro jazyk německý, uzský a český pro rok 1909/10.

5. 1910 1. dubna č. 12469: Nové učebné osnovy pro jazyk český jako vací.

6. 1910 20. dubna č. 14776: Podporování dívčích lyceí a návod v pří- ospitování privatistek na středních školách

7. 1910 13. května č. 26294: Počet procent hospitantek na stř. školách.

8. 1910 28. května č. 27671: Podporování tělesné výchovy na střed. lách.

X. Seznam žáků a jich rodiště.

Poznámka. Žáci označení hvězdičkou obdrželi vysvědčení s výborným prospěchem. V závorkách označení vystoupili.

Třída I.

ř Josef, Pleše.
l Jan, Štítná.
Ladislav, New York, Amer.
František, Jindř. Hradec.
an Jan, Včelnice.
Bohuslav, Jindř. Hradec.
Vilém, Jindř. Hradec.
Kabeš Jan, Mnich.
Kalousek Josef, Peruc.
*Klik Josef, Deštná
Kohn Eduard, Čes Rudolec, Mor.
Kolář Josef, Jindř. Hradec.
*Kotýnek Václav, Deštná.
Leška František, Vřesná.

Löwy Max, Jindř. Hradec.
Mandahus Ed., Rzeszów, Halič.
Nečkář Jaroslav, Jindř. Hradec.
Novák Jaroslav, Radlice, Mor.
Picka Jaromír, Jindř. Hradec.
*Poláček Vojtěch, Jindř. Hradec.
Polívka Julius, Ústí n. Labem.
Posík Rudolf, Jindř. Hradec.
*Roubínek Josef, Nemyšle.
Švec Jindřich, Deštná.

(Undus Antonín, Tučapy.
*Vacek Bohumil, Č. Olešn.
Weinstein Vilém, Beztahc
(Volek Emanuel, Kamenic
*Vydra Karel, Kumžak.
Zedník Jan, Praha.
Priv.: *Aneltová Boh , Mar
Tuzarová Aloisie, J. H
Žáků 28 -

Třída II.

Brunner Jan, Jarošov.
*David Rudolf, Chrást.
*Dulík Jan, Políkno.
Eckhardt Felix, Louny.
*Emmer Vladimír, Strmilov.
Frantl Václav, V. Bednárec.
Freund Richard, Jindř. Hradec.
*Frischmann Josef, Třemešnice.
*Groulík Milan, Žamberk.
Hamr Karel, Plasná.
*Janoušek Em., Kam. Malíkov.
Jiřík Otakar, Král. Vinohrady.
Kalista Karel, Jindř. Hradec.
Kříž Frant., Mostečná.
Longin Konrád, Jindř. Hradec.
Neužil Frant., V. Ratmírov.
Nosakovič Josef, Košťany.
*Novák Josef st., Buková.
Novák Josef ml., Roseč.
Novotný Jan, Vídeň, D. Rak.

Pauer Vilém, Horšův Týn
*Richter Stanislav, Jindř. H
*Rösch Vilém, Jindř. Hrad
Roubiček Richard, Lžín.
Říha Václav, V. Bednárec
Šmejkal Bedřich, J. Hrade
Šperk Václav, Koloveč.
Weinstein Karel, Beztahov
*Vichra František, Deštná
Vopěnka Frant , Jindř. Hr
*Zdeněk Milan, M. Bedná
(Zedník Oldřich, Příbram.)
*Zikmund Frant., Jindř. H
Priv. *Bílá Marie, Jindř. H
*Friebová Libuše, J. H
*Frýdecká Mil., Dom
*Jezdinská Pavla, Kr.
Kopidlanská Růž., J. H
Žáků 32 -

Třída III.

Čiška Karel, Jičín.
*Dvořák Jan, Strmilov.
Guth Oskar, Jindř. Hradec.
Gšventner Antonín, Dačice, Mor.
Hoenig Rudolf, Horní Pěna.
Hoenig Štěpán, Langau. D. Rak.
Hůlka Bohumír, Zahrádka.
Hůlka Jan, Lasenice.
Charvát Bohumil, Ratiboř.
(Kamín J ndřich, Jindř. Hradec.)
Kaplický Jindřich, J. Hradec.
Klátil Antonín, Jindř. Hradec.
*Kocholatý Marian, Chuděnice.
Komorád Ladislav, Lovětín.
Kryzánek Ladislav, J. Hradec.
Kunstovný Václav, Jindř. Hradec.
Líbal Alois, Veselí nad Luž.
Líbal Frant., Veselí nad Luž.
*Petrák František, J. Hradec.

*Podhrázský Jan, Nový Et
Posík Vilém, Jindř. Hradec
Prášek Karel, Jindř. Hrade
Rezek Antonín, Jindř. Hrad
Röschel Jaroslav, Jindř. Hr
*Sedláček Ladislav, Mostec
*Sigid Karel, Rodinov.
Stach Josef, Stráž nad Než
Sypal Tomáš, Jeznice.
Šetka Adolf, Jindř. Hradec
Šiman Eugen, Jindř. Hrade
*Ullmann Rudolf, Kamenice
Urbanec Jan, Hříšice, Mor.
Zděnek Josef, Mnich.
Priv.: Davidová Růžena, Ra
*Englická Libuše, J. H
Hronová Marie, J. Hra
*Kreilová Marie, J. H
Žáků 32 +

Třída IV. a)

er Jan, Jindř. Hradec.
dnář Ludvík, Jindř. Hradec.
hrad Josef, H. Dubenky, Mor.
ha Karel, Jindř. Hradec.
řák Jan, Jarošov.
d Maxmilian, Kard. Řečice.
r František, Vel. Zdikov.
rö Leopold, Vídeň, D. Rak.
chberg Antonín, Buková.
nig Richard, Hor. Pěná.
rký Jan, Třebelovice, Mor.
n Bohumír, Jindř. Hradec.

Hruška Jan, Kostel. Radouň.
Janda Alois, Černovice.
(Janda Ant., Vel. Jeníkov, Mor. †)
Kozák Josef, Slabšice.
Lanštják Boh., H. Dubenky, Mor,
Líkař Jan, Jindř. Hradec.
Mandl Antonín, Žďár.
Marsa Jiří, Polikno.
Naidr Karel, Mláka.
*Pelikán Vladimír, Hor. Cerekev.

Žáků 22.

Třída IV. b)

Jakub, Dědice, Mor
chatý Ladislav, Vyskytná.
inger Josef, Vosek.
nda Bohumil, Lásenice.
ha Václav, Jindř. Hradec.
áček Karel, Jindř. Hradec.
fried Vilém, Jindř. Hradec.
er Egon, Jindř. Hradec.
ík Josef, Jindř. Hradec.
idek Jan, Tábor.
ler Jan, Jindř. Hradec.
uhal Bohumil, Kard. Řečice.

*Šetka Jaroslav, Jindř. Hradec.
(Šperk Josef, Votice.)
Valenta Jan, Jindř. Hradec.
Vaněk Karel, Kard. Řečice.
Weigert Leopold, Dol. Královice.
Weil Otto, Benešov.
Zuna Jindřich, Březnice.
Žádný Jan, Vídeň, Dol. Rak.
Žemlička Miloš, Jindř. Hradec.
Priv.: *Sedláčková A., J. Hradec
*Žahourková Mar., J. Hradec.

Žáků 20 + 2.

Třída V.

ier Josef, J. Hradec.
a Karel, Jindř. Hradec.
š Jan, Kadaň.
ierník Alois, Roseč.
chberg Arnošt, Buková.
nig Jiří, Langau, D. Rak.
nig Karel, Horní Pěná.
lek František, Příbraz.
a František, J. Hradec.
eský Bohumír, Částrov.
ka Antonín, Jarošov.
ka Jaroslav, Zahrádka.
a Josef, Lásenice.
ust Josef, Mezimostí.
a Josef, Jindř. Hradec.
ent Vladimír, Domažlice.
zeit Josef, Jindř. Hradec.

*Listbauer František, J. Hradec.
*Menšík Oldřich, Smíchov.
Mraček Jindrich, Jindř. Hradec.
*Petrák Miroslav, Kumžak.
*Podlaha Josef, Zahoří.
Prchlík Stanislav, J. Hradec.
Rezek Martin, Jindř. Hradec.
Skala Josef, Syrov.
Šojsl Antonín, Okr. Radouň.
Titze Jan, Žirovnice.
*Tománek Ferdinand, N. Etink.
*Trčka Josef, Pluhův Žďár.
Zima Karel, Jindř. Hradec.
Priv. Fabianová Božena, Praha.
Žemličková Lid., J. Hradec.

Žáků 30 + 2.

Třída VI.

a Vojtěch, M. Radounka.
rda Jan, Světce.
ný Karel, Chýnov.
řák Frant., Světce.
chlager Karel, D. Cerekev.
r Antonín, Nový Etink.

Haslauer Augustin, J. Hradec.
Hobza Vladimír, Luka, Mor.
Holický Jan, Zvěrotice.
Kaplický Josef, J. Hradec.
Myslík Antonín., Strmilov.
Neckář František, Dol. Lhota.

Peroutka Bedřich, Deštná.
Peyrek Ladislav, J. Hradec.
Písař Josef, Stejka.
Prügl Karel, J. Hradec.
Svoboda Rudolf J. Hradec.
*Šiman Rudolf, J. Hradec.
Škrdle Josef, Pleše.
Štěrba Jaroslav, Lipnice, Mor.

*Tampír Ladislav, J. Hrad
Třebický Emanuel, J. Hra
Vaitauer Emanuel, Tábor.
Vohryzek Berthold, J. Hra
Wolf Karel, J. Hradec.
Priv. *Czwetlerová L., J. H

Žáků 25 +

Třída VII.

Běhálek Vladimír, Chudenice.
Bělohrad Fr., H. Dubenky, Mor.
Brada Josef, Počátky.
Budín Karel, Roseč.
Eisenhut Josef, Radenín.
*Groulík Jiří, Žamberk.
*Hoenig Karel, Langau, D. Rak.
Kadlec František, Deštná.
*Kotek Josef, Višňová
*Kunft Jindřich, Kard. Řečice.
Kýza Emanuel, J. Hradec.
Lanštják Krist., H. Dubenky, Mor.
Liebzeit Alois, J. Hradec.
*Mužík Emanuel, J. Hradec.
Nohava Štěpán, Pluhův Žďár.
Novotný František, Popelín, Mor.

Petr Jaroslav, Věžná.
Petrák Ladislav, J. Hradec.
Prágr Josef, Hlavňov.
Prášek Václav, Světlá n. S
Procházka Ivan, J. Hradec.
*Rezek Jaromír, J. Hradec.
*Roubík František, Jindř. H
*Schwarzer Miloslav, Klat
Soběský Boh., Sumrakov,
(Sova Rudolf, Lukavec.)
Strouhal Ladislav, Světce.
*Stufka Adolf, Jilovice.
*Švehla Stanislav, Strmilov
Tlachna Václav, Stráž.
Tomšík Albín, Třešť, Mor.

Žáků

Třída VIII.

*Dobrodinský Jan, Kumžak.
Fencl Stanislav, Jarošov.
*Frýdecký František, Slaný.
Hilgartner Josef, Jindř. Hradec.
Janeček Rudolf, Holná.
*Kořínek Oldřich, Pelhřimov.
Krbec Karel, Deštná.
Kryštůfek Jaroslav, Žirovnice.

Myslík Karel, Žirovnice.
Neubauer Alois, Jindř. Hra
Reiter Jindřich, Jindř. Hrad
*Šťastný František, Deštná.
Turek Karel, Včelnice.
Váša František, Pistina.
*Víta Bartoloměj, Kard. Ř

Žáků

XI. Návěští.

I. **Zápis nových žáků do I. třídy** pro školní *rok 1910—11* se hlá
a zkoušky přijímací budou dvakráte:

První zápis bude dne *4. a 5. července, druhý zápis* bude dne
10. září vždy *od 8 do 10 hodin dopoledne.*

Přijímací zkoušky písemné budou hned po zápise v 10 hodin,
ve 2 hodiny odpoledne. Hned po zkouškách oznámí se, kteří žáci jsou p

Podmínky přijetí: 10 let věku, vědomosti, jak jsou dole uvedeny.
pisu přijdou žáci s rodiči neb jich zástupcem do ředitelny gymna
přinesou *tyto průkazy:* řádný *křestní (rodný) list* — nikoli pouhý
z matriky, a *frekvetační vysvědčení* ze školy obecné — nikoli školní z
— nebo *vysvědčení* ze školy *měšťanské.*

Při zkoušce přijímací žádají se *tyto vědomosti: Z náboženství* tolik, ı mohou se žáci naučiti v prvních 4 ročnících pětitřídní školy obecné. *zyka českého* plynné *čtení* a hbité *psaní*, znalost nejhlavnějších *pravidel mických, rozbor* slovný i vět jednoduchých *rozvinutých* a znalost hlav- pravidel *pravopisných*. Z *počtů* zběhlost v sčítání, odčítání, *násobení a* í čísel celých. — Z jazyka českého a z počtů koná se *vždy zkouška má.*

Ústní zkoušky nekonají žáci: 1. z náboženství ti, kteří chodili do 4. ku a mají známku aspoň »dobře«; 2. z jazyka českého a z počtů ti kteří obdrželi z písemní zkoušky známku aspoň »dobře« a mají také ysvědčení frekventačním aspoň »dobře«.

Přijímací zkoušku do I. třídy opakovati lze na témže nebo na jiném ě teprve po roce. — *Do místnosti, kde se zkouší, obecenstvo přístupu* .

II. **Zápis nových žáků do vyšších tříd** bude dne 9. a 10. září od 10 1 hodin. — Tito přinesou svá vysvědčení (vysvědčení z posledního po- musí míti předepsanou propouštěcí poznámku), křestní nebo rodný list, případě dekret osvobozovací od školného nebo stipendijní. Žáci tito ou s rodiči nebo zástupci a udají *podstatné* důvody, proč na zdejším ě chtějí býti přijati.

III. **Zápis žáků,** kteří v studiích na zdejším ústavu hodlají **pokračo-** bude dne 9. a 10. září od 10 do 12 hodin.

Zkoušky opravné a doplňovací neb i přijímací do vyšších tříd budou). září o 8. hodině ranní; každý musí přijíti v čas ustanovený.

IV. **Platy žáků:** *a)* Nových: *Přijímací taxa 4 K 20 h* jednou pro vždy. ech: příspěvek 4 K na učebné pomůcky a příspěvek 50 h na zařízení ích her. Poplatky povinné platí žáci na počátku školního roku.

Přijímací taxy neplatí žáci na státní střední škole od školného osvo- cí. — Příspěvek na hry a 2 K na pomůcky může býti chudým sleven.

Dobrovolné příspěvky na chudé žáky gymnasijní přijímá ředitelství pisu, tolikéž *pro zemskou komisi na ochranu dítek.*

Školní plat 30 K za pololetí zaplatí v prvých šesti nedělích každého tí. Nemajetní žáci I. třídy mohou žádati *za odklad* placení školného ní pololetí, ale žádost podati jest nejdéle *do 18. září.*

V. **Školní rok 1910—11** začne se dne 11. září o 8. hodině ranní ním Ducha sv. a slavnými službami božími.

Vyučovati počne se dne 12. září o 8. hodině ranní.

V Jindřichově Hradci, dne 2. července 1910.

Dr. Antonín Decker,
c. k. ředitel.

Seznam prací programových.*)

1. výroční propis. Porovnání českého, latinského a řeckého časování. — Em. Hrbek, c. k. professor a zřízenec městské obce Jindřichovské.
Die vegetabilische Assimilation. — Jos. Balda.
Geschichtlicher Überblick der botanischen Wissenschaft. — Josef Balda.
Horaz und die ältere römische Literatur. — Fr. Kott.
Kurze Charakteristik der im Sophokleischen Aias handelnden Personen. — (S ukázkami českého překladu veršem přízvučným a časomírným.) — Jos. Hanačík.
Methode einer elementären Bestimmung des Maximums und Minimums algebraischer Functionen einer Variablen, verbunden mit einigen Anwendungen. — Jos. Ferd. Steinhauser.
O přednostech člověka před druhými zemšťany. Pojednání z člověkovědeckého stanoviska. — Jan Zátka.
O jakosti děje časoslova řeckého. — Od J. Škody.
Syllogistický dekalog. — Úryvek z logiky od Dra. Karla Matouška.
České Alexandreidy zlomek Musejní a zlomek Šafaříkův. — S příslušnými místy latinské Alexandreidy Gualtherem Kastellionským složené srovnal a vyložil prof. Kořínek.
Důkaz, že Přemyslovci, Jaromír a Oldřich byli nevlastní bratří Boleslava III., matka pak Boleslava že pocházela z domu Buziců, z rodu to nynějších králů Saských. — Sepsal prof. Frant. Gotthard.
Působení elektřiny dovnitř těles (dobrých vodičů). — Sepsal Dr. Eduard Schöbl.
Pojem a počinky státu a církve, jejich vespolný poměr k sobě atd. — Podává prof. Jan B. Gabriel.
Kterak Ovidius v „Proměnách“ jednotlivé báje spojoval. — Podává Jan Luňák.
O některých domělých narážkách politických v Sofokleově Oidipu Kolonském. — Podává Dr. Jos. Novák.
Výhoň Dub v rukopise Královdvorském. — Podává prof. Ignác B. Mašek.
O Herodotově pověrčivosti. — Podává prof. Václ. Škaloud.
Pojem a vznik papežství — jeho význam v dějinách světových — trvání a posloupnost jeho. — Podává prof. Jan Gabriel.
Trilogy Sofokleovy přirovnány k Euripidovým. — Od Dra. Josefa Nováka.
Pojem a počinky inkvisice.
Řeč na neděli 9. po sv. Duchu „o lásce k vlasti“. } prof. J. B. Gabriel.
Na památku žákům podává
Ukázka textu, grammatiky a glossaria Rukopisu Kralodvorského. — Podává prof. Ign. B. Mašek.
O právní moci hlavy čeledinné nad rodinou římskou. — Podává prof. Gustav Heš.
Ukázka překladu Sofokleova Filokteta. — Od prof. Václ. Škalouda.
Výklad Langlových obrazů k dějinám. — Podává Dr. Jos. Novák.
Jáchym z Hradce. — Od Tomáše Řehoře.
O staročeských listinách z konce 14. století v archivu Jindřichohradeckém. — Podává Jan Kaňka.

---

*) Tučným písmem vytištěný ročník znamená, že jsou ještě některé výtisky po ruce.

1887. O založení koleje jesuitské a seminaria sv. Vita v Jindř. Hr — Podal Ignác Kohout.

1888. Ze statistiky mocnářství Rakouského před sto lety se zvláš zřetelem k zemi České. — Úvaha ze statistiky srovnávací. — Gustav Heš.

1889. Moderní názory o elektřině. — Podal Dr. Jos. A. Theurer.

1890. Katechismus dějin filosofie. — Napsal Dr. Fr. X. Procházka.

1891. O měření zraku a výsledky měření u žáků gymnasia našeho škol. 1888—91. — Podal prof Frant. Reiss.

1892. Čtyři sochy antické. (Niobe, Laokoon, Zeus Otricolský, Apo Belvederský). Výklady Dra. Jos. Nováka.

1893. O působení Jana Vitéze ze Zredua a Jiřího z Poděbrad ve v Matyáše Korvina za krále uherského. — Na základě archivá podává prof. Gustav Heš.

1894. O granátě se stránky tvaroslovné, optické a lučebné. — Dr. Sixta.

1895. Dějiny gymnasia Jindřicho-Hradeckého. — Prof. Gustav He suppl. uč. Frant. Tajrych. Slavnostní řeč k 300leté památce tr ústavu. — Řed. J. Říha.

1896. Studie k mluvě Herodotově. — Zdeněk Vysoký.

1897. O soudech záporných. — Dr. Fr. X. Procházka.

1898.
1899.
1900.
1901. Katalog knihovny učitelské. — Prof. Dr. Jos. Novák.

1902. Katalog knihovny učitelské. Prof. Dr. Jos. Novák a Zd. Vys Doplňky a dodatky k dějinám gymnasia jindřichohradeckého Prof. Gustav Heš.

1903. Katalog knihovny učitelské. — Prof. Zd. Vysoký.

1904. Katalog knihovny učitelské. VII. — Řed. Dr. Ant. Decker. Doplňky k dějinám gymnasia J.-Hradeckého. III. — Prof. G.

1905 a 1906 Doplňky k dějinám gymnasia J.-Hradeckého. IV. V. — Prof G. Katalog knihovny učitelské. VIII. IX. — Řed. Dr. Ant. De a prof. Rich Plicka.

1907. Význam říše byzantské v dějinách lidstva I. — Dr. Karel Mü
1908. „ „ „ „ „ II. — Dr. Karel Mü
Oslava 100letého obnovení gymn. zdejšího. — Řed. Dr. A. Dec
Za professorem Karlem Solperou. — Prof. Jos. Kořínek.

1909. Jubilejní slavnost 60leté vlády Jeho Veličenstva císaře a k Františka Josefa I. *a)* Ochránci míru. Rich. Plicka. — *b)* Caesar Immortalis! G. Heš. — *c)* Kantáta. Jos. Vlasák a Voborský. — *d)* Řeč slavnostní. Dr. A. Decker.
Úvod do mikrofotografie. — Prof. Bedřich Řezník.
Doplňky katalogu knihovny učitelské. — Dr. Ant. Decker a Rich. Plicka.

1910. Výklad a srovnání hlavních způsobů, jakými se prováději zvané přibližné kvadratury. Prof. Jan Kubiček.
Za ředitelem c. k. školním radou Augustinem Pirchanem Prof. Jos. Karták.
Doplňky katalogu knihovny učitelské. — Prof. Rich. Plicka.

Untersuchungen

über die

Kettenbrückenlinie.

Entworfen

vom

Dr. Jakob Philipp Kulik,

öffentl. ord. Professor der höheren Mathematik an der k. k. Prager Universität, und ordentl. Mitgliede der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften und der Landwirthschaftsgesellschaft in Steyermark.

Mit 2 Steintafeln.

Prag, 1838.

Druck und Papier von Gottlieb Haase Söhne.

Dr. J. Ph. Kulik's

UNTERSUCHUNGEN

über die

Kettenbrückenlinie.

Est quadam prodire tenus, si non datur ultra.
Horatii epist. I.

Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie.

Vom

Dr. Jakob Philipp Kulik.

Einleitung.

Der Zweck vorstehender Schrift ist eine genauere Erörterung der Eigenschaften derjenigen krummen Linie, welche die Tragketten einer Kettenbrücke annehmen, wenn dieselben nebst ihrem eigenen Gewichte, noch das Gewicht der Tragstangen, sammt der daran hängenden Fahrbahn zu erhalten haben. Ich will sie die Kettenbrückenlinie nennen.

Man hat unter verschiedenen Voraussetzungen die Kettenbrückenlinie zu bestimmen gesucht. So findet Navier, *) dass sie eine Parabel sey, Gilbert **) nimmt hiefür die gleichgespannte Kettenlinie, Gerstner ***) die Ellipse an: andere Mathematiker halten sie für die gemeine Kettenlinie. Meines Erachtens ist die Kettenbrückenlinie eine eigene, von den eben genannten verschiedene krumme Linie, welche mit jeder erforderlichen Genauigkeit verzeichnet werden kann, wie dieses die Folge unwiderleglich zeigt. Ausser dem theoretischen Interesse, welches die genauere Bestimmung der Kettenbrückenlinie dem Denker gewährt, hat auch dieser Gegenstand eine praktische Seite. Beim Baue der Kettenbrücken ist es wichtig, die Länge der Tragstangen, welche in gewissen Punkten der Tragketten eingehängt werden, so zu bestimmen, dass ihre Endpunkte, welche die Brückenbahn stützen, in einer horizontalen Linie zu liegen kommen. Will man nun die Kettenbrückenlinie als eine Parabel, Ellipse u. s. f. betrachten, so wird man freilich diese Längen im Voraus berechnen können: allein man wird dann in die unausweichliche Nothwendigkeit kommen, entweder versuchsweise die Tragstangen nach Umständen abzukürzen, oder durch andere län-

*) *Memoire sur les ponts suspendus en fils de fer. Paris* 1823. In das Deutsche übersetzt von *J. Kutschera.* Lemberg 1829.

**) *On the mathematical Theory of Suspension Bridges. By Davies Gilbert (Philos. Transact. for* 1826. *Part. III. p.* 202.)

***) Handbuch der Mechanik vom F. J. Ritter *v. Gerstner.* Band I. S. 477. Prag 1831.

gere Stangen zu ersetzen, bis die beabsichtigte Geradlinigkeit der Fahrbahn nahe erreicht ist, oder aber man wird, welcher Fall gewöhnlich eintrifft, keine ebene horizontale, sondern eine nach der Mitte zu gekrümmte Brückenbahn erzielen.

Eine neue Methode zur Verzeichnung der Kegelschnitte, auf welche ich zufällig bei Entwerfung der zu dieser Schrift gehörenden Figuren gerathen bin, dürfte ihrer Einfachheit halber das Interesse der Techniker in Anspruch nehmen.

Schliesslich muss ich erwähnen, dass die hier vorkommenden Tafeln von mir neu berechnet wurden, und sich von allen bisher bekannten Tafeln, ihrer Genauigkeit halber, wesentlich unterscheiden.

I. Die gleichgespannte Kettenlinie.

§. 1.

Bekanntlich entsteht die gemeine Kettenlinie, wenn eine gleichförmig dicke und biegsame Kette an ihren beiden Enden so befestigt wird, dass ihre sämmtlichen Theile frei schweben. Die Spannung, welche in einzelnen Punkten derselben Statt hat, nimmt von der Mitte der Kettenlinie, d. i. von ihrem Scheitel gegen die Aufhängepunkte beständig zu, und ist an den letzteren am grössten.

Denkt man sich nun eine ungleichförmig dicke Kette von der Beschaffenheit, dass ihre Stärke von ihrer Mitte gegen die beiden Enden in dem Verhältnisse wächst, als die Spannungen, denen einzelne Punkte derselben unterworfen sind, grösser werden, an ihren beiden Enden unveränderlich aufgehängt, und sich selbst überlassen; so bildet sie eine von der gemeinen Kettenlinie abweichende krumme Linie, welche wegen der gleichen Festigkeit oder Spannung aller ihrer Theile die gleichgespannte Kettenlinie *) *(the Catenary of equal strength)* genannt werden kann.

§. 2.

Zur leichteren Auffassung des Folgenden, und um die gemeine Kettenlinie mit der Kettenbrückenlinie vergleichen zu können, will ich einige in meiner Abhandlung über die gemeine Kettenlinie **) aufgestellten Formeln hier aufführen:

Stellt $A\,C\,B$ (fig. 1) die gemeine Kettenlinie vor, bei welcher A, B die Aufhängepunkte, C den Scheitel derselben bedeuten, und führt man durch einen beliebigen Punkt M die Horizontale $M\,Q$ und die Tangente $M\,T$, so heisst der Winkel $Q\,M\,T$ der Stellungswinkel des Punktes M. Bezeichnet man diesen mit v, und die Bogenlänge $C\,M$ vom Scheitel an gerechnet mit s; so hat man

$$1)\quad s = p.\ tg\,v$$

*) Meines Wissens ist diese Kurve noch in keinem deutschen Lehrbuche der Statik abgehandelt worden, und es mag vorläufig diese Benennung, bis sie nicht durch eine bessere ersetzt wird, hier gelten.

**) Theorie und Tafeln der (gemeinen) Kettenlinie. Prag 1832.

wo p eine konstante Gerade vorstellt, welche man den Parameter der Kettenlinie nennt: sie ist die Bogenlänge eines Punktes, dessen Stellungswinkel 45^0 beträgt, weil für $v = 45^0$, $s = p$ wird.

Führt man durch C die Vertikale $C\ Y$, und überträgt den Parameter von C gegen F, und zieht $F\ X$ zu $C\ Y$ senkrecht; so nennt man diese Gerade die Direktrix der Kettenlinie. Wird nun der Punkt F zum Anfangspunkt der Koordinaten, und die Direktrix zur Abszissenaxe angenommen, dann hat man für jeden Punkt M, dessen Abszisse $F\ P = x$, Ordinate $P\ M = y$ ist, die Gleichungen

$$2)\quad x = p\ \lambda\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2}\ v)$$

unter λ natürliche Logarithmen verstanden

$$3)\quad y = p\ sec\ v \text{ und wegen 1)}$$

$$4)\quad s = \sqrt{(y^2 - p^2)}$$

Bezeichnet man mit R den Krümmungshalbmesser eines Punktes, dessen Ordinate y ist, so ist

$$5)\quad R = -\frac{y^2}{p}$$

eine Formel, welche für den Scheitel, wo $y = p$ wird

$$6)\quad R = -p \text{ gibt:}$$

es ist sonach der Parameter nichts anderes, als der Krümmungshalbmesser für den Scheitel der Kettenlinie.

Zu seiner Bestimmung führen folgende Formeln:

$$7)\quad d = p\ \lambda\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2}\ a)$$

$$8)\quad t = p\ (sec\ a - 1)$$

$$9)\quad m = \frac{\lambda\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2}\ a)}{sec\ a - 1} \qquad 10)\quad p = \frac{t}{sec\ a - 1}$$

in denen d die halbe Spannweite, t den Pfeil oder die Vertiefung in der Mitte der Kettenlinie, a den Stellungswinkel des Aufhängepunktes und m den Quotienten $\frac{d}{t}$ bedeutet. Behandelt man die Formel 9) logarithmisch, so ergibt sich leicht *)

$$11)\quad log\ m = log\ cos\ a + log\ [log\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2}\ a) - 10] - 2\ log\ sin\ \tfrac{1}{2}\ a + 0.0611857.$$

§. 3.

Suchen wir zuvörderst den Ausdruck für die Bogenlänge einer gleichgespannten Kettenlinie.

Seien A, B (fig. 2) die Aufhängepunkte, C der Scheitel derselben: sei ferner ph die Spannung im Scheitel, wo p den Parameter der Kurve, und h das Gewicht der Längeneinheit der daselbst Statt habenden Kettendicke vorstellt, und es sei noch T die Spannung an irgend einem Punkte M derselben. Man setze den im Scheitel anfangenden Bogen $C\ M = s$,

*) Durch einen Schreibfehler ist am a. O. die Wiederholung des Zeichens *log* im zweiten Gliede rechts weggeblieben; die beigefügten Tafeln stützen sich jedoch auf der richtigen Formel.

und es sei dessen Gewicht gleich dem Gewichte einer gleichförmig dicken Kette von der Länge σ und dem Querschnitte der Kette im Scheitel der Kurve, endlich bezeichne v den Stellungswinkel QMT des Punktes M; so hat man bei Zerfällung der nach der Tangente MT wirkenden Spannung T in die ihr gleichgeltenden Kräfte $T\sin v$ nach der Richtung MP, und $T\cos v$ nach der Richtung MQ

$$T\sin v = \sigma h \quad , \quad T\cos v = ph, \text{ also} \qquad \alpha)$$

$$T^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = h^2(\sigma^2 + p^2), \text{ oder}$$

$$T = h\sqrt{(\sigma^2 + p^2)} \qquad \beta)$$

Man bezeichne noch mit u und b die Querschnitte der Kette beziehungsweise in den Punkten M und C, so wird der Inhalt eines Kettenelementes bei M von der Länge ds, nämlich

$$u\,ds = b\,d\sigma, \text{ diess gibt}$$

$$u : b = d\sigma : ds$$

und da die Querschnitte den Spannungen proportional sein sollen, so hat man auch

$$u : b = T : ph = d\sigma : ds$$

woraus sofort folgt

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{T}{ph} \text{ und wegen } \beta) = \frac{\sqrt{(\sigma^2+p^2)}}{p}$$

mithin ist 12) $ds = \dfrac{p\,d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2+p^2)}}$

Die Integration gibt nun

$$s = p\lambda\left[\sigma + \sqrt{(\sigma^2+p^2)}\right] + C$$

da aber s mit σ zugleich verschwindet, so ergibt sich

$$C = -p\lambda p$$

und sonach vollständig

$$s = p\lambda\frac{\sigma+\sqrt{(\sigma^2+p^2)}}{p} \qquad \gamma)$$

Dividirt man noch die Gleichungen $\alpha)$ miteinander, so erhält man

$$13)\ tg\,v = \frac{\sigma}{p}$$

und nach Einführung dieses Werthes in die Formel $\gamma)$ findet man

$$s = p\lambda(tg\,v + sec\,v) \text{ oder}$$

$$14)\ s = p\lambda\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}v)$$

Bei der Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Formel 2) ist leicht zu ersehen, dass bei gleichen Stellungswinkeln in der gemeinen und in der gleichgespannten Kettenlinie die Abszissen der ersteren den Bogenlängen der andern gleich sind.

§. 4.

Die Wichtigkeit der Funktion $p\lambda\,tg\,(45^0 + \frac{1}{2}v)$ in der Analysis überhaupt, *) und in der Lehre von den Kettenlinien insbesondere, hat mich bewogen, eine Tafel derselben

*) S. *Gudermann's* Theorie der Potenzial-Funktionen in *Crelle's Journal* der reinen und angewandten Mathematik. Band. VI. VII. und VIII.

für alle Werthe von v unter 24° von 6 zu 6 Minuten zu berechnen, hierbei wurde $p = 100$ angenommen. *Legendre* *) hat eine Tafel dieser Funktion in 12 Dezimalstellen für alle Werthe von v unter 90° jedoch nur von 30′ zu 30′ mitgetheilt, aus welcher ich die Zwischenwerthe durch eine sorgfältige Interpolation mit Rücksicht auf die dritten Differenzen und mit einer Genauigkeit von 10 Dezimalstellen abgeleitet habe. In der nachstehenden Tafel behielt ich die ersten 6 Stellen.

I. Tafel.

Bogenlängen der gleichgespannten Kettenlinie.

v	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
0°	0.0000	0.1745	0.3491	0.5236	0.6981	0.8727	1.0472	1.2218	1.3963	1.5709
1	1.7454	1.9200	2.0945	2.2691	2.4437	2.6183	2.7929	2.9675	3.1421	3.3167
2	3.4914	3.6660	3.8407	4.0153	4.1900	4.3647	4.5394	4.7141	4.8889	5.0636
3	5.2384	5.4132	5.5880	5.7628	5.9376	6.1125	6.2873	6.4622	6.6371	6.8120
4	6.9870	7.1620	7.3370	7.5120	7.6870	7.8621	8.0372	8.2123	8.3874	8.5626
5	8.7377	8.9130	9.0882	9.2635	9.4388	9.6141	9.7894	9.9648	10.1402	10.3157
6	10.4911	10.6667	10.8422	11.0178	11.1934	11.3691	11.5447	11.7204	11.8962	12.0720
7	12.2478	12.4237	12.5996	12.7755	12.9515	13.1275	13.3036	13.4797	13.6558	13.8320
8	14.0082	14.1845	14.3608	14.5372	14.7136	14.8900	15.0665	15.2431	15.4196	15.5963
9	15.7730	15.9497	16.1265	16.3033	16.4802	16.6571	16.8341	17.0111	17.1882	17.3654
10	17.5426	17.7198	17.8971	18.0745	18.2519	18.4294	18.6069	18.7845	18.9622	19.1399
11	19.3177	19.4955	19.6734	19.8513	20.0293	20.2074	20.3856	20.5638	20.7420	20.9204
12	21.0988	21.2772	21.4558	21.6344	21.8130	21.9918	22.1706	22.3494	22.5284	22.7074
13	22.8865	23.0657	23.2449	23.4242	23.6036	23.7830	23.9626	24.1422	24.3219	24.5016
14	24.6814	24.8614	25.0414	25.2214	25.4016	25.5818	25.7621	25.9425	26.1230	26.3036
15	26.4842	26.6650	26.8458	27.0267	27.2077	27.3887	27.5699	27.7512	27.9325	28.1139
16	28.2955	28.4771	28.6588	28.8406	29.0225	29.2044	29.3865	29.5687	29.7509	29.9333
17	30.1158	30.2983	30.4810	30.6637	30.8466	31.0295	31.2126	31.3957	31.5790	31.7624
18	31.9458	32.1294	32.3131	32.4968	32.6807	32.8647	33.0488	33.2330	33.4173	33.6018
19	33.7863	33.9709	34.1557	34.3406	34.5255	34.7106	34.8959	35.0812	35.2666	35.5222
20	35.6379	35.8236	36.0096	36.1956	36.3817	36.5680	36 7544	36.9409	37.1276	37.3143
21	37.5012	37.6882	37.8754	38.0626	38.2500	38.4375	38.6252	38.8130	39.0009	39.1889
22	39.3771	39.5654	39.7538	39.9424	40.1311	40.3200	40.5090	40.6981	40.8872	41.0767
23	41.2663	41.4559	41.6458	41.8357	42.0258	42.2161	42.4065	42.5970	42.7877	42.9785

§. 5.

Da die Stellungswinkel der Aufhängepunkte bei Kettenbrücken nicht leicht 20° übersteigen, so reicht vorstehende Tafel für alle Fälle aus, wo Bogenlängen der gleichgespannten Kettenlinie zu bestimmen sind. Ist nun der Stellungswinkel eines Punktes in Graden und

*) *Exercices de calcul integral. Par M. Legendre. Tome 3e.*

Minuten gegeben: dann geht man mit den Graden in die erste vertikale Spalte und mit den Minuten in die oberste horizontale Zeile der Tafel, und fährt von da vertikal abwärts bis zu jener horizontalen Zeile, welche durch die Grade des Stellungswinkels geht; am Orte des Zusammentreffens findet man die Zahl, welche die verlangte Bogenlänge ausdrückt. Sei z. B. $v = 17^0\,42'$, so erhält man aus der Tafel unmittelbar $s = 31.3957$, der noch genauere Werth ist $s = 31.39574689$.

Kommen die Minuten eines gegebenen Stellungswinkels in der Tafel nicht vor, so findet man die gesuchte Bogenlänge durch Proportionaltheile, indem man den Unterschied des nächst grösseren und nächst kleineren Werthes von s aus der Tafel mit der Zahl der im gegebenen Stellungswinkel überschüssigen Minuten multiplizirt, das Produkt durch 6 dividirt und zur nächst kleineren Bogenlänge in der Tafel addirt. Wäre also z. B. $v = 17^0\,47'$, dann hat man

$v = 17^0\,48'$ $\quad s = 31.5790$

$v = 17^0\,42'$ $\quad s = 31.3957$

Unterschied. 0.1833

nun ist $17^0\,47' - 17^0.\,42' = 5'$ und $5 \times 0.1833 = 0.9165$

daher $\frac{1}{6}\ 0.9165 = 0.1527$

nächst kleinere $s = 31.3957$

gesuchte Bogenlänge $= 31.5484$

Da diese Tafel für den Parameter $p = 100$ konstruirt ist, so ergeben sich die Bogenlängen für einen andern Parameter p', wenn man die zugehörigen Zahlen der Tafel mit $\frac{1}{100}\,p'$ multiplizirt. Es wäre sonach für den Parameter $p' = 79$ und $v = 17^0\,47'$,

$$s = \tfrac{79}{100} \times 31.5484 = 24.9232$$

Eben dasselbe ist beim Gebrauche der folgenden Tafeln zu bemerken.

§. 6.

Um noch die Koordinatengleichung unserer Kettenlinie zu finden, hat man nach der Formel 13)

$$tg\,v = \frac{\sigma}{p} = \frac{dy}{dx} \qquad \alpha)$$

indem $\frac{dy}{dx}$ immer die Tangente des Winkels vorstellt, welchen die Berührende eines Punktes der Kurve mit der Abszissenaxe einschliesst; verlängert man aber die Tangente MT (fig. 2), bis sie die Abszissenaxe FX in E schneidet, so sind offenbar die Winkel $TMQ = v$, und MEX einander gleich: hierbei sind die Koordinaten des Punktes M, $FP = x$, $PM = y$, und und es heisst hier, wie bei der gemeinen Kettenlinie die Gerade $FC = p$ der Parameter, die Gerade XX' die Direktrix der Kurve. Quadrirt man die Gleichung $\alpha)$ und addirt beiderseits dx^2, so ergibt sich, wegen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(\sigma^2 + p^2)}}{p} \qquad \beta)$$

und nach Substituirung des Werthes von ds aus der Formel 12) im Ausdrucke $\beta)$

$$\frac{p\,d\sigma}{dx\sqrt{(\sigma^2+p^2)}} = \sqrt{\frac{(\sigma^2+p^2)}{p}}, \text{ diess gibt}$$

$$dx = \frac{p^2\,d\sigma}{\sigma^2+p^2} \qquad \gamma)$$

das Integrale hiervon ist nach (A. F. 328) *)

$$x = p.\ arc.\ tg\ \frac{\sigma}{p} \qquad \delta)$$

Setzt man aber in der Gleichung $\alpha)$ statt dx seinen Werth aus der Gleichung $\gamma)$, so folgt

$$dy = \frac{p\,\sigma.\,d\sigma}{\sigma^2+p^2}$$

dessen Integrale nach (A. F. 301)

$$y = \tfrac{1}{2}\,p\,\lambda\,(\sigma^2+p^2) \text{ ist.}$$

Die Konstante lässt sich durch die Bedingung bestimmen, dass für $\sigma = o$, $y = p$ wird; man findet so $C = p - \tfrac{1}{2}\,p\,\lambda\,p^2$, und daher

$$y = p\left[\tfrac{1}{2}\,\lambda\left(\frac{\sigma^2+p^2}{p^2}\right)+1\right] \text{ d. i.}$$

weil $\frac{1}{2}\,\lambda\,\frac{\sigma^2+p^2}{p^2} = \lambda\,\frac{\sqrt{\sigma^2+p^2}}{p^2}$ ist,

$$y = p\left[1+\lambda\sqrt{\frac{\sigma^2+p^2}{p^2}}\right] \qquad \varepsilon)$$

Durch Einführung des Stellungswinkels v aus der Formel $\alpha)$ in die Formeln $\delta)$ und $\varepsilon)$ erhält man, wegen

$$tg\,\frac{x}{p} = \frac{\sigma}{p} = tg\,v$$

15) $x = p\,v$ und

16) $y = p\,(\lambda\,sec\,v + 1)$, mithin ist

17) $y = p\,(\lambda\,sec\frac{x}{p} + 1)$

die Koordinatengleichung der gleichgespannten Kettenlinie. Die Spannung T ergibt sich aber, wenn man in der Formel $\beta)$ §. 3, statt σ seinen Werth $p\,tg\,v = p\,tg\frac{x}{p}$ setzt.

18) $T = p\,h\,sec\frac{x}{p}$, während die Formel 14) für $v = \frac{x}{p}$ in

19) $s = p\,\lambda\,tg\left(45^0+\frac{x}{2p}\right)$ übergeht.

§. 7.

Aus den eben erhaltenen Formeln lassen sich mehrere Folgerungen anstellen:

1) Die gleichgespannte Kettenlinie ist eine transzendente Kurve, welche

*) Das Citat (A. F. 328) bedeutet die Formel 328) in meinem Lehrbuche der höhern Analysis. Prag 1831. Dasselbe ist von allen Citaten dieser Art zu verstehen.

2) aus zwei unendlichen Aesten besteht, weil für $v = 90^0$, x in $\frac{1}{2} p \pi$ übergeht, und y unendlich wird.

3) weil für $v = o$, $x = o$, und $y = p$ wird, so liegen alle Punkte der Kettenlinie auf einer Seite der Abszissenaxe, ihr Scheitel liegt dieser am nächsten, nämlich im Abstande $y = p$, und

4) weil für gleich grosse positive und negative Werthe von x, der Werth von y ungeändert bleibt, so theilt die Ordinatenaxe $C\,Y$ die Kurve in zwei gleiche und ähnliche Hälften CMA, $CM'B$. Ferner

5) gibt es für grössere Abszissen als $\frac{1}{2} p \pi$ keine Punkte der Kurve, oder die Vertikalen DG, und $D'G'$, Fig. 3, welche in dem Abstande $FD = FD' = \frac{1}{2} p \pi$ der Ordinatentaxe $F\,Y$ parallel laufen, sind Assymptoten der Kurve. Endlich

6) weil ebene Figuren, die sich durch nichts als ihre Dimensionen unterscheiden, einander ähnlich sind, so folgt, dass alle gleichgespannten Kettenlinien einander ähnlich sind.

§. 8.

Wir wollen nun die gefundenen Formeln in eine für die Rechnung bequemere Gestalt bringen. Gewöhnlich handelt es sich bei Verzeichnung der Kettenlinie um die Bestimmung der Ordinate, der Spannung und des Stellungswinkels, welche mit einer als gegeben betrachteten Abszisse zusammen gehören. Man findet zuvörderst aus der Formel 15) den Stellungswinkel $v = \frac{x}{p}$, wo das Glied rechter Hand als Bogenlänge zu betrachten ist, zu dem das in Graden, Minuten zugehörige v zu bestimmen wäre. Drückt man nun v in Minuten und Dezimalstellen der Minuten aus, so hat man für die Länge einer Minute im Bogen $\frac{\pi}{180.60} = 0.0002908882$ dessen Logarithme $0.4637262 - 4$ ist. Es wird sonach, wenn $p = 100$ gesetzt wird,

$log\ v = log\ x - 0.4637262 + 2$. Sei Beispiels halber $x = 37$, so findet man $v = 1271'.966 = 21^0 11'.97$ als Stellungswinkel, der mit der Abszisse $x = 37$ für den Parameter $p = 100$ zusammenhängt.

Aus der Formel 16) erhält man

$$\frac{y-p}{p} = \lambda\ sec\ v$$

und wenn man beiderseits Logarithmen nimmt, wird

$$log\ (y-p) - log\ p = log\ \lambda\ sec\ v$$

es ist aber $\lambda\ sec\ v = \frac{log\ sec\ v}{M} = \frac{10 - log\ cos\ v}{M}$, wenn M den Modulus der briggischen Logarithmen vorstellt, diess gibt

$log\ \lambda\ sec\ v = log\ (10 - log\ cos\ v) - log\ M = log\ (10 - log\ cos\ v) + 0.3622157$

sonach erhält man

20) $log\ (y-p) = 2.3622157 + log\ (10 - log\ cos\ v)$

Im obigen Beispiele hat man

$$log\ 21^0 11'.97 = 0.9695683 \text{ mithin}$$

$$10 - log\ 21^0 11'.97 = 0.0304317, \text{ hiervon den Logarithmen genommen, wird}$$

$$0.4833262 - 2$$

die Konstante 2.3622157 addirt

$$0.8455419 = log\ 7.00716$$

sonach ist $y - 100 = 7.00716$

Eben so erhält man aus Formel 14)

$$log\ s = log\ p + log\ \lambda\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2} v), \text{ und } p = 100 \text{ angenommen}$$

$$= 2 + log \left[\frac{log\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2} v) - 10}{M}\right], \text{ mithin}$$

21) $log\ s = 2.3622157 + log\ [log\ tg\ (45^0 + \tfrac{1}{2} v) - 10]$

Im obigen Beispiele steht die Rechnung so:

es ist $v = 21^0 11'.97$, $\tfrac{1}{2} v = 10^0 35'.98$ und $45^0 + \tfrac{1}{2} v = 55^0 35'.98$

nun hat man $log\ tg\ (55^0 35'.98) - 10 = 0.1644852$

$log\ (0.1644852) = 0.2161268 - 1$

die Konstante $= 2,3622157$

1.5783425

welcher Logarithme zur Zahl $37.8741 = s$ gehört.

§. 9.

Folgende Tafel gibt für die in der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Abszissen die zugehörigen Ordinaten, Bogenlängen, Spannungen und Stellungswinkel der gleichgespannten Kettenlinie, ferner zum Behufe einer leichteren Uebertragung dieser Grössen auf andere Parameter die Logarithmen der Ordinaten, Bogenlängen und Spannungen, wobei der Parameter $= 100$ vorausgesetzt, und die Tangente des Scheitels CX'' (fig. 2) als Abszissenaxe angenommen wird.

II. Tafel.

Koordinaten, Bogenlängen, Spannungen und Stellungswinkel der gleichgespannten Kettenlinie. *)

x	$y-p$	s	T	v	$\log(y-p)$	$\log s$	$\log T$
1	0.0050	1.0001	100.0050	0° 34.38	0.69906—3	0.00004	2.00000
2	0.0200	2.0001	100.0200	1 8.75	0.30099—2	0.30105	2.00009
3	0.0450	3.0004	100.0502	1 43.13	0.65227—2	0.47718	2.00022
4	0.0800	4.0011	100.0802	2 17.51	0.90321—2	0.60218	2.00035
5	0.1250	5.0021	100.1251	2 51.89	0.09610—1	0.69915	2.00054
6	0.1801	6.0036	100.1803	3 26.26	0.25551—1	0.77841	2.00078
7	0.2452	7.0057	100.2455	4 0.64	0.38951—1	0.84545	2.00106
8	0.3203	8.0085	100.3209	4 35.02	0.50562—1	0.90355	2.00139
9	0.4056	9.0122	100.4064	5 9.40	0.60805—1	0.95483	2.00176
10	0.5008	10.0167	100.5021	5 43.77	0.69968—1	1.00072	2.00217
11	0.6062	11.0222	100.6081	6 18.15	0.78263—1	1.04227	2.00263
12	0.7217	12.0289	100.7243	6 52.53	0.85838—1	1.08023	2.00313
13	0.8471	13.0368	100.8509	7 26.91	0.92795—1	1.11517	2.00368
14	0.9832	14.0460	100.9880	8 1.28	0.99264—1	1.14755	2.00427
15	1.1292	15.0566	101.1356	8 35.66	0.05278	1.17773	2.00490
16	1.2855	16.0687	101.2938	9 10.04	0.10971	1.20598	2.00558
17	1.4520	17.0825	101.4626	9 44.42	0.16198	1.23255	2.00631
18	1.6288	18.0980	101.6421	10 18.79	0.21187	1.25763	2.00707
19	1.8159	19.1154	101.8325	10 53.17	0.25910	1.28138	2.00789
20	2.0136	20.1347	102.0339	11 27.55	0.30397	1.30395	2.00874
21	2.2214	21.1561	102.2463	12 1.93	0.34663	1.32544	2.00965
22	2.4397	22.1796	102.4698	12 36.30	0.38734	1.34595	2.01060
23	2.6686	23.2055	102.7046	13 10.68	0.42628	1.36559	2.01159
24	2.9081	24.2338	102.9508	13 45.06	0.46361	1.38442	2.01263
25	3.1582	25.2645	103.2085	14 19.44	0.49944	1.40251	2.01372
26	3.4187	26.2980	103.4779	14 53.81	0.53386	1.41992	2.01485
27	3.6901	27.3341	103.7591	15 28.19	0.56704	1.43670	2.01603
28	3.9723	28.3732	104.0523	16 2.57	0.59904	1.45289	2.01725
29	4.2653	29.4152	104.3576	16 36.95	0.62995	1.46857	2.01852
30	4.5692	30.4604	104.6751	17 11.32	0.65984	1.48373	2.01984
31	4.8840	31.5088	105.0052	17 45.70	0.68878	1.49843	2.02121
32	5.2099	32.5605	105.3479	18 20.08	0.71683	1.51269	2.02263
33	5.5468	33.6158	105.7035	18 54.46	0.74404	1.52654	2.02409
34	5.8948	34.6747	106.0721	19 28.83	0.77047	1.54001	2.02560
35	6.2543	35.7373	106.4540	20 3.21	0.79618	1.55312	2.02716
36	6.6141	36.8038	106.8494	20 37.59	0.82047	1.56589	2.02877
37	7.0072	37.8743	107.2585	21 11.97	0.84554	1.57834	2.03043
38	7.4008	38.9490	107.6814	21 46.34	0.86928	1.59050	2.03214
39	7.8061	40.0280	108.1187	22 20.72	0.89243	1.60236	2.03390
40	8.2229	41.1114	108.5705	22 55.10	0.91502	1.61396	2.03571
50	13.0583			28 38.87			
60	19.1965			34 22.65			
70	26.8085			40 6.42			
80	32.6677			43 50.20			
90	47.5442			51 33.97			
100	61.5627			57 17.75			
110	79.0547			63 1.52			
120	101.513			68 45.30			
130	131.864			74 29.07			
140	177.216			80 12.85			

*) Für Abszissen, welche die Zahl 40 übersteigen, erscheinen in der Tafel nur die Ordinaten, weil sie bei Verzeichnung der Kurve brauchbar sind: die übrigen Grössen dagegen werden nicht leicht benöthiget.

§. 10.

Wir haben in den vorher entwickelten Formeln den Parameter der Kurve als bekannt vorausgesetzt: nun ist dieser immer von der Spannweite und dem Pfeile der Kettenlinie abhängig; es frägt sich also, wie bestimmt man aus diesen Stücken den Parameter?

Heisst die Spannweite $2d$ und die Tiefe des Scheitels oder der Pfeil t, so folgt aus den Formeln 15) und 16), wenn man den Stellungswinkel des Aufhängepunktes mit a bezeichnet, also dort v mit a vertauscht

$$22)\quad d = p\,a$$

$$y - p = t = p\,\lambda\ sec\ a, \text{ demnach}$$

$$23)\quad \frac{d}{t} = \frac{a}{\lambda\ sec\ a} = m$$

es ist daher m eine gegebene Grösse, aus welcher a mittelst der Gleichung 23) gefunden werden kann. Der indirekte Weg, um aus der transzendenten Gleichung 23) a zu finden, wird merklich erleichtert, wenn man sich eine Tafel entwirft, welche zu einem gegebenen a das zugehörige m nahe angibt: nur hat man, um aus a umgekehrt m zu berechnen, statt a im Zähler nicht den in Graden und Theilen desselben ausgedrückten Winkel, sondern die ihm zugehörige Bogenlänge zu nehmen.

Aus 23) ergibt sich nun

$$log\ m = log\ a - log\ (\lambda\ sec\ a), \text{ und weil}$$

$$\lambda\ sec\ a = 2.3025851\ log\ sec\ a \text{ demnach}$$

$$log\ (\lambda\ sec\ a) = log\ 2.3025851 + log\ (10 - log\ cos\ a)$$

$$= 0.3622157 + log\ [10 - log\ cos\ a], \text{ so wird hierdurch}$$

$$24)\quad log\ m = log\ a - log\ [10 - log\ cos\ a] - 0.3622157$$

Die nach dieser Formel berechneten Ergebnisse von m enthält folgende Tafel:

III. Tafel.

Stellungswinkel der Aufhängepunkte.

a	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
5°	22.89	22.44	22.00	21.59	21.19	20.80	20.43	20.07	19.72	19.39
6	10.06	18 75	18.45	18.15	17.87	17.59	17.32	17.07	16.81	16.57
7	16.33	16.10	15.87	15.66	15.44	15.23	15.03	14.84	14.65	14.46
8	14 28	14.10	13.93	13.76	13.59	13.43	13.27	13.12	12.97	12.82
9	12.68	12.54	12.40	12.27	12.14	12.01	11.88	11.76	11.64	11.52
10	11.40	11.29	17.17	11.06	10.96	10.85	10.74	10.64	10.54	10.44
11	10.35	10.25	10.16	10.07	9.985	9.897	9.811	9.726	9.643	9.560
12	9.479	9.400	9.322	9.244	9.170	9.094	9.021	8.949	8.877	8.807
13	8.739	8.671	8.604	8 538	8.473	8.409	8.346	8.284	8.223	8.162
14	8.103	8.044	7.987	7.929	7.873	7.818	7.763	7.709	7.656	7.603
15	7.556	7.500	7.450	7.400	7.351	7.302	7.254	7.207	7.160	7.114
16	7.068	7.023	6.978	6.934	6.891	6.848	6.805	6.764	6.722	6.681
17	6.641	6.601	6.561	6.522	6.483	6.445	6.407	6.370	6.333	6.296
18	6.260	6.223	6.189	6.154	6.119	6.085	6.051	6.018	5.984	5.952
19	5.919	5.887	5.855	5.824	5.792	5.761	5.731	5.701	5.671	5.641
20	5.612	5.583	5.554	5.525	5.497	5.469	5.441	5.414	5.387	5.360
21	5.333	5.306	5.280	5.254	5.228	5.203	5.178	5.153	5.128	5.103
22	5.079	5.056	5.031	5.007	4.983	4.960	4.937	4.914	4.892	4.868
23	4.847	4.824	4.802	4.780	4.758	4.737	4.715	4.695	4.674	4.649
24	4.632	4.612	4.592	4.572	4.552	4.532	4.512	4.493	4.474	4.454

§. 11.

Der Gebrauch vorstehender Tafel ist sehr einfach. Aus der gegebenen halben Spannweite d und dem Pfeil t berechne man den Dezimalbruch $m = \frac{d}{t}$: hierauf suche man ihn unter den Werthen von m in der Tafel und nehme den zugehörigen Werth von a: durch Proportionaltheile ergibt sich derselbe leicht bis auf 1 Minute genau.

Um nun den Stellungswinkel a noch genauer zu finden, kann man so verfahren: es sei z die Zahl der an die schon gefundenen Grade und Minuten von a noch fehlenden Sekunden, so dass $a + z$ derjenige Werth sei, welcher mit dem gegebenen Werthe von m genau zusammenhängt. Man hat dann, nach Formel 24)

$$log\, m = log\, (a+z) - log\, [10 - log\, cos\, (a+z)] - 0.3622157$$

ferner sei m' der zum Stellungswinkel a gehörende Werth von m, der also nach Formel 24) genau auszumitteln ist, so hat man auch

$$log\, m' = log\, a - log\, [10 - (log\, cos\, a)] - 0.3622157$$

demnach $log\, m' - log\, m = D$ gesetzt, wird

$$D = log\, a - log\, (a+z) - log\, [10 - log\, cos\, a] + log\, [10 - log\, cos\, (a+z)]$$

Setzt man nun weiter, da der Bogen von einer Sekunde 0.0000048 ist,

$log\ (a + 0.0000048) = log\ a + \delta$, und $log\ cos\ (a + 1'') = log\ cos\ a - \Delta$

wo δ und Δ aus den logarithmischen Tafeln entnommen werden, so verwandelt sich hierdurch $log\ (a + z) = log\ (a + 0.0000048\ z)$ in $log\ a + z\ \delta$ und

$10 - cos\ (a + z)$ in $10 - log\ cos\ a + z\ \Delta$

Substituirt man diese Werthe im Ausdrucke für D, so findet man leicht, indem man Kürze halber $10 - log\ cos\ a = n$ setzt

$$D = - z\ \delta + log\ \frac{n + z\ \Delta}{n} = - z\ \delta + log\ \left(1 + \frac{z\ \Delta}{n}\right)$$

welches nach *(A. F. 81)* in

$$D = - z\ \delta + \frac{M z\ \Delta}{n} \text{ übergeht.}$$

Hieraus ergibt sich $z = \dfrac{D}{\dfrac{M\ \Delta}{n} - \delta}$,

und der genauere Werth des Stellungswinkels ist dann $a + z$,

Oder noch einfacher, wenn man sich die Bestimmung von $\frac{M\ \Delta}{n}$ ersparen will, bemerke man für das schon bekannte Δ die Differenz für $log\ [10 - log\ cos\ (a + 1'')]$ in den Tafeln d. i. die Grösse, um welche sich der Logarithme ändert, wenn die zugehörige Zahl $10 - log\ cos\ a + \Delta$ wäre, ist diese $= \varepsilon$, so geht

$log\ [10 - log\ cos\ (a + z)]$ in $log\ [10 - log\ cos\ a] + z\ \varepsilon$ über, und man erhält nun

$$D = - z\ \delta + z\ \varepsilon, \text{ oder } z = \frac{D}{\varepsilon - \delta}$$

Beispiel. Sei die Spannweite $2\ d = 695'8''$ die Tiefe oder der Pfeil $55'$ den Stellungswinkel der Aufhängepunkte zu finden? Hier ist $d = 347'10'' = 347'.833$, mithin $log\ m = log\ d - log\ t = 0.8010085$, und $m = \frac{d}{t} = 6.32424$: geht man nun mit der Zahl 6.324 in die Tafel, so ergibt sich a zwischen $17°48'$ und $17°54'$: durch Proportionaltheile findet man $a = 17°.49'.4$, wofür man $a = 17°49'$ nehmen kann. Nun ist die Bogenlänge von $17°49'$ oder $a = 0.3109595$, daher $log\ a = 0.4927038 - 1$, und $\delta = 67.2$ *)

$log\ cos\ 17°49' = 9.9786554$, mithin

$10 - log\ cos\ 17°49' = 0.0213446$, $\Delta = 6.77$

$log\ [10 - log\ cos\ 17°49') = 0.3292880 - 2$ $\varepsilon = 137.7$

hiezu addirt 0.3622157 wird $0.6915037 - 2$

$0.6915037 - 2$ $log\ m' = 0.8012001$

*) Die Grössen δ und ε ergeben sich so: Wenn man Tafeln mit 7 Dezimalstellen wie die Vega'schen gebraucht, so findet man, weil δ und ε die Proportionaltheile zu 48 und 6.77 vorstellen, beim Aufschlagen des $log\ a$ in der Spalte der Proportionaltheile $\delta = 56 + 11.2 = 67.2$ und beim Aufschlagen des $log\ (10 - log\ cos\ 17°49')$ die Zahl $\varepsilon = 122 + 14.3 + 1.4 = 137.7$

Zieht man nun von $\log m' = 0.8012001$
$\log m = 0.8010085$ ab,
so folgt $D = 1916$

Multiplicirt man $\Delta = 6.77$ mit $M = 0.434$ und dividirt das Produkt mit $n = 0.0213$ so ergibt sich $\frac{M\Delta}{n} = 137.9$ mithin $\frac{M\Delta}{n} - \delta = 70.7$, daher $z = \frac{1916}{70.7} = 27''.1$, oder aber man findet $\varepsilon - \delta = 70.6$ und $z = \frac{1916}{70.6} = 27''.1$; es ist sonach $a = 17^0 49' 27''$

Die Formel 22) gibt sofort den Parameter

$$p = \frac{d}{a}$$

wo a Bogenlänge bedeutet. Im letzten Beispiele hat man

$\log d = 2.5413712$, $a = 0.3110903$
$\log a = 0.4928865 - 1$
$\log p = 3.0484847$ $p = 1118.111$

§. 12.

Wir wollen nun noch den Krümmungshalbmesser und die Lage des Krümmungsmittelpunktes für einen beliebigen Punkt der gleichgespannten Kettenlinie aufsuchen. Bezeichnet man zu diesem Ende den erstern mit R, und die Koordinaten des letzteren mit g, h, so hat man nach bekannten Formeln (A. F. 523 und 525)

$$R = \frac{ds^3}{d^2y.dx}, \quad g = x - \frac{R\,dy}{ds}, \quad h = y + \frac{R\,dx}{ds}$$

Durch Differentiirung der Gleichungen 15) und 16) findet man $dx = p\,dv$, $dy = p\,d\lambda\,sec\,v = p\,dv\,.\,tg\,v$ mithin

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = p\,dv\sqrt{(1 + tg^2v)} = p\,dv\,.\,sec\,v$$

ferner ist $d^2y = p\,dv^2.\,sec^2v$
mit diesen Werthen ergibt sich 25) $R = p\,sec\,v$ und

26) $g = x - p\,tg\,v$, $h = y + p$

wo man statt v auch $\frac{x}{p}$ setzen kann, um die Grössen R, g, h durch x auszudrücken.

Für $v = o$ folgt $R = p$, $g = o$, $h = 2p$, d. i. der Krümmungsmittelpunkt E des Scheitels befindet sich auf der Ordinatenaxe in einem Abstande p vom Scheitel der Kurve: ferner ist für $v = 90^0$, $R = \infty$, $g = -\infty$, $h = \infty$ d. i. die beiden unendlichen Aeste der gleichgespannten Kettenlinie nähern sich immer mehr und mehr einer geraden Linie, übereinstimmend mit §. 7: während ihre Evolute im Punkte E (fig. 4) anfängt, und sich von da an beiderseits der Ordinatenaxe in zwei unendlichen Aesten erstreckt.

Setzt man in der Formel 18) $h = 1$, so wird

$$T = p \sec \frac{x}{p} = p \sec v = R$$

mithin gibt die Tafel II. in der mit T bezeichneten Spalte zugleich die Krümmungshalbmesser einzelner Punkte der gleichgespannten Kettenlinie.

II. Die Kettenbrückenlinie.

§. 13.

Unter der Voraussetzung, dass das Gewicht der Tragketten sammt dem Gewichte der Tragstangen und der Fahrbahn zu einer einzigen horizontalen Belastung vereinigt wird, lässt sich die Gleichung der Kettenbrückenlinie so finden:

Seien A, B (fig. 4) die Aufhängepunkte C der Scheitel der Kurve AMB, $CD = p$ ihr Parameter, und die durch C gezogene Vertikale CX die Abszissenaxe, die Tangente des Scheitels CY ihre Ordinatenaxe, $A'B'$ sei die Fahrbahn. Man bezeichne mit h das Gewicht der Längeneinheit z. B. das Gewicht der Länge eines Fusses der Ketten und Fahrbahn zu einer Last vereinigt, oder das Gewicht eines Kurrentfusses beider Grössen, also mit ph die hieraus entstehende Spannung im Scheitel und mit T die Spannung im Punkte M, für welchen die Koordinaten $CP = x$, $MP = y$ sind: sei ferner $AE = d$ die halbe Spannweite, und $CE = t$ der Pfeil, und der Stellungswinkel des Punktes M nämlich $PMT = v$, so hat man wie oben §. 3.

$$T \sin v = hy \quad , \quad T \cos v = ph \qquad \alpha)$$

weil das Gewicht des Kettenbogens MC und des innerhalb desselben befindlichen Theiles FG der Fahrbahn als eine horizontale Last FG vereinigt angesehen wird: nun ist $FG = PM = y$ sonach das auf den Bogen MC zu vertheilende Gewicht $= hy$. Die Summe der Quadrate der Gleichungen $\alpha)$ gibt sofort

$$T^2 = h^2(p^2 + y^2), \text{ mithin}$$
$$T = h\sqrt{(p^2 + y^2)} \qquad \beta)$$

dagegen liefert der Quotient der Gleichungen $\alpha)$

$$tg\, v = \frac{y}{p} \qquad \gamma)$$

Man hat aber auch (A. F. 480) $tg\, MTP = \frac{dy}{dx}$, und weil die Winkel MTP und v sich zu 90° ergänzen, so ist sofort

$$tg\, v = \frac{y}{p} = \frac{dx}{dy}, \text{ diess gibt}$$
$$y\,dy = p\,dx, \text{ und integrirt}$$
$$27)\quad y^2 = 2px$$

die Konstante ist null, weil x mit y zugleich verschwindet.

Um p zu finden, hat man für die Spannweite $2d$ und den Pfeil t, wenn man in der Gleichung 27) d statt y und t statt x setzt

$d^2 = 2pt$, woraus $p = \frac{d^2}{2t}$ folgt; es ist sonach unter der gemachten Annahme die Gleichung der Kettenbrückenlinie

28) $y^2 = \frac{d^2}{t} . x$ d. i.

die Kurve ist eine Parabel, deren Parameter zum Pfeil und zur halben Spannweite die dritte geometrische Proportionalzahl bildet.

§. 14.

Um aus der Spannweite AB (fig. 5) und dem Pfeil EC beliebig viele Punkte der zugehörigen Parabel durch eine leichte Verzeichnung zu finden, konstruire man zuerst das Rechteck $ADD'B$, schneide sowohl AE als AD in irgend eine und dieselbe Zahl gleicher Theile z. B. in 5 gleiche Theile: die Theilungspunkte der ersteren Geraden mögen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die der anderen 1, 2, 3, 4, sein: ziehe dann durch den Punkt C, wo der Scheitel der Parabel zu stehen kommt, die Sekanten $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, ferner durch die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die zur Axe CE parallelen Geraden αa, βb, γc, δd, bis diese jene Sekanten in den Punkbel a, b, c, d treffen; so gehören die so bestimmten Punkte einer Parabel an, deren Scheitel in C, und Axe CE ist, und deren beide Aeste beziehungsweise durch die Punkte A und B gehen. Der Beweis ist leicht einzusehen: gesetzt für einen beliebigen Theilungspunkt β in der Geraden AE und den gleichnamigen Theilungspunkt 2 in der Geraden AD gehöre der Punkt b, dessen Abszisse $CQ = x$, und Ordinate $bQ = y$ angenommen wird, so ist $\beta E = \frac{1}{n} AE = y$, und $D2 = \frac{1}{n} AD$, mithin verhält sich $y : AE = D2 : AD$, diess gibt $y = \frac{AE . D2}{AD}$, nun ist in den ähnlichen Dreiecken $C\beta' b$ und $CD2$

$$\left.\begin{matrix} C\beta' \\ y \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} \beta' b \\ x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} CD \\ AE \end{matrix}\right\} : D2, \text{ daher } y = \frac{x . AE}{D2}$$

das Produkt dieser 2 Gleichungen liefert sofort

$$y^2 = \frac{AE^2 . x}{AD} = \frac{d^2 . x}{t} \text{ übereinstimmend mit der Formel 28).}$$

§. 15.

Die eben angegebene Methode zur Verzeichnung der Parabel dürfte um so mehr vor der gewöhnlichen einen Vorzug behaupten, als sie auch auf die anderen Kegelschnittslinien anwendbar ist. Stellen wir zu dem Ende die Aufgabe so: In einem Rechtecke $AC'D'E'$ (fig. 6) werden die zwei anstossenden Seiten $C'D'$ und $E'D'$ in den Punkten 2 und β beziehungsweise so getheilt, dass wenn $C'2 = \frac{1}{n} C'D'$, auch $E'\beta = \frac{1}{n} E'D'$ sei, man führt aus A, wo der Scheitel der Kurve sein soll, eine Sekante $A\beta$, und aus einem in der Verlängerung der Seite AC' gegebenen Punkte B durch den Theilungspunkt 2 die Gerade $B2M$, welche die Sekante im Punkte M trifft, man frägt nach dem geometrischen Orte des Punktes M? Zieht man die zu den Seiten des Rechteckes parallelen Geraden MP, MQ, und bezeichnet AB mit $2a$, AC' mit g, $C'D'$ mit h, setzt $AP = x$, $PM = y$; so geben die ähnlichen Dreiecke AQM, $AE'\beta$

$$\left.\begin{matrix} AQ \\ y \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} QM \\ x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} AE' \\ h \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} E'\beta \\ \frac{1}{n}g \end{matrix}\right\}, \text{ mithin ist } y = \frac{nxh}{g}$$

und die ähnlichen Dreiecke BPM, $BC'2$

$$\left.\begin{matrix} PM \\ y \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} BP \\ 2a-x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} C'2 \\ \frac{1}{n}h \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} BC' \\ 2a-g \end{matrix}\right\}, \text{ daher } y = \frac{(2a-x)\,h}{n(2a-g)}$$

und das Produkt beider Gleichungen liefert

$$y^2 = \frac{(2a-x)\,x\,h^2}{(2a-g)\,g}, \text{ oder}$$

$$y^2 : h^2 = (2a-x)\,x : (2a-g)\,g$$

welches eine bekannte Eigenschaft der durch die Punkte A, M, D' gezogenen Ellipse ist.

Theilt man also die anstossenden Seiten $C'D'$ und $E'D'$ des gegebenen Rechteckes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, führt aus A die Sekanten $A\alpha$, $A\beta$ und aus B durch die Theilungspunkte 1, 2 die Geraden Ba, BM, so sind a, M Punkte des elliptischen Bogens AD', zu welchem AB als grosse Axe gehört. Ist aber der Punkt C' in C, oder ist AC' die halbe grosse Axe, so geht $C'D'$ in CD die halbe kleine Axe der Ellipse über, und man erhält bei der vorigen Konstruktion, indem man nämlich im Rechtecke $ACDE$, die anstossenden Seiten ED, DC in den Punkten α', β', γ', δ', und 1, 2, 3, 4 beziehungsweise in gleich viele gleiche Theile schneidet, aus A die Sekanten $A\alpha'$, $A\beta'$, $A\gamma'$, $A\delta'$ und aus B durch die Theilungspunkte 1, 2, 3, 4 die Geraden Ba, BM, BD' und Bd zieht, den elliptischen Quadranten AMD, und bei Wiederholung derselben im Rechtecke $BCDF$, ergibt sich auch der elliptische Quadrant BD, sonach die halbe Ellipse ADB.

Lässt man endlich im Rechtecke $AECD$ (fig. 7) den Punkt B in der Verlängerung von AC so sein, dass A zwischen C und B fällt, so erhält man durch dieselbe Konstruktion eine Hyperbel $AdcbaD$, deren Scheitel in A und deren Axe AB ist. Denn zieht man bP zu AE und bQ zu AC parallel, setzt $AC = g$, $CD = h$, $AP = x$, $Pb = y$, $AB = 2a$ so erhält man erstlich

$$\left.\begin{matrix} AQ \\ y \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} Qb \\ x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} AE \\ h \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} E2 \\ \frac{1}{n}g \end{matrix}\right\}; \text{ demnach } y = \frac{nxh}{g}$$

hierauf hat man $\left.\begin{matrix} BP \\ 2a+x \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} Pb \\ y \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} BC \\ 2a+g \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} C\beta \\ \frac{1}{n}h \end{matrix}\right\}$, und $y = \frac{(2a+x)\,h}{n(2a+g)}$

daher ist das Produkt dieser Gleichungen

$$y^2 = \frac{(2a+x)\,x\,h^2}{(2a+g)\,g}.$$

Wird der Punkt B unendlich entfernt angenommen, so werden die von diesem Punkte durch die Theilungspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, gezogenen Geraden $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$, ... einander parallel, und die Kurve geht in eine Parabel über, wie die in §. 14 gegebene Konstruktion es erfordert.

Es wird kaum nothwendig sein zu bemerken, dass wenn im Rechtecke die anstossenden Seiten gleich sind, bei dieser Konstruktion in (fig. 6) ein Kreis und in (fig. 7) eine gleichseitige Hyperbel zum Vorschein kommt: ferner, dass wenn dieselbe Methode auf ein Parallelogramm überhaupt in Anwendung gebracht wird, man dieselben Kegelschnittslinien, allein auf ihre Durchmesser bezogen, erhält.

§. 16.

Nach dieser Abschweifung kehren wir wieder zur Kettenbrückenlinie, als Parabel betrachtet zurück, und suchen die Bogenlänge der Parabel aus dem Stellungswinkel v eines Punktes M (fig. 4) und dem Parameter p.

Die Polargleichung der Parabel ist nach (A. F. 478)

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos\alpha} \qquad \alpha)$$

wobei r den Radiusvektor HM, und α den Neigungswinkel MHC desselben gegen die Axe CX vorstellt, den Brennpunkt der Parabel in H angenommen. Zieht man an den Punkt M die Tangente MT, welche den Stellungswinkel $TMP = v$ mit dessen Ordinate bildet; so ist erstlich zu ermitteln, wie v von α abhängt. Bekanntlich schliesst jede der Axe parallele Gerade MQ, und der an denselben Punkt gezogene Radiusvektor MH mit der Tangente Tt gleiche Winkel ein, es ist sonach $tMQ = HMT = MTP$, daher der äussere Winkel im Dreiecke MHT, nämlich

$MHP = 2MTP$, und also auch sein Nebenwinkel

$MHT' = 180^0 - 2\,MTP = 180^0 - 2\,(90^0 - PMT)$, diess gibt

$$\alpha = 2v, \text{ und } v = \tfrac{1}{2}\alpha \qquad \beta)$$

Ferner hat man nach (A. F. 538) die Bogenlänge bei Polarkoordinaten

$$s = \int d\alpha \sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\right)} \qquad \gamma)$$

differentiirt man aber den Ausdruck $\alpha)$, so folgt

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\frac{1}{2}p\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2 = \tfrac{1}{4}p^2\,\frac{[\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2]}{(1+\cos\alpha)^4}, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\right)} = \frac{\frac{1}{2}p}{(1+\cos\alpha)^2}\sqrt{(2+\cos\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}p\sqrt{2}}{(1+\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

setzt man weiter $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ statt $\sqrt{(1+\cos\alpha)}$, so ergibt sich

$$\sqrt{\left(\frac{dr^2}{d\alpha^2} + r^2\right)} = \frac{\frac{1}{4}p}{\cos^3\frac{1}{2}\alpha}: \text{ hiermit entsteht aus Formel } \gamma)$$

$$s = \tfrac{1}{4}p\int\frac{d\alpha}{\cos^3\frac{1}{2}\alpha} = \tfrac{1}{2}p\int\frac{d\frac{1}{2}\alpha}{\cos^3\frac{1}{2}\alpha}, \text{ ein Ausdruck, der nach (A. F. 378), wenn}$$

dort $m = o$, $n = -3$ gesetzt wird, sofort

$$s = \tfrac{1}{4}p\,[tg\,\tfrac{1}{2}\alpha\,sec\,\tfrac{1}{2}\alpha + \lambda\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{4}\alpha)] \text{ gibt,}$$

und wenn man hierin v statt $\frac{1}{2}\alpha$ substituirt, erhält man

$$29)\quad s = \tfrac{1}{4}p\,[tg\,v\,.sec\,v + \lambda\,tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}v)]$$

Ist aber s' die dem Stellungswinkel v zugehörige Bogenlänge einer gleichgespannten Kettenlinie, so ist nach Formel 14) $s' = p\,\lambda\,tg\,(45^0 + \frac{1}{2}v)$, hierdurch wird

$$30)\quad s = \tfrac{1}{4}\,(p\,tg\,v\,sec\,v + s')$$

und man kann mit Hülfe der I. Tafel die Bogenlängen der Parabel für jeden Stellungswinkel bequem berechnen.

§. 17.

Bei den Kettenbrücken ist die Last der Ketten bei weitem bedeutender, als die Gewichte der Tragstangen, der Fahrbahn, und der zufälligen Belastung der Brücke zusammen genommen; man würde daher genauer die letztere Last mit der ersteren zu einem einzigen Gewichte nach der Richtung der Kettenbrückenlinie vereinigen, und man erhielte die gleichgespannte Kettenlinie zu einem mehr angenäherten Ausdruck der Kettenbrückenlinie, als es die Parabel war. Noch genauer wird man jedoch die Kettenbrückenlinie bestimmen, wenn jede der beiden Lasten nach ihren Richtungen abgesondert in Rechnung gebracht wird. Nun wirkt das Gewicht der Tragketten in der Richtung der Tangente einzelner Punkte der Kettenbrückenlinie, das Gewicht der Fahrbahn, der Tragstangen und der zufälligen Belastung kann hingegen als eine besondere horizontale Belastung der Tragketten angesehen werden, und es ergibt sich bei dieser Absonderung beider Lasten die Gleichung der Kettenbrückenlinie so:

Sei b der Querschnitt der Ketten im untersten Punkte oder dem Scheitel der Kurve, b' der Querschnitt der prismatischen Fahrbahn, sei ferner h das Gewicht der Längeneinheit der Ketten, h' das der Brückenbahn mit Einschluss der Tragstangen, die Abszissenaxe horizontal und die übrigen Grössen wie im §. 13 angenommen; so lässt sich die Spannung T eines Punktes M (fig. 8) in eine horizontale Kraft $T \cos v$ und in eine vertikale Kraft $T \sin v$ zerlegen, jene ist bei allen Punkten der Kettenbrückenlinie gleich, und der Formel α) im §. 13 gemäss

$$T \cos v = p\,(bh + b'h') \qquad \alpha)$$

weil hier das Gewicht $bh + b'h'$ auf die Einheit der Länge im Scheitel der Kurve zu vertheilen ist: hieraus folgt

$$T = \frac{p\,(bh + b'h')}{\cos v} \qquad \beta)$$

Ist ferner u der Querschnitt der Tragketten im Punkte M, b derselbe Querschnitt im Scheitel der Kurve, so hat man, da diese den Spannungen proportional sein müssen

$$u : b = T : p\,(bh + b'h') = 1 : \cos v$$

demnach ist $u = \frac{b}{\cos v} = b \sec v$ $\qquad \gamma)$

und das Gewicht des Bogens CM, welcher als die Summe aller Kettenelemente zwischen C und M, deren Gewicht einzeln $hu.ds$ bedeutet, betrachtet werden muss, ist $h \int u\,ds$, man hat also wegen Formel γ)

das Gewicht des Bogens $CM = bh \int ds \sec v = b\,h \int dx \sec^2 v$

hingegen ist das Gewicht desjenigen Theiles FC der Fahrbahn $A'B'$, welcher vom Bogen MC gestützt wird $= b'h'x$, man hat daher

$T \sin v = b'h'x + b\,h \int dx \sec^2 v = b'h'x + b\,h \int dx\,(1 + tg^2 v)$, während

$T \cos v = p\,(bh + b'h')$ ist: durch die Division dieser zwei Ausdrücke erhält man

$$tg\,v = \frac{b'h'x + b\,h \int dx\,(1 + tg^2 v)}{p\,(bh + b'h')}$$

woraus durch die Differentiirung folgt

$$d\,tg\,v = \frac{b'h'dx + b\,h\,dx\,(1 + tg^2 v)}{p\,(bh + b'h')}$$

Man findet hieraus die Differentialgleichung der Kettenbrückenlinie

$dx = \frac{d\,tg\,v \cdot p\,(bh + b'h')}{bh + b'h' + bh\,tg^2 v}$, oder Zähler und Nenner mit $bh + b'h'$ dividirend, und Kürze halber $\frac{b\,h}{b\,h + b'h'} = k$ setzend wird 31) $dx = \frac{p \cdot d\,tg\,v}{1 + k\,tg^2 v}$

Diese Grösse k, welche wie man sieht, von dem Gewichte der Längeneinheit der Tragketten im Scheitel der Kurve und von dem Gewichte der Längeneinheit der Fahrbahn und der zufälligen Belastung abhängt, hat auf die Beschaffenheit der Kettenbrückenlinie einen wichtigen Einfluss; ich will sie daher den Modulus der Kettenbrücken nennen. Ihr Werth ist bei der gleichgespannten Kettenlinie, wo $b'h'$ verschwindet, die Einheit, und weil bei Kettenbrücken stets $bh > b'h'$, also $bh + b'h' < 2\,bh$, sonach $k = \frac{b\,h}{bh + b'h'} > \frac{1}{2}$ ist, so folgt, dass der Modulus der Kettenbrücken immer eine zwischen 0.5 und 1 liegende Zahl bedeutet.

§. 18.

Integrirt man nach (A. F. 328) die letztgefundene Gleichung 31), so ergibt sich

$$x = \frac{p}{\sqrt{k}}\,arc\,tg\,(tg\,v\sqrt{k}) \qquad \alpha)$$

setzt man Kürze halber den Hülfswinkel

$w = arc\,tg\,(tg\,v\sqrt{k})$, daher umgekehrt

32) $tg\,w = tg\,v \cdot \sqrt{k}$, so wird aus α)

33) $x = \frac{p}{\sqrt{k}} \cdot w$

Diese Abhängigkeit der Grössen x, w, v lässt sich durch eine leichte geometrische Konstruktion nachweisen. Verlängert man die Ordinatenaxe EC (fig. 8) der Kettenbrückenlinie bis D', so dass $CD' = \frac{p}{\sqrt{k}}$ wird, und beschreibt aus D' mit den Halbmessern $CD' = \frac{p}{\sqrt{k}}$ und $D'G = p$ die konzentrischen Halbkreise HCH' und IGI', macht den Bogen des äusseren Kreises $CN = DP = x$, zieht den Halbmesser $D'N$ und verlängert denselben bis zum Zusammentreffen mit der Tangente CF in Q, führt hierauf die Tangente $GR = CQ$ des innern Kreises, und verbindet R mit D', so ist $ND'C = w$, $RD'C = v$.

Ferner hat man, da $tgv = \frac{dy}{dx}$ ist

$dy = dx \,.\, tg\,v$ und wegen Formel 31)

$$dy = \frac{p \,.\, tgv \,.\, d\,tg\,v}{1 + k\,tg^2 v} \qquad \beta)$$

dessen Integrale nach (A. F. 299)

$y = \frac{p}{2k} \lambda (1 + k tg^2 v) + p = \frac{p}{k} \lambda \sqrt{(1 + k tg^2 v)} + p$ ist.

Durch Einführung des Hülfswinkels w aus der Gleichung 32); erhält man hieraus

34) $y = \frac{p}{k} \lambda \, sec \, w + p$

Setzt man hierin noch statt w dessen Werth aus 32) so ergibt sich die Koordinatengleichung der Kettenbrückenlinie

35) $y = \frac{p}{k} \lambda \, sec \frac{x\sqrt{k}}{p} + p$

§. 19.

Von dieser krummen Linie lassen sich alle jene Folgerungen machen, welche schon §. 7 für die gleichgespannte Kettenlinie angegeben wurden, mit der Beschränkung, dass schon für Abszissen $\frac{1}{2}\frac{p\pi}{\sqrt{k}}$ die Ordinaten unendlich werden, mithin mit der Assymptote der Kurve übereinfallen, und dass nur jene Kettenbrückenlinien einander ähnlich sind, bei denen der Modulus denselben Werth hat.

Insbesondere erhält man für $k = 1$ aus 35) die Gleichung 17) der gleichgespannten Kettenlinie.

Die Rechnung mit diesen Formeln wird gerade so geführt, wie dieses für die Formeln der gleichgespannten Kettenlinie §. 8 gezeigt wurde. Man wird daher für einen gegebenen Stellungswinkel v und den Modulus k, den Hülfswinkel w nach Formel 32) suchen: hieraus ergibt sich schon die Abszisse x ganz einfach durch die Formel 33), und wenn man die Formel 34) wie in §. 8 umwandelt, so erhält man

36) $log \, (y - p) = 2.3622157 + log \, (10 - log \cos w)$

oder aber, falls zu einer gegebenen Abszisse die zugehörige Ordinate gesucht wird, berechnet man erstlich aus der Gleichung 33) den Hülfswinkel $w = \frac{x\sqrt{k}}{p}$, und hiermit findet man aus der Gleichung 36) den Werth von $y - p$; es können daher die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kettenbrückenlinie mit aller Schärfe, welche die vorhandenen Logarithmentafeln gestatten, gefunden werden.

Die Spannung T ergibt sich aus der Formel β) im §. 17, wenn man dort den Werth von $bh + b'h'$ durch k ausdrückt, 37) $T = \frac{p\,b\,h}{k} \, sec \, v$

§. 20.

Nachstehende Tafel gibt die den horizontalen Abszissen von 1 bis 40 zugehörigen Ordinaten oder eigentlich die Längen der Tragstangen einer Kettenbrücke, deren Fahrbahn den Scheitel der Kurve berühret, nebst ihren Logarithmen für den Modulus 0.55, 0.60, 0.65 und 0.70.

IV. Tafel.

Koordinaten der Kettenbrückenlinie und ihre Logarithmen, für $p = 100$.

	Werthe von $y - p$.				Logarithmen derselben.			
x	0.55	0.60	0.65	0.70	0.55	0.60	0.65	0.70
1	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.69897—3	0.69897—3	0.69897—3	0.69897—3
2	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.30103—2	0.30103—2	0.30103—2	0.30103—2
3	0.0450	0.0450	0.0450	0.0450	0.65321—2	0.65321—2	0.65321—2	0.65321—2
4	0.0800	0.0800	0.0800	0.0800	0.90314—2	0.90314—2	0.90314—2	0.90314—2
5	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.09700—1	0.09701—1	0.09703—1	0.09705—1
6	0.1801	0.1801	0.1801	0.1801	0.25543—1	0.25544—1	0.25545—1	0.25547—1
7	0.2451	0.2451	0.2451	0.2452	0.38935—1	0.38938—1	0.38941—1	0.38945—1
8	0.3202	0.3202	0.3202	0.3202	0.50540—1	0.50542—1	0.50544—1	0.50547—1
9	0.4053	0.4053	0.4053	0.4054	0.60779—1	0.60781—1	0.60783—1	0.60785—1
10	0.5005	0.5005	0.5005	0.5006	0.69937—1	0.69940—1	0.69943—1	0.69946—1
11	0.6057	0.6057	0.6058	0.6058	0.78226—1	0.78229—1	0.78232—1	0.78236—1
12	0.7210	0.7210	0.7211	0.7212	0.85790—1	0.85795—1	0.85801—1	0.85807—1
13	0.8464	0.8464	0.8465	0.8467	0.92752—1	0.92758—1	0.92764—1	0.92771—1
14	0.9817	0.9819	0.9821	0.9822	0.99200—1	0.99207—1	0.99215—1	0.99222—1
15	1.1273	1.1275	1.1277	1.1279	0.05204	0.05113	0.05212	0.05229
16	1.2830	1.2833	1.2836	1.2839	0.10823	0.10833	0.10843	0.10852
17	1.4489	1.4492	1.4496	1.4499	0.16104	0.16113	0.16125	0.16134
18	1.6249	1.6253	1.6257	1.6216	0.21038	0.21094	0.21104	0.21116
19	1.8110	1.8115	1.8121	1.8126	0.25792	0.25804	0.25818	0.25831
20	2.0074	2.0080	2.0087	2.0094	0.30263	0.30277	0.30292	0.30306
21	2.2139	2.2148	2.2156	2.2165	0.34116	0.34533	0.34549	0.34566
22	2.4308	2.4318	2.4328	2.4338	0.38575	0.38593	0.38611	0.38628
23	2.6580	2.6591	2.6603	2.6615	0.42455	0.42474	0.42493	0.42512
24	2.8954	2.8967	2.8981	2.8995	0.46171	0.46191	0.46211	0.46232
25	3.1431	3.1447	3.1464	3.1480	0.49736	0.49759	0.49781	0.49803
26	3.4012	3.4031	3.4051	3.4070	0.53163	0.53188	0.53213	0.53237
27	3.6696	3.6718	3.6741	3.6764	0.56462	0.56488	0.56515	0.56542
28	3.9485	3.9511	3.9537	3.9564	0.59643	0.59672	0.59700	0.59730
29	4.2378	4.2408	4.2438	4.2469	0.62714	0.62745	0.62775	0.62807
30	4.5376	4.5411	4.5446	4.5481	0.65683	0.65716	0.65750	0.65783
31	4.8480	4.8519	4.8559	4.8599	0.68556	0.68591	0.68627	0.68662
32	5.1688	5.1733	5.1778	5.1823	0.71339	0.71377	0.71415	0.71453
33	5.5003	5.5054	5.5105	5.5156	0.74039	0.74079	0.74119	0.74159
34	5.8322	5.8480	5.8538	5.8596	0.76583	0.76701	0.76744	0.76787
35	6.1949	6.2015	6.2080	6.2146	0.79203	0.79249	0.79295	0.79341
36	6.5584	6.5657	6.5731	6.5804	0.81680	0.81728	0.81777	0.81825
37	6.9326	6.9408	6.9490	6.9572	0.84090	0.84141	0.84192	0.84243
38	7.3176	7.3267	7.3358	7.3449	0.86437	0.86491	0.86545	0.86599
39	7.7134	7.7236	7.7338	7.7439	0.88725	0.88781	0.88839	0.88896
40	8.1202	8.1314	8.1427	8.1539	0.90957	0.91017	0.91077	0.91137

§. 21.

Den Parameter der Kettenbrückenlinie zu bestimmen, setze man die halbe Spannweite $= d$, den Pfeil $= t$ und den Stellungswinkel des Aufhängepunktes $= a$, und substituire diese Werthe beziehungsweise statt x, $y - p$ und v in den Gleichungen 32), 33) und 34), so erhält man den Hülfswinkel c aus der Gleichung

38) $tg\, a \sqrt{k} = tg\, c$, ferner

39) $d = \frac{p}{\sqrt{k}} c$ und

$$t = \frac{p}{k} \lambda \sec c$$

Hieraus findet man $m'' = \frac{d}{t}$ setzend

40) $$m'' = \sqrt{k} \cdot \frac{c}{\lambda \sec c}$$

Hält man diesen Werth gegen die Gleichung 23), so hat man sofort, indem man dort c mit a vertauscht

41) $$m = \frac{m''}{\sqrt{k}}$$

man hat daher nur aus dem gegebenen m'' den Werth von m nach der Gleichung 41) zu suchen, und nach der III. Tafel und dem im §. 11 angegebenen Verfahren zu dem so bestimmten Werthe von m das zugehörige a zu berechnen, welches sofort der gesuchte Werth von c ist. Nun ergibt sich der Parameter mittelst der Formel 39)

42) $$p = \frac{d\sqrt{k}}{c}$$

Beispiel. Sei der Modulus einer Kettenbrücke $k = 0.617$, die Spannweite $2d = 815'$, der Pfeil $t = 50'$ den Parameter zu finden?

$log\ 2d = 2.9111576$
$log\ 2t = 2.0000000$
$log\ m'' = 0.9111576$
$log\ \sqrt{k} = 0.8951426 - 1$
$log\ m = 1.0160150$ demnach
$m = 10.375$

Hiezu findet man aus III. Tafel $c = 10^0 58'$
ferner ist $arc.\ 10^0 58' = 0.1914044$

$log\ cos\ c = 9.9919956$
$10 - l\ cos\ c = 0.0080044$
$log\ (10 - l\ cos\ c) = 0.9033288 - 3$
Konstante $= 0.3622157$
$log\ M(10 - l\ cos\ c) = 0.2655445 - 2$

$log\ c = 0.2819519 - 1$
$log\ M(10 - l\ cos\ c) = 0.2655445 - 2$
$log\ m' = 1.0164074$
$log\ m = 1.0160150$
$D = \frac{3924}{4}$

man findet $\delta = 109.2$, $\Delta = 4.08$, $\varepsilon = 22.4$

daher $z = \frac{D}{\delta - \varepsilon} = 45''.2$, und $c = 10^{0}58'45''.2$

Endlich ist $arc\,.\,c = 0.191623$, $log\,c = 0.2824467 - 1$

$log\ d = 2.6101276$

$log\ \sqrt{k} = 0.8951426$, $log\ d\sqrt{k} = 2.5052702$

$log\ d\sqrt{k} = 2.5052702$ daher $log\,p = 3.2228235$, und $p = 1670.4$

§. 22.

Wir wollen nun zeigen, wiefern die im §. 13 betrachtete Parabel als ein Näherungsausdruck der Kettenbrückenlinie gelten kann: gibt es andere Kurven, die sich derselben noch mehr nähern, als jene, und welchen Fehlern ist man ausgesetzt, wenn man eine derselben in der Anwendung der Kettenbrückenlinie substituirt?

Verwechseln wir zu diesem Behufe die Axen, und nehmen den Scheitel C (fig. 8) zum Anfangspunkt der Koordinaten, so hat man in der Formel 31) und in der Formel β) des §. 18 x mit y zu vertauschen; hiedurch wird

$$dy = \frac{p\,d\tau}{1 + k\tau^2} \text{ und } dx = \frac{p\tau\,.\,d\tau}{1 + k\tau^2}$$

wo Kürze halber $tg\,v = \tau$ angenommen wird.

Nun ist bei Entwickelung durch die Division

$$\frac{1}{1 + k\tau^2} = 1 - k\tau^2 + k^2\tau^4 - k^3\tau^6 + k^4\tau^8 - \ldots$$

sonach

43) $$dy = p\,d\tau\,(1 - k\tau^2 + k^2\tau^4 - k^3\tau^6 + k^4\tau^8 - \ldots)$$

und wenn man diesen Ausdruck integrirt, und die Glieder, welche die zehnte und die höheren Potenzen der Grösse τ enthalten, ausser Acht lässt, erhält man

44) $$y = p\tau\,(1 - \tfrac{1}{3}k\tau^2 + \tfrac{1}{5}k^2\tau^4 - \tfrac{1}{7}k^3\tau^6 + \tfrac{1}{9}k^4\tau^8)$$

Ferner haben wir

$$dx = p\tau\,d\tau\,(1 - k\tau^2 + k^2\tau^4 - k^3\tau^6 + k^4\tau^8 - \ldots)$$

woraus bei derselben Einschränkung durch die Integration folgt

45) $$x = \tfrac{1}{2}p\tau^2\,(1 - \tfrac{1}{2}k\tau^2 + \tfrac{1}{3}k^2\tau^4 - \tfrac{1}{4}k^3\tau^6 + \tfrac{1}{5}k^4\tau^8)$$

Bleibt man nun bei dem ersten Gliede der Reihen 44) und 45) stehen, so ergibt sich aus 44) $y^2 = p^2\tau^2$ und aus 45) $2px = p^2\tau^2$, demnach die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

woraus hervorgeht, dass die Näherungskurve der Kettenbrückenlinie eine Parabel sei, welche mit jener den Scheitel und die Abszissenaxe gemein hat: die folgenden Glieder der vorhin genannten Reihen geben demnach die Abweichungen der Kettenbrückenlinie von der Parabel, die man so bestimmen kann:

Wird die Gleichung 44) zum Quadrat erhoben und mit der Gleichung 45) dividirt, so erhält man nach einigen Reductionen

$$\frac{y^2}{2px} = \frac{1 - \frac{2}{3}k\tau^2 + \frac{23}{45}k^2\tau^4 - \frac{44}{105}k^3\tau^6 + \frac{563}{1575}k^4\tau^8}{1 - \frac{1}{2}k\tau^2 + \frac{1}{3}k^2\tau^4 - \frac{1}{4}k^3\tau^6 + \frac{1}{5}k^4\tau^8}$$

setzt man diesen Quotienten der Reihe

$$1 + A\tau^2 + B\tau^4 + C\tau^6 + D\tau^8$$

gleich, und entwickelt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Grössen *A, B, C, D,* so findet man

$$A = -\frac{1}{6}k, \quad B = \frac{17}{180}k^2, \quad C = -\frac{167}{2520}k^3, \quad D = \frac{3869}{75600}k^4$$

hiedurch wird

$$46)\quad \frac{y^2}{2px} = 1 - \frac{1}{6}k\tau^2 + \frac{17}{180}k^2\tau^4 - \frac{167}{2520}k^3\tau^6 + \frac{3869}{75600}k^4\tau^8$$

Die Formel 45) kann man auch so schreiben,

$$47)\quad x = \tfrac{1}{2}p\left(\tau^2 - \tfrac{1}{2}k\tau^4 + \tfrac{1}{3}k^2\tau^6 - \tfrac{1}{4}k^3\tau^8 + \tfrac{1}{5}k^4\tau^{10}\right)$$

setzen wir, um umgekehrt τ durch x auszudrücken,

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 &= ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 \\ \text{so ergibt sich } \tau^4 &= a^2x^2 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^4 + 2(bc + ad)x^5 \\ \tau^6 &= a^3x^3 + 3a^2bx^4 + 3(ab^2 + a^2c)x^5 \\ \tau^8 &= a^4x^4 + 4a^3bx^5, \quad \tau^{10} = a^5x^5 \end{aligned}\right\} \alpha)$$

man erhält so nach der Substitution dieser Werthe der Potenzen von τ in die Gleichung 47)

$$\frac{2x}{p} = ax + (b - \tfrac{1}{2}a^2k)x^2 + (c - abk + \tfrac{1}{3}a^3k^2)x^3 + (d - \tfrac{1}{2}b^2k - ack + a^2bk^2 - \tfrac{1}{4}a^4k^3)x^4 + (e - bck - adk + ab^2k^2 + a^2ck^2 - a^3bk^3 + \tfrac{1}{5}a^5k^4)x^5$$

woraus sich die Gleichungen ergeben

$$a = \frac{2}{p}$$
$$b - \tfrac{1}{2}a^2k = o$$
$$c - abk + \tfrac{1}{3}a^3k^2 = o$$
$$d - \tfrac{1}{2}b^2k - ack + a^2bk^2 - \tfrac{1}{4}a^4k^3 = o$$
$$e - bck - adk + ab^2k^2 + a^2ck^2 - a^3bk^3 + \tfrac{1}{5}a^5k^4 = o$$

durch deren Auflösung erhalten wir

$$a = \frac{2}{p}, \quad b = \frac{2k}{p^2}, \quad c = \frac{4k^2}{3p^3}, \quad d = \frac{2k^3}{3p^4}, \quad e = \frac{4k^4}{15p^5}$$

mit diesen Werthen von *a, b, c, d, e* wird nun in den Gleichungen α)

$$\left.\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{2x}{p} + 2k\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{4k^2}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \frac{2k^3}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^4 + \frac{4k^4}{15}\left(\frac{x}{p}\right)^5 \\ \tau^4 &= 4\left(\frac{x}{p}\right)^2 + 8k\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \frac{28}{3}k^2\left(\frac{x}{p}\right)^4 + \frac{8}{3}k^3\left(\frac{x}{p}\right)^5 \\ \tau^6 &= 8\left(\frac{x}{p}\right)^3 + 24k\left(\frac{x}{p}\right)^4 + 40k^2\left(\frac{x}{p}\right)^5 \\ \tau^8 &= 16\left(\frac{x}{p}\right)^4 + 64k\left(\frac{x}{p}\right)^5, \text{ und } \tau^{10} = 32\left(\frac{x}{p}\right)^5 \end{aligned}\right\} \beta)$$

Substituirt man nun die eben gefundenen Werthe der Potenzen von τ^2 in die Gleichung 46) und ordnet alles nach den Potenzen von x, so ergibt sich

$$48)\ y^2 = 2px\left[1 - \tfrac{1}{3}k\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{2k^2}{45}\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \frac{k^3}{315}\left(\frac{x}{p}\right)^3 - \frac{2k^4}{1575}\left(\frac{x}{p}\right)^4 - \frac{2k^5}{9345}\left(\frac{x}{p}\right)^5\right]$$

welcher Ausdruck, im Falle man die auf die zweite Potenz von $\frac{x}{p}$ folgenden Glieder weglässt, in

$$49)\ y^2 = 2px - \tfrac{2}{3}kx^2 \text{ übergeht.}$$

Hält man diesen Ausdruck gegen die Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen a, b

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

so findet man leicht $p = \frac{b^2}{a}$, $\frac{2}{3}k = \frac{b^2}{a^2}$, woraus sich ergibt

$$a = \frac{3p}{2k}, \text{ und } b = p\sqrt{\frac{3}{2k}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{\frac{6}{k}}$$

es ist also eine Ellipse, deren grosse Axe $\frac{3p}{k}$ vertikal, und kleine Axe $p\sqrt{\frac{6}{k}}$ horizontal wäre, diejenige Kurve, welche sich der Kettenbrückenlinie m e h r nähert, als die Parabel.

§. 23.

Um diese Ellipse graphisch darzustellen, übertrage man nach einem verjüngten Masstabe die gegebene Grösse $\frac{3p}{2k}$ auf die vertikale Gerade AB (fig. 9) von A aus, wo der Scheitel der Kurve zu liegen kommt, gegen B hin, mache hierauf AC gleich dem gegebenen Pfeile der Kettenbrückenlinie, ziehe durch C die horizontale Gerade ECD, und schneide auf derselben beiderseits des Punktes C die Stücke $CD = CE$ der halben Spannweite gleich ab: je nachdem man nun mehr oder weniger Punkte der Kurve finden will, theile man die anstossenden Seiten CD, DG des vorher verzeichneten Rechtecks $ACDG$ in mehrere gleiche Theile, und zwar jene in den Punkten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ diese in den Punkten $1, 2, 3 \ldots$ ziehe hierauf die Sekanten $A1$, $A2$, $A3 \ldots$, und durch die Theilungspunkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Geraden Ba, Bb, Bc u. s. f. bis zu ihrem Zusammentreffen mit den vorhin gezogenen Sekanten; so sind $a, b, c, d, \ldots$ Punkte des einen Astes AD der Ellipse, und auf gleiche Weise lässt sich der andere Ast AE derselben bestimmen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens gründet sich auf dem §. 15.

§. 24.

Setzt man die Quadratwurzel aus dem Polynom

$$1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{kx}{p}\right) + \tfrac{2}{45}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{315}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 - \tfrac{2}{1575}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 - \tfrac{2}{9345}\left(\frac{kx}{p}\right)^5$$

der Reihe $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5$ gleich,

so findet man nach Erhebung beider Theile zum Quadrat, und der Bestimmung der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\alpha = -\tfrac{1}{6}\left(\frac{k}{p}\right),\ \beta = \tfrac{1}{120}\left(\frac{k}{p}\right)^2,\ \gamma = \tfrac{1}{236}\left(\frac{k}{p}\right)^3,\ \delta = -\tfrac{1}{5760}\left(\frac{k}{p}\right)^4,\ \varepsilon = -\tfrac{19}{126720}\left(\frac{k}{p}\right)^5;$$

hiedurch verwandelt sich die Gleichung 48) in die folgende

$$50)\ y = \sqrt{2px}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{kx}{p}\right) + \tfrac{1}{120}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{336}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 - \tfrac{1}{5760}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 - \tfrac{19}{126720}\left(\frac{kx}{p}\right)^5\right]$$

und eben so findet man durch Ausziehung der Quadratwurzel aus der Gleichung 49), wenn die zur gemeinschaftlichen Abszisse zugehörige Ordinate der Ellipse mit y_1 bezeichnet wird,

$$51)\ y_1 = \sqrt{2px}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{kx}{p}\right) - \tfrac{1}{72}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 - \tfrac{1}{432}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 - \tfrac{5}{10368}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 - \tfrac{7}{82208}\left(\frac{kx}{p}\right)^5\right]$$

es ist sonach die derselben Abszisse zugehörige Ordinate bei der Kettenbrückenlinie stets grösser, als bei der Ellipse. Der Unterschied beider ergibt sich

$$52)\ y - y_1 = \sqrt{2px}\left[\tfrac{1}{45}\left(\frac{kx}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{189}\left(\frac{kx}{p}\right)^3 + \tfrac{1}{3240}\left(\frac{kx}{p}\right)^4 + \tfrac{1}{26673}\left(\frac{kx}{p}\right)^5\right]$$

und kann nur ausser Betrachtung kommen, wenn die Grösse

$$\frac{k^2x^2}{45p^2}\cdot\sqrt{2px}$$

schon kleiner wird, als die Grenze, die man sich bei dem beabsichtigten Grade der Genauigkeit vorgesteckt hat.

Sei für einen besonderen Fall $p = 100$, und man soll die grösste einer Ellipse angehörende Abszisse finden, deren Ordinate noch in 4 Dezimalstellen richtig wäre d. i. mit der Ordinate der Kettenbrückenlinie bis auf 0.0001 übereinstimmte, so hätte man

$\frac{k^2x^2}{45}\cdot\sqrt{200\,x} < 1$, oder $x^2\sqrt{x} < \frac{45}{k^2\sqrt{200}}$, diess gibt

$x^5 < \frac{(45)^2}{200\,k^4}$ und $x < \sqrt[5]{\frac{(45)^2}{200\,k^4}}$ d. i. $x < \frac{15888}{\sqrt[5]{k^4}}$

wäre z. B. $k = 0.6$, so ergäbe sich hieraus $x < 2.3909$, mithin die der Abszisse $x = 3$ zugehörende Ordinate der Ellipse wäre schon merklich kleiner als die Ordinate der Kettenbrückenlinie.

Für $p = 1000$, und $k = 0.6$ hätte man eben so

$$x < 9.5182$$

gefunden.

Macht man aber im Ausdrucke 50) $k = 1$, so erhält man für die Ordinate y_2 der gleichgespannten Kettenlinie die Reihe

$$53)\ y_2 = \sqrt{2px}\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{x}{p}\right) + \tfrac{1}{120}\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{236}\left(\frac{x}{p}\right)^3 - \tfrac{1}{5760}\left(\frac{x}{p}\right)^4 - \ldots\right]$$

hält man diesen Ausdruck gegen jenen 50) so sieht man leicht, dass wieder $y > y_2$ sei. Ihr Unterschied ergibt sich

54) $y - y_2 = \sqrt{2px}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{p}\right)(1-k) - \frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{0}\left(\frac{x}{p}\right)^2(1-k^2) - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{6}\left(\frac{x}{p}\right)^3(1-k^3) + \ldots\right]$

Setzt man hier, wie vorhin, $k = 0.6$, so wird dieser Unterschied kleiner als 0.0001, wenn $p = 100$ und $x < 0.0475$, ferner, wenn

$p = 1000$ und $x < 0,0104$.

Es stimmt also für den hier angenommenen Modulus die Ellipse mit der Kettenbrückenlinie genauer, als die gleichgespannte Kettenlinie. Dagegen nähern sich beide letztgenannten Kurven, dem Ausdrucke 54) zu Folge, einander desto mehr, je weniger k von 1 verschieden ist, und fallen für $k = 1$ genau in einander.

Unter den drei Kurven, nämlich: Parabel, Ellipse und die gleichgespannte Kettenlinie, nähert sich also die erstere der Kettenbrückenlinie am wenigsten: von den beiden anderen nähert sich bald die eine bald die andere, nach Massgabe des Modulus, der Kettenbrückenlinie mehr.

§. 25.

Durch die Differentiirung der Gleichungen 33) und 34) erhält man

55) $dx = \frac{p}{\sqrt{k}}dw$, $dy = \frac{p}{k} \cdot dw \cdot tgw$; mithin

56) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{p\,dw}{k}\sqrt{(k + tg^2w)}$

Wäre hier $k = 1$, so hätte man sofort

$$s = \frac{p}{k}\int dw \sqrt{(1 + tg^2w)} = \frac{p}{k}\lambda\, tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}w)$$

und die Rektifikation der Kettenbrückenlinie würde durch eine einfache Formel gerichtet: allein da k von 1 verschieden ist (§. 17), setze man $tg\,w = t$, mithin

$$dw\sqrt{(k + tg^2w)} = \frac{dt\sqrt{(k + t^2)}}{1 + t^2}, \text{ und}$$

um $\sqrt{(k + t^2)}$ rational zu machen, setze man

57) $\sqrt{(k + t^2)} = u - t$

wo u eine unbestimmte Grösse vorstellt, so folgt nach einigen Reduktionen

$$t = \frac{u^2 - k}{2u}, \quad dt = \frac{u^2 + k}{2u^2} \cdot du$$

$$\sqrt{(k + t^2)} = \frac{u^2 + k}{2u}, \text{ und } 1 + t^2 = \frac{u^4 + u^2(2-k) + k^2}{4u^2}$$

hiedurch verwandelt sich

$$\frac{dt\sqrt{(k + t^2)}}{1 + t^2} \text{ in } \frac{(u + k)^2\,du}{u(u^4 + 2u^2(2 - k) + k^2)}$$

Da nun der Nenner dieser Bruchfunktion aus den Faktoren u, $u^2 + 2 - k - 2\sqrt{(1 - k)}$, und $u^2 + 2 - k + 2\sqrt{(1 - k)}$ besteht, so kann man, zur Zerfällung derselben in Partialbrüche, setzen

$$\frac{(u+k^2)}{u(u^4+2u^2(2-k)+k^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}} + \frac{B'u+C'}{u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}}$$

man findet auf dem bekannten Wege

$A=1,\ B=-\sqrt{(1-k)},\ C=o,\ B'=\sqrt{(1-k)},\ C'=o$

mit diesen Werthen wird

$$ds = \frac{p}{k}\left[\frac{du}{u} - \frac{u\sqrt{(1-k)}\,du}{u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}} + \frac{u\sqrt{(1-k)}\,du}{u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}}\right]$$

und nach gerichteter Integration

$$s = \frac{p}{k}\left[\lambda u - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\left[u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}\right] + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\left[u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}\right]\right]$$

$$= \frac{p}{k}\left[\lambda u + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\frac{u^2+2-k+2\sqrt{(1-k)}}{u^2+2-k-2\sqrt{(1-k)}}\right]$$

Führt man hier, der Gleichung 57) gemäss

$t+\sqrt{(k+t^2)}$ statt u ein, so ergibt sich

$$s = \frac{p}{k}\left[\lambda\left(t+\sqrt{(k+t^2)}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-k)}\,\lambda\frac{t^2+t\sqrt{(k+t^2)}+1+\sqrt{(1-k)}}{t^2+t\sqrt{(k+t^2)}+1-\sqrt{(1-k)}}\right]$$

$$= \frac{p}{k}\left[\lambda\left(t+\sqrt{(k+t^2)}\right) + \sqrt{(1-k)}\,\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}} + \frac{1+\sqrt{(1-k)}}{\left(t+\sqrt{(k+t^2)}\right)\sqrt{(1+t^2)}}\right)\right]$$

Das Integral verschwindet für $t=tgw=o$, mithin findet man die zugehörige Konstante

$$= -\lambda\sqrt{k} - \sqrt{(1-k)}\,\lambda\frac{1+\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{k}}$$

hiedurch wird vollständig

$$s = \frac{p}{k}\left[\lambda\frac{t+\sqrt{(k+t^2)}}{\sqrt{k}} + \sqrt{(1-k)}\,\lambda\left(\frac{t}{1+\sqrt{(1-k)}} + \frac{1}{t+\sqrt{(k+t^2)}}\right)\sqrt{\frac{k}{1+t^2}}\right]$$

$$= \frac{p}{k}\left[\lambda\frac{t+\sqrt{(k+t^2)}}{\sqrt{k}} + \sqrt{(1-k)}\,\lambda\frac{\sqrt{(k+t^2)}-t\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{k(1+t^2)}}\right]$$

Man ersieht hieraus, dass das Ergebniss nicht einfach genug ist, um daraus die Bogenlänge der Kettenbrückenlinie in einem geschlossenen Ausdrucke bequem zu berechnen.

§. 26.

Näherungsweise, und für jede Anwendung hinreichend genau, findet man die Bogenlänge so:

Es ist nach (A. F. 519) $ds = \frac{dy}{\sin\alpha}$

wo α den Winkel bedeutet, den die Berührende am Ende des Bogens s mit der Abszissenaxe einschliesst: nun ist dieser Winkel für den Fall, dass die Vertikale CE durch den Scheitel (fig. 4) die Abszissenaxe sei, die Ergänzung des Stellungswinkels v zu 90^0, demnach hat man, wenn wieder wie in §. 22 CX als Abszissenaxe und CY als Ordinatenaxe gewählt wird

$$ds = \frac{dy}{\cos v} = dy\sqrt{(1+tg^2v)} = dy\sqrt{(1+x^2)}$$

und wenn man die Wurzelgrösse $\sqrt{(1+\tau^2)}$ in die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{8}\tau^4+\tfrac{1}{16}\tau^6-\tfrac{5}{128}\tau^8+\ldots$$

verwandelt, und statt dy seinen Werth aus der Gleichung 43) nimmt, so erhält man bei Weglassung der Glieder mit τ^{10} und den höheren Potenzen von τ

$$\frac{ds}{p}=d\tau\,(1-k\tau^2+k^2\tau^4-k^3\tau^6+k^4\tau^8)\,(1+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{8}\tau^4+\tfrac{1}{16}\tau^6-\tfrac{5}{128}\tau^8)$$

welches Produkt entwickelt, und nach den Potenzen von τ geordnet, sofort gibt

$$\frac{ds}{p}=d\tau\,[1-(k-\tfrac{1}{2})\tau^2+(k^2-\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{8})\tau^4-(k^3-\tfrac{1}{2}k^2-\tfrac{1}{8}k-\tfrac{1}{16})\tau^6+(k^4-\tfrac{1}{2}k^3-\tfrac{1}{8}k^2-\tfrac{1}{16}k-\tfrac{5}{128})\tau^8]$$

bezeichnet man aber die eingeklammerten Koeffizienten der Potenzen von τ nach einander mit A, B, C, D, so findet man leicht

$$A=k-\tfrac{1}{2},\quad B=kA-\tfrac{1}{8},\quad C=kB-\tfrac{1}{16},\quad D=kC-\tfrac{5}{128}$$

hiedurch wird

$$ds=pd\tau\,[1-A\tau^2+(kA-\tfrac{1}{8})\tau^4-(kB-\tfrac{1}{16})\tau^6+(kC-\tfrac{5}{128})\tau^8]$$

woraus sich durch Integration ergibt

58) $$s=p\,[\tau-\tfrac{1}{3}A\tau^3+\tfrac{1}{5}(kA-\tfrac{1}{8})\tau^5-\tfrac{1}{7}(kB-\tfrac{1}{16})\tau^7+\tfrac{1}{9}(kB-\tfrac{5}{128})\tau^9]$$

Da der Stellungswinkel des Aufhängepunktes bei Kettenbrücken 20^0 nicht übersteigt, so ist $\tau<0.364$, oder $log\ \tau<0.561066-1$: diess gibt $log\ \tau^{10}<0.61066-5$, mithin $\tau^{10}<0.0000408$: andrerseits ist, wenn man für k auch seinen grössten Werth annimmt, nämlich $k=1$ setzend $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{3}{8}$, $C=\frac{5}{16}$, $D=\frac{35}{128}$, $E=\frac{63}{256}$ daher ist das grösste unter den weggelassenen Gliedern kleiner als $\frac{1}{11}\cdot\frac{63}{256}\cdot 0.0000408$, oder kleiner als 0.0000001 d. i. die in der Reihe 58) vernachlässigten Glieder haben auf die siebente Dezimalstelle der gesuchten Bogenlänge keinen Einfluss mehr.

Soll nun die Bogenlänge der Kettenbrückenlinie bestimmt werden, welche einer gegebenen horizontalen Abszisse x zugehört, so wird man nach der Gleichung 33) zuerst aus x den Hülfswinkel w berechnen, und hieraus nach der Gleichung 32) den Stellungswinkel v und dessen Tangente τ bestimmen, endlich mit dem so gefundenen Werthe von τ nach der Reihe 58) die weitere Rechnung führen. Beispiels halber sei $p=100$, $x=37$, $k=0.6$ man sucht s? Den Hülfswinkel w zu finden, hat man

$log\ x = 1.5682017$

$log\ \sqrt{k} = 0.8890756-1$

$log\ x\sqrt{k} = 1.4572773$, demnach

$log\frac{x\sqrt{k}}{p} = 0.4572773-1$: nun ist die Bogenlänge von 1^0 gleich 0.01745329, demnach

$log\ 1^0 = 0.2418774-2$

$log\ w = 1.2153999$; mithin $w=16^0.4210=16^0\,25'\,15'',6$

man hat ferner $\log tg\, w = 9.4694012$

$\log \sqrt{k} = 0.8890756-1$

daher $\log \tau = 9.5803256$, und $\tau = +0.380474$

$\log \frac{1}{3} A = 0.5228787-2$

$\log \tau^3 = 0.7409768-2$

$\log \frac{1}{3} A\tau^3 = 0.2638555-3$, und $-\frac{1}{3} A\tau^3 = -0.001836$

$\log \frac{1}{5} B = 0.1139434-2$

$\log \tau^5 = 0.9016280-3$

$\log \frac{1}{5} B\tau^5 = 0.0155714-4$ und $-\frac{1}{5} B\tau^5 = -0,000104$

$\log \frac{1}{7} C = 0.1613680-2$

$\log \tau^7 = 0.0622792-3$

$\log \frac{1}{7} C\tau^7 = 0.2236472-5$ und $\frac{1}{7} C\tau^7 = +0.000017$

endlich findet man eben so $\frac{1}{9} C\tau^9 = -0.000002$

Die Summe gibt $\frac{s}{p} = 0.378550$

und $s = 37.8550$

§. 27.

Man kann auch die gesuchte Bogenlänge als eine Funktion der vertikalen Abszissen darstellen, wenn man zuerst die Gleichungen 58) und 44) mit einander dividirt, diess gibt

$$\frac{s}{y} = \frac{1 - \frac{1}{3} A\tau^2 + \frac{1}{5}(kA - \frac{1}{8})\tau^4 - \frac{1}{7}(kB - \frac{1}{16})\tau^6 + \frac{1}{9}(kC - \frac{5}{128})\tau^8}{1 - \frac{1}{3} k\tau^2 + \frac{1}{5} k^2\tau^4 - \frac{1}{7} k^3\tau^6 + \frac{1}{9} k^4\tau^8}$$

stellt man diesen Quotienten in der Reihe

$$1 + \alpha\tau^2 + \beta\tau^4 + \gamma\tau^6 + \delta\tau^8 \text{ vor,}$$

so findet man nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\alpha = \tfrac{1}{6},\ \beta = -\tfrac{1}{5}\left(\frac{2k}{9} + \tfrac{1}{8}\right),\ \gamma = \tfrac{1}{9}\left(\frac{22k^2}{135} + \frac{k}{15} + \tfrac{1}{16}\right)$$

$$\delta = -\tfrac{1}{9}\left\{\frac{214k^3}{1575} + \frac{9k^2}{175} + \frac{k}{28} + \tfrac{5}{128}\right\}$$

Substituirt man nun die Werthe dieser Koeffizienten, und die Werthe der Potenzen von τ aus der Formel β) im §. 22 in die so eben angenommene Reihe, so ergibt sich nach einigen Reduktionen für vertikale Abszissen

59) $$\frac{s}{y} = \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{p}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\frac{7k}{9} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{10k^2}{27} - \frac{13k}{15} + \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{191k^3}{1575} - \frac{303k^2}{350} + \frac{19k}{14} - \tfrac{5}{8}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^4\right]$$

Um noch den Ausdruck für s von y unabhängig zu machen, setze man den für y gefundenen Werth aus Formel 50) in 59) und ordne alles nach den Potenzen von $\frac{x}{p}$, so erhält man

60) $s = \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}k - 1\right)\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{24}k^2 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{7}{336}k^3 + \frac{5}{24}k^2 - \frac{3}{4}k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \ldots\right] V\,2px$

Für $k = 1$ folgt hieraus die Bogenlänge der gleichgespannten Kettenlinie als Funktion ihrer vertikalen Abszissen

61) $s = \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{120}\left(\frac{x}{p}\right)^2 - \frac{1}{336}\left(\frac{x}{p}\right)^3 - \frac{1}{5760}\left(\frac{x}{p}\right)^4\right] V\,2px$

§. 28.

Für horizontale Abszissen kann die Bogenlänge der Kettenbrückenlinie durch eine schneller konvergirende Reihe, als die letztgefundene 60), ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$V(k + tg^2w) = \frac{1}{Vk}\left[1 - \frac{tg^2w}{2k} + \frac{1.3.tg^4w}{2.4.k^2} - \frac{1.3.5.tg^6w}{2.4.6.k^3} + \frac{1.3.5.7\,tg^8w}{2.4.6.8\,k^4}\right]$$

nun hat man nach (A. F. 193)

$tgw = w + \frac{w^3}{1.3} + \frac{2w^5}{1.3.5} + \frac{17w^7}{1.3.5.7.} + \frac{2.31w^9}{3.5.7.9.3}$, mithin

$tg^2w = w^2 + \frac{2}{3}w^4 + \frac{17}{45}w^6 + \frac{62}{315}w^8$

$tg^4w = \quad w^4 + \frac{4}{3}w^6 + \frac{6}{5}w^8$

$tg^6w = \quad w^6 + 2w^8$, und $tg^8w = w^8$

Substituirt man diese Werthe in die obige Reihe, und ordnet alles nach den Potenzen von w, so ergibt sich

$$V(k + tg^2w) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left\{1 - \frac{w^2}{2k} + \left(\frac{3}{8k^2} - \frac{1}{3k}\right)w^4 - \left(\frac{5}{16k^3} - \frac{1}{2k^2} + \frac{17}{90k}\right)w^6 + \left(\frac{35}{128k^4} - \frac{5}{8k^3} + \frac{9}{20k^2} + \frac{31}{315k}\right)w^8\right\}$$

oder, wenn wir Kürze halber die auf einander folgenden Koeffizienten der Potenzen von w mit a, b, c, d bezeichnen, so erhalten wir, der Gleichung 56) gemäss

$$ds = \frac{p\,dw}{k}V(k + tg^2w) = \frac{p\,dw}{k\sqrt{k}}(1 - aw^2 + bw^4 + cw^6 + dw^8)$$

woraus durch die Integration folgt

$$s = \frac{p}{k\sqrt{k}}(w - \frac{1}{3}aw^3 + \frac{1}{5}bw^5 - \frac{1}{7}cw^7 + \frac{1}{9}dw^9)$$

nun ist nach Formel 33) $w = \frac{x\sqrt{k}}{p}$, und hiedurch wird

62) $s = p\left[\frac{x}{p} - \frac{ak}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^3 + \frac{bk^2}{5}\left(\frac{x}{p}\right)^5 - \frac{ck^3}{7}\left(\frac{x}{p}\right)^7 + \frac{dk^4}{9}\left(\frac{x}{p}\right)^9\right]$

§. 29.

Zur Berechnung der Grösse, um welche die Kettenbrückenlinie in ihrer Mitte einsinkt, hat man aus der Formel 59), wenn die halbe Kettenlänge mit L, die halbe Spannweite mit D und der Pfeil mit t bezeichnet wird, und man bei den 3 ersten Gliedern stehen bleibt

$L = D\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{p}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{7k}{9} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{p}\right)^2\right]$, diess gibt, weil D unveränderlich ist,

$$dt = \frac{dL}{\frac{D}{p}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\left(\frac{7k}{9} - \frac{1}{2}\right)\frac{t}{p}\right)}$$

$$= \frac{15.p^2\,dL}{5Dp + 6Dt\left(\frac{7k}{9} - \frac{1}{2}\right)}$$

dL bedeutet hiebei, die Ausdehnung der halben Kettenlänge, sofern diese durch die grösste Belastung der Kettenbrücke bewirkt wird, und kann auf die bekannte Weise ermittelt werden.

§. 30.

Zum Schluss soll noch die Bestimmung des Krümmungshalbmessers für einen gegebenen Punkt der Kettenbrückenlinie, und die Lage seines Krümmungsmittelpunktes angegeben werden.

Die Gleichungen 55) geben

$$d^2y = \frac{p}{k}\,dw^2\,sec^2w;\quad ds = \frac{p}{k}\,dw\sqrt{(k + tg^2w)}$$

es ist aber der Krümmungshalbmesser $R = \frac{ds^3}{d^2y\,.\,dx}$, und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes erhellen aus den Formeln

$$g = x - \frac{R\,dy}{ds},\quad h = y + \frac{R\,dx}{ds}$$

woraus nach vollzogener Substitution der Werthe für dy, dx, d^2y, und ds gefunden wird

$$63)\ R = \frac{p}{k\sqrt{k}}\,.\,\frac{(k + tg^2w)^{\frac{3}{2}}}{sec^2w}$$

$$64)\ g = x - \frac{p\,tg\,w}{k\sqrt{k}}\,.\,\frac{\sqrt{(k + tg^2w)}}{sec^2w},\ \text{und}$$

$$65)\ h = y + \frac{p}{k}\,\frac{\sqrt{(k + tg^2w)}}{sec^2w}$$

wo w durch die Gleichung $tg\,w = \sqrt{k}\,.\,tg\,v$ gegeben ist, und v den Stellungswinkel jenes Punktes bezeichnet, bei dem die eben genannten Grössen bestimmt werden sollen.

Sinnstörende Druckfehler.

Seite:	*Zeile:*	*Statt:*	*Lies:*
9	12 von oben	$\frac{\sqrt{\sigma^2+p^2}}{p^2}$	$r\frac{\sigma^2+p^2}{p^2}$
11	11 v. oben	$log\,[log\,tg\,(45^0+\frac{1}{2}v)\,10]$	$log\,[log\,tg\,(45^0+\frac{1}{2}v)-10]$
14	5 von oben	10.06	19.06
18	7 von unten	$\frac{1}{n}=C'\,D'$	$\frac{1}{n}\,C'\,D'$
24	20 von unten	0.34116	0.34516
27	4 von unten	$2\,k\left(\frac{x}{p}\right)$	$2\,k\left(\frac{x}{p}\right)^2$
29	11	$+\frac{1}{26\,73}\left(\frac{kx}{p}\right)^5$	$-\frac{1}{26\,73}\left(\frac{kx}{p}\right)^5$

In der 4. Figur fehlt in der Verlängerung der Linie FM nach oben der Buchstabe Q

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

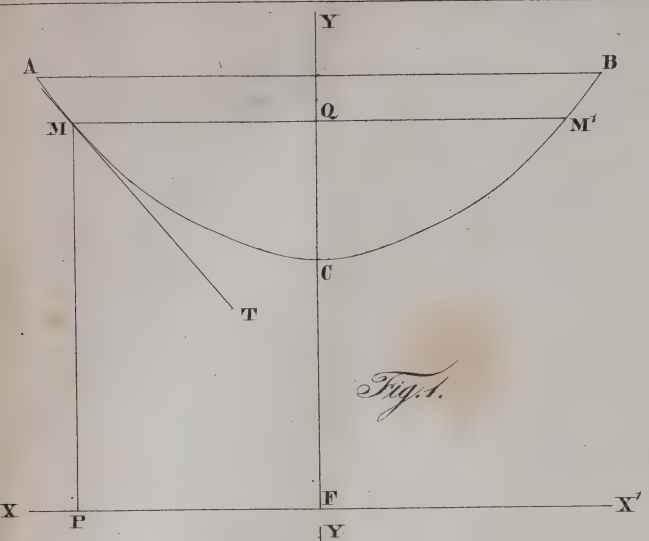


Fig. 1.

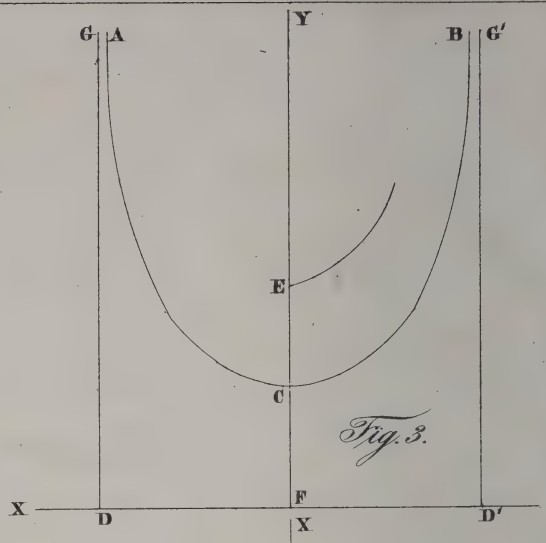


Fig. 3.

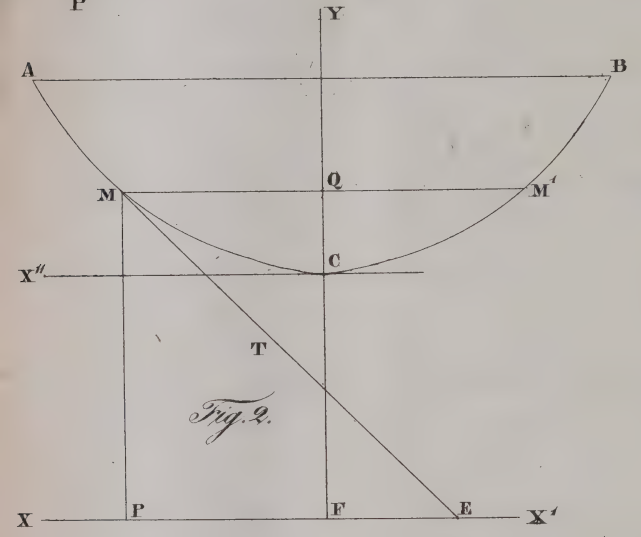


Fig. 2.

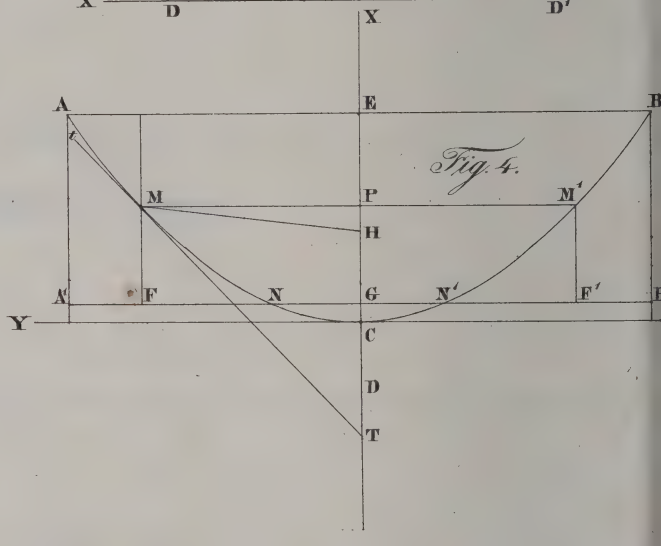


Fig. 4.

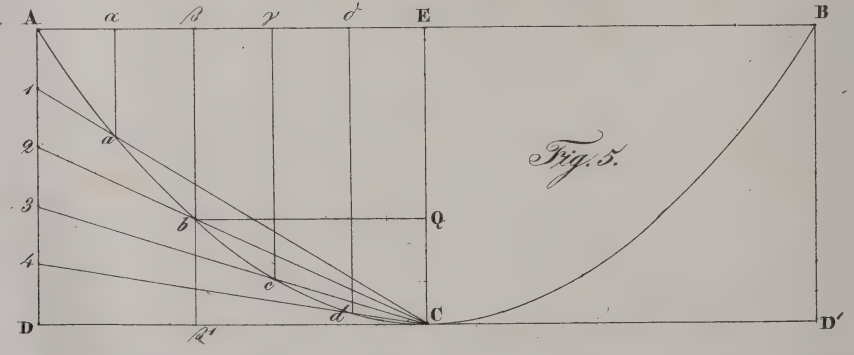


Fig. 5.

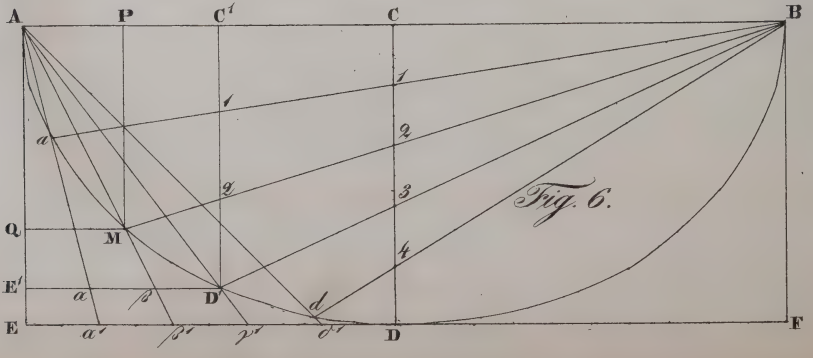


Fig. 6.

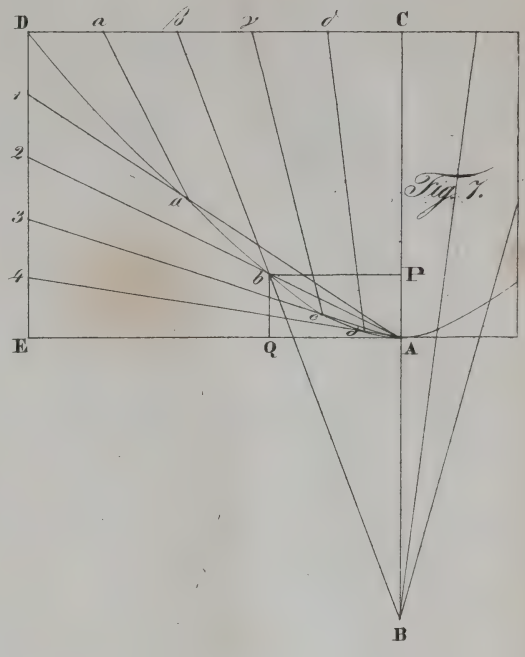


Fig. 7.

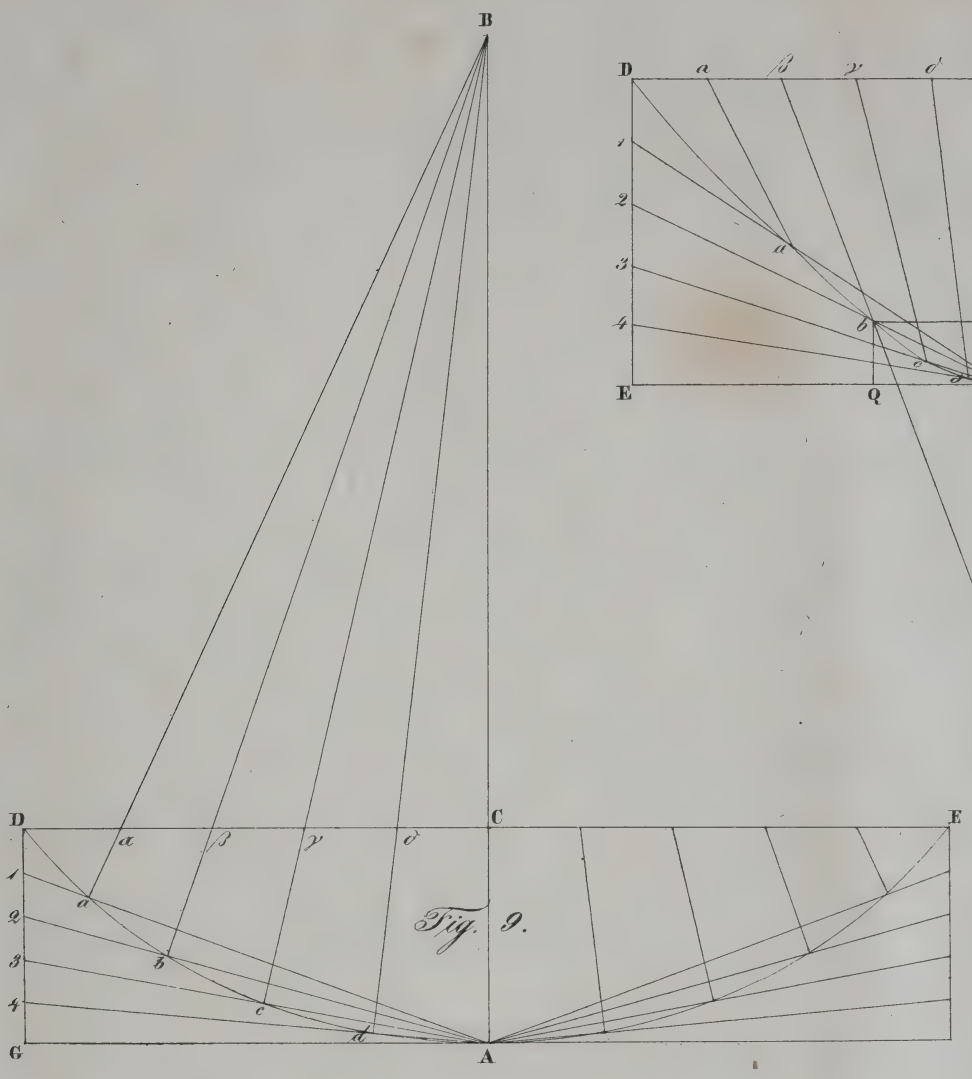


Fig. 9.

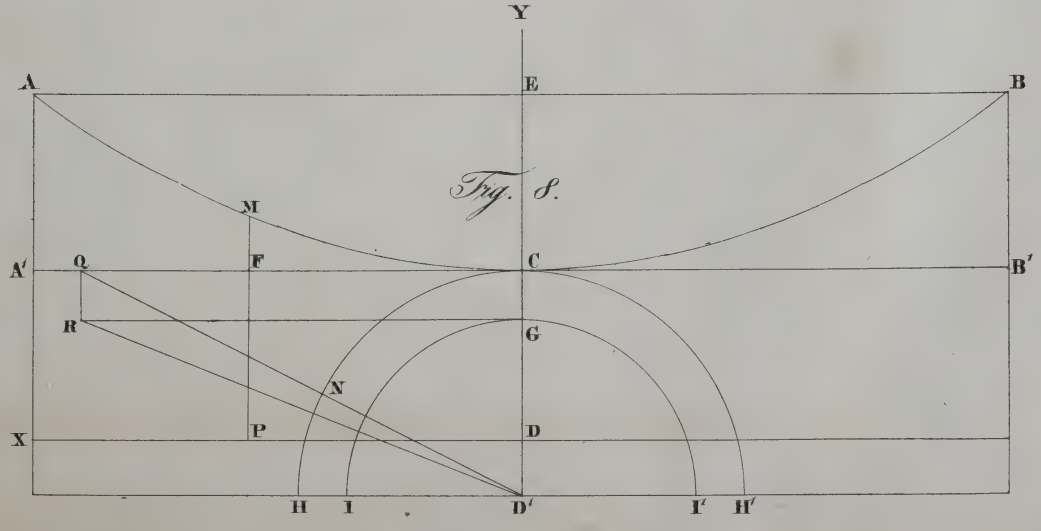


Fig. 8.

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

XXV. PROGRAM

c. k. vyššího

átního gymnasia v Přerově.

Vydán

na konci školního roku 1898-99.

OBSAH:

Obecné integrály lomených funkcí racionálných. Sestavil supplující učitel Josef Kupec.
Nekrology ředitele Jana Veselého a professora Františka Martinka.
Zprávy školní podává správce ústavu.

V PŘEROVĚ, 1899.

Tiskem knihtiskárny a kamenotiskárny společenstva.

Obecné integrály lomených funkcí racionálných.

Sestavil

Josef Kupec,

supplující učitel.

Stručné toto pojednání, čili — abych správně je nazval — repetitorium, jedné z nejzajímavějších částí počtu integrálního, jest větším dílem postaveno na basi přednášek prof. č. techniky Aug. Pánka. Poněvadž však právě upotřebení partie této z vyšší analyse nejvíce přichází a jednou z nejpohodlnějších method jest methoda rozkladu, jest účelem stati této aspoň její krátký přehled interessentům podati.

Obecnou funkci lomenou lze vždy přivésti k funkci ryze lomené čili redukovati na tvar

$$\frac{\sum_{0}^{m} d_k x^k}{\sum_{0}^{n} b_k x^k}$$

kdež jest rozměr $m < n$.

Řešením pak annullovaného polynomu

$$\sum_{0}^{n} b_k x^k = 0, \text{ kde } x_p = a_p$$

dostaneme obecně integrací ihned:

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \int dx \sum_{p=1}^{n} \frac{A_p}{x - a_p} = \sum A_p l(x - a_p).$$

Čitatele určíme buď dle poučky Descartes-ovy, jež však v složitějších případech řešením n rovnic nevede dosti rychle k cíli, neb krátce dle známé formule:

$$A_p = \frac{f(a_p)}{\varphi_1(a_p)},$$

kdež φ_1 značí zbývající faktory mimo $x - a_p$, aneb posléze nejrychleji, potřebíce počtu differenciálního, dle formule:

$$A_p = \frac{f(a_p)}{\varphi'(a_p)}.$$

Avšak provedení se komplikuje vůbec v případech pro

$$a_k = \alpha \pm \beta i$$

a pro

$$a_k = a_{k+1} = a_{k+2} \ldots \ldots$$

a zvlášť pro

$$\alpha_k \pm \beta_k i = \alpha_{k+1} \pm \beta_{k+1} i = \ldots\ldots$$

tedy pro kořeny imaginárné, pak násobné reálné a násobné imaginárné.

A tyto případy buďtež tuto detailně probrány;

1. Řešením jmenovatele $\varphi(x)$ můžeme tedy přijíti ke kořenů komplexním

$$\alpha \pm \beta i$$

jež však na základě předpokladu reálnosti součinitelů b_k nutně musí být konjugovány, čili obdržíme obecně:

$$(1) \qquad V = A_1 \int \frac{dx}{x - \alpha - \beta i} + A_2 \int \frac{dx}{x - \alpha + \beta i}.$$

Constanty $A_{1,2}$ určíme nejpohodlněji třetí jmenovanou methodou

$$(2) \qquad A_{1,2} = \left/ \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \right.^{x}_{\alpha \pm \beta i}.$$

Tím však obdržíme v čitateli i jmenovateli tvary komplexní, k dalším integrování nezpůsobilé; pročež nutno si je odstraniti. K tomu cíli di putujme specielně

$$(3) \qquad A_1 = \frac{f(\alpha + \beta i)}{\varphi'(\alpha + \beta i)}.$$

Bude patrně platiti relace

$$(4) \qquad A_1 = \frac{A + Bi}{a + bi} = P + Qi.$$

Zcela obdobně obdržíme

$$A_2 = P - Qi$$

a náš výraz (1) vzhledem k (3) a (4) v provedení integrace nabude tvar

$$V = l\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right]^P \left[\frac{x - \alpha - \beta i}{x - \alpha + \beta i}\right]^{Qi}$$

tedy výsledek bude výrazem komplexním.

Imaginárnost tato však jest pouze zdánliva a lehce ji odstraním spojujíce parciálné zlomky jmenovatelů konjugovaných:

$$\int \frac{P + Qi}{x - \alpha + \beta i} dx + \int \frac{P - Qi}{x - \alpha - \beta i} dx = \int \frac{2Px - 2(P\alpha + Q\beta)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx$$

$$= \int \frac{Mx + N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

a potom dle známé substituce

$$V = S\, l\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right] + T\, arc\, tg \frac{x - a}{\beta}.$$

Podobně si vedouce spojíme dva a dva zlomky částečné, čímž ovšem dostaneme jich o polovici méně, leč snadno integraci přístupných a ryz lomených.

2. Vyskytuje-li se více kořenů realných téže hodnoty, čili

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}\,\varphi_1(x)$$

kdež $\varphi_1(x)$ jest faktorem zbývajícím, rozložme integrál ve dvě části

$$J = A\int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} + \int \frac{R(x)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi_1(x)} \tag{5}$$

supponujíce, že A jest veličinou určitou, konečnou; že supposice jest správná, přesvědčíme se ihned.

Plyneť z (5.)

$$f(x) = A\varphi_1(x) + (x-a)\,R(x)$$

čili

$$R(x) = \frac{f(x) - A_1\varphi_1(x)}{x-a}.$$

Poněvadž pak nutno, aby $R(x)$ bylo funkcí celistvou, musí dělení na pravé straně býti beze zbytku, a poněvadž ani $f(x)$ ani $\varphi_1(x)$ faktor $x-a$ neobsahují, vyhoví se rovnici stane-li se čítatel pro $x=a$ nullou t. j.

$$A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)},$$

terýž známý výraz není ani nekonečný ani neurčitý a jest tudíž A odnotou konečnou.

Spolu splněna podmínka, aby zlomek druhého integrálu (5) byl ryze menným, neboť jak snadno se přesvědčíme, je-li $\varphi(x)$ stupně n-tého a tudíž (x) stupně nejvýše $n-1$ho, jest $R(x)$ funkcí stupně $n-2$ého.

Nyní podobně rozkládáme tento druhý integrál, takže je-li obecně

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots$$

ude

$$J = \int dx \sum_1^{\alpha} \frac{A_k}{(x-a)^k} + \int dx \sum_1^{\beta} \frac{B_k}{(x-b)^k} + \ldots.$$

Chceme-li ku příkladu potom si určiti coefficienty A_k, odstraníme rozloženém původním tvaru jmenovatele a takto upravenou rovnici diferencujeme $\alpha-1$kráte, čímž dostaneme system vztahů hodnoty A_k nám čující; dosadíme li $x=a$, tvar jich bude obecně:

$$f^{(h)}(a) = A_1\varphi_1^{(h)}(a) + 1!\binom{h}{1}A_2\varphi_1^{(h-1)}(a) + 2!\binom{h}{2}A_3\varphi_1^{(h-2)}(a) + \ldots + h!\,A_{h+1}\varphi_1(a) \tag{6}$$

ež vyšší differencialní quotienty funkce $\varphi_1(a)$ souvisí jednoduchým tahem s quotienty funkce $\varphi(a)$

$$\varphi_1^{(n)}(a) = n!\,\frac{\varphi^{(\alpha+n)}(a)}{(\alpha+n)!}$$

ož nabudeme p-kráte differencujíce rovnice

$$\varphi(x) = (x-a)^{\alpha}\varphi_1(x)$$

potom postupně dosazujíce

$$p = \alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2\ldots.$$

$= a$.*)

*) Herr, Lehrbuch der höheren Mathematik.

3. Má-li rovnice $\varphi(x)=0$ kořeny komplexní a spolu tedy nut i konjugované, tvaru

$$a=h+ik,\ b=h-ik$$

a přicházejí-li vícekrát, snadno je převedeme ve tvar realný, neboť bu

(6) $$(x-a)^\alpha(x-b)^\alpha=(x-h-ik)^\alpha(x-h+ik)^\alpha=[(x-h)^2+k^2]^\alpha.$$

Vyskytnou se tedy ve jmenovatelích částečných zlomků ne funk linearné, ale quadratické obecně tvaru

$$x^2+px+q.$$

Jmenovatel pak bude pro 2λ kořenů

$$\varphi(x)=(x^2+px+q)^\lambda\,\varphi_1(x)$$

a tedy

$$J=\int\frac{f(x)\,dx}{(x^2+px+q)^\lambda\,\varphi_1(x)}.$$

Nyní vedeme si zcela analogicky s případem předchozím; rozložín zlomek ve dva částečné

(7) $$V=\int\frac{(Px+Q)\,dx}{(x^2+px+q)^\lambda}+\int\frac{R(x)\,dx}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}\varphi_1(x)}$$

P, Q jsou realné konstanty, a druhý zlomek racionalnou funkcí ry lomenou, neboť

$$f(x)=(Px+Q)\,\varphi_1(x)+(x^2+px+q)\,R(x)$$

čili

(8) $$R(x)=\frac{f(x)-(Px+Q)\,\varphi_1(x)}{x^2+px+q}.$$

Aby $R(x)$ bylo funkcí celistvou, musí dělení na pravé straně bý beze zbytku, čemuž se vyhoví, poněvadž ani $f(x)$ ani $\varphi_1(x)$ jmenovate neobsahují, bude-li čitatel pro $x=h\pm ik$ nullou t. j.

$$f(h\pm ik)-[P(h\pm ik)+Q]\varphi_1(h\pm ik)=0$$

a tedy

$$P(h\pm ik)+Q=\frac{f(h\pm ik)}{\varphi_1(h\pm ik)}=H\pm iK$$

čili

$$Ph+Q=H,\ Pk=K$$

a posléze

(9) $$P=\frac{K}{k},\quad Q=H-\frac{Kh}{k}$$

a jsou tedy P a Q realné konečné hodnoty.

Ryzost zlomku poznáme snadno opět, neboť je-li jmenovatel $\varphi(x$ stupně n-tého, je $f(x)$ nejméně stupně $n-1$ho a čitatel druhé části (8 nemůže přesahovati stupeň $n-3$ tí, kdežto jmenovatel jest nejmén stupně $n-2$ho.

Podobně druhou část integrálu rozkládati můžeme, takže výsledek bud

$$\int dx\sum_{k=1}^{\lambda}\frac{P_kx+Q_k}{(x^2+px+q)^\lambda}+\int\frac{R_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx\ldots$$

Čitatele řešíme jako v případě předešlém.

Dne 27. března 1899. po sedmé hodině večerní rozletla se Přerovem truchlivá zvěst, že na pravdu Boží odebral se pan

JAN VESELÝ,

třetí ředitel zdejšího c. k. státního vyššího gymnasia.

Zpráva tato překvapila kde koho. Kdo jej po loňské povážlivé nemoci pozoroval, jak se vůčihledě zotavuje, kdo se s ním stýkal v úřadě i společnosti a kdo jej viděl v den úmrtí jeho ještě odpoledne ve škole: nemohl tušiti, že neúprosná Morana za málo hodin zastaví navždy jeho srdce a ledovou rukou zavěsí smuteční prapor na budovu gymnasijní.

Tak náhle ochrnutím srdce skonal!

I není divu, že osiřelému sboru professorskému dostalo se pak nemálo vzácných soustrastných projevův ústně, písemně a telegraficky, za kterážto povzbuzující jakož i za jiné přemilé důkazy přízně sbor vzdává uctivé díky.

Zesnulý ředitel narodil se dne 7. dubna 1837. ve Sv. Kříži v Čechách. Absolvovav gymnasium, vstoupil na universitu pražskou, kdež konal studia filologická po šest běhů; po ukončení povinných těchto studií stal se na podzim r. 1861. supplujícím učitelem piaristského gymnasia v Praze a setrval tam do r. 1868. V době té podrobil se státní zkoušce z řečtiny a češtiny pro vyšší, z latiny a němčiny pro nižší gymnasia a mimo to podjal se s dobrým prospěchem i zkoušky z italštiny na universitě pražské.

V srpnu r. 1868. byl jmenován skutečným učitelem na c. k. gymnasiu v Králové Hradci a odtud po dvou letech přesazen do Olomouce na c. k. slovanské gymnasium. V Olomouci působil od r. 1870. do konce prvého poletí roku 1889., jsa v řečeném pololetí správcem téhož ústavu. Tam učil nezávazně i jazyku francouzskému.

Vedle toho byl 18 let učitelem češtiny a němčiny na soukromém knížecím-arcibiskupském ústavě ku vzdělání učitelek, dále členem zkušební kommisse pro školy obecné a měšťanské a dozorcem tamní veřejné české školy národní.

Dne 8. února 1889. byl Nejvyšším rozhodnutím jmenován ředitelem c. k. vyššího gymnasia v Přerově, kterýžto úřad nastoupil počátkem druhého běhu téhož roku, působil v něm horlivě přes plných deset let až do poslední chvíle svého života a v úřadě učitelském vůbec téměř 38 let.

Pohřeb zvěčnělého konal se pak ve středu po květné neděli, dne 29. března 1899., ve 3 hodiny odpoledne z auly gymnasijní na zdejší hřbitov za hojné účasti vážených deputací některých středních i jiných ústavů okolních, všech místních škol s jejich sbory, zdejších úřadův a korporací, četného občanstva, přátel zesnulého a skoro všech žáků truchlícího ústavu, kteří přes to, že byly již velikonoční prázdniny, doprovodili dobrovolně tělesné ostatky svého ředitele k věčnému odpočinku.

Zádušní mše svatá sloužena byla za zvěčnělého v pondělí, dne 10. dubna ve farním chrámu Páně

R. I. P.

Prof. František Martínek.

Napsal J. Kabelík.

Smutný host, tyfus, vplížil se počátkem letošího školního roku do Přerova a neušetřil ani ústavu našeho. Z prvních jeho obětí byl prof. Fr. Martínek. Nemoc jeho, jež zprvu zdála se mírná, nenadále vzala obrat velice osudný, a tak dne 9. listopadu 1898. večer překvapila město zpráva všeobecně zarmucující, že prof. Fr. Martínka již není.

Trudno bylo pomysliti, že v plné síle tělesné i duševní oderván nám potměšilou nemocí ten vždycky veselý, svěží, neunavně činný druh, horlivý učitel a přítel mládeže studující, nadšený pěstitel umění pěveckého a hudebního, který byl upřímnou, srdečnou povahou svojí milý každému, kdo ho poznal, a zarmoutil všecky snad poprvé svým úmrtím, jež ho vyrvalo další požehnané práci.

František Martínek narodil se dne 22. září 1859. ve Skrbeni u Olomouce, kde otec jeho byl domkářem. Chudobný hošík vzácnými svými vlohami vůbec a zvláště pro zpěv získal sobě přízeň faráře skrbenského vdp. P. Fr. Vrby, jenž pečoval, aby umožněno mu bylo studium vyšší. Jeho přičiněním Martínek dán na c. k. slov. gymnasium v Olomouci, kde studoval s výborným prospěchem v letech 1871/2. až 1878/9. Život jeho na studiích gymn. byl životem velké části českého studentstva: svědomitá práce školní a vedle toho starost o výživu, jelikož byl poukázán jenom na sebe. K té dopomohl mu jeho lahodný hlas a vzácný sluch hudební; stal se fundatistou při dómě olomouckém, kde pobýval po celá svá studia a zdokonaloval se znamenitě pod vedením slavného našeho skladatele a dirigenta P. Pavla Křížkovského, jehož veliké přízni stále se těšil.

Po maturitní zkoušce, kterou složil r. 1879. s vyznamenáním, nastal mu těžký okamžik volby stavu. Touha jeho nesla se po studiích filosofických, ale nedostávalo se k nim prostředků. Ovdovělé matičce jeho bylo živiti doma četnou rodinu, takže nebylo pomyšlení na podporu syna nejstaršího. Na štěstí dostal Martínek jubilejní stipendium J. V. 300 zl. ve zlatě, a tak octl se v Praze, aby věnoval se studiu klass. filologie. Vedle toho pilně navštěvoval přednášky o filologii slovanské i němčině a stále zabýval se zpěvem i hudbou. Zdokonalil ještě theoretické své hudební vědomosti a vyškolil hlas v proslulé škole Pivodově i jako zpěvák v chrámu sv. Vojtěcha. V kruzích studentských záhy chvalně byl znám jako sbormistr „Moravské Besedy“ a přední člen hledaného „Hanáckého oktetta“. I pobyt na slunném jihu umožnil mu jeho krásný hlas: dostalť se jako barytonista k uměnímilovnému knížeti Dolgorukému, s nímž pobýval po dobu lázeňské saisony v Nizze a Luganě. Úspěchy umělecké byly by zajisté jiného zlákaly na skvělejší dráhu divadelní, ale jednoduchý a skromný Martínek zůstal věren svému studiu, jehož nezanedbával ani v šumném životě skvělých míst

lázeňských, a tak podrobil se s dobrým výsledkem zkoušce státní, nab
approbace z latiny a řečtiny pro vyšší a z češtiny pro nižší gymnas
r. 1887. Téhož roku složil také zkoušku ze zpěvu pro školy střed

Tehdy byl již v Olomouci. Dřívější učitelé jeho shledali v bývalé
horlivém svém žákovi neméně horlivého kollegu v úřadě učitelské
když jmenován byl počátkem škol. roku 1884/5. suppl. učitelem
c. k. slov. gymnasiu tamním a setrval v tomto úřadě do konce šk
r. 1891/2. I jako nadšenému pěstiteli umění hudebního Martínko
otevřelo se v Olomouci znamenité působiště v proslulém tamější
„Žerotínu“. Jaká byla tam činnost jeho, nejlépe vysvítá z pohrob
vzpomínky věnované mu v letoší výroční zprávě tohoto pěveckého spolk
Tam čteme: „Prof. Martínek býval horlivým a platným členem výbo
„Žerotína“ v letech 1885—1888., pak r. 1891. a 1892. neunavným
vzorným sbormistrem „Žerotína“, jejž svou osobní horlivostí, vzácný
odborným vzděláním, nadšením pro vše krásné, energickým jednání
ochotnou obětavostí a bodrou povahou uvedl na výši uměleckého ro
květu: tak na př. vzorně nacvičil velkolepé skladby Dvořákovy „S
Ludmilu“ a „Requiem“, že si dobyl plného uznání samého přítomnéh
mistra Dvořáka.“ Zajisté pochvala z úst nejpovolanějších, a tud
nejčestnější!

S bolestí loučil se s Martínkem ústav, „Žerotín“, i celá společno
olomoucká, s radostí však uvítal ho Přerov, když jmenován pro zdej
c. k. gymnasium učitelem skutečným od 1. září 1892. Zde působil
do své smrti. Svědomitá činnost jeho učitelská byla pochvalně uznáván
představenými tak jako dirigentská celým umění milovným obecenstve
přerovským. Stalť se i zde sbormistrem zpěv. spol. „Přerubu“, „Vlasty
a jako učitel zpěvu při c. k. gymnasiu také pořadatelem gymn. koncert
na prospěch podporovacího spolku gymnasijního, o jejichž umělecké
provedení by bylo jen opakovati hořejší pochvalu; milovníkům ušlechtil
hudby zůstanou vždy v milé paměti. Neunavná činnost jeho školní
mimo školu tím byla záslužnější, že život jeho stíhán byl těžkými
bolestnými ranami: stále jen dychtil a toužil po harmonii, ale tat
stále porušována různými zlozvuky nelítostného osudu, takže plně za
radoval se z ní až v onom lepším světě . . . . .

Bylo dne 11. listopadu 1898., když doprovázeli jsme tělesné jeh
pozůstatky na hřbitov a s očima zarosenýma stáli nad čerstvým jeh
hrobem. Každý z nás ztrácel v zesnulém něco: milující choť s drobným
svými dítkami vzorného manžela i otce; stará matička s ostatní rodino
věrného syna i příbuzného; žactvo vzácného učitele, sbor professorsk
předobrého soudruha; lidé pak dobré vůle — a sešlo se jich ku po
slední této poctě hojnost z blízka i z dáli — šlechetného člověka.

Rov jeho je tam, kde začíná právě ta požehnaná, širá Haná naše
jejíž byl věrným a vděčným vždy synem: jenom v ní bylo mu volno
tu byl doma; nad ševel jižních palem byl mu šustot klasů našeho obil
nad krásy horských temen alpských ten prostý půvab, ta vůně domác
půdy, které jako pravý selský syn zůstával vždy oddán a v níž tak
dřímá svůj poslední sen.

Drahý příteli, odpočívej v pokoji!

Roční zpráva

o stavu c. k. státního vyššího gymnasia v Přerově ve šk. roce 1898/9.

I. Učitelstvo.

a) **Změny v učitelském sboru.**

1. Vys. vynesením Jeho Excellence pana ministra kultu a vyučování ze dne 28. srpna 1898. č. 22320. jmenován byl zatímný učitel **Bohumír Tichánek** skutečným učitelem při českém státním gymnasiu v Uherském Hradišti.

2. Týmž vysokým vynesením jmenován byl supplující učitel při české státní realce v Brně **Karel Novák** zatímným učitelem při státním gymnasiu v Přerově.

3. Vynesením velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 19. listopadu 1898. č. 14459. byl kandidát učitelství **Josef Kupec** ustanoven supplujícím učitelem při státním gymnasiu v Přerově, by zastupoval professora **Karla Altmanna**, který pro ten rok dostal dovolenou. (Viz dále pod c).

4. Týmž vysokým vynesením ustanoven byl za příčinou otevření pobočky professor zemské střední hospodářské školy v Přerově **Josef Neoral** výpomocným učitelem při st tním gymnasiu v Přerově.

5. Dne 9. listopadu 1898. zemřel professor **František Martínek**; na jeho místo vynesením velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 11. ledna 1899. č. 16006./98. ustanoven kandidát učitelství **Rudolf Neuhöfer** supplujícím učitelem při státním gymnasiu v Přerově.

6. Dne 27. března 1899. zemřel c. k. ředitel **Jan Veselý**, a správcem ústavu vynesením vys. c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 21. dubna 1899. č. 9953. (intim. velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 5. května 1899. č. 5040.) ustanoven professor **Jan Piskač.**

b) **Sbor učitelský na konci šk. roku 1898./9.**

α) Správce ústavu:

Jan Piskač (viz dále pod β).

β) Professorové:

1. **František Oščádal**, v VIII. třídě důstojnosti, učil zeměpisu dějepisu ve třídách II.—IV., VI., VIII. (18 hod.)

2. **Josef Šikola**, v VIII. tř. důst., viz dále pod c).

3. **Hynek Krch**, v VIII. tř. důst., učil kreslení ve tř. I. a b—IV (20 hod.), správce sbírek pro kreslení.

4. **Karel Altmann**, v VIII. tř. důstojnosti, po celý školní rok 1898./9 na dovolené, viz dále pod c).

5. **Josef Spáčil**, v VIII. tř. důst., učil přírodopisu v I. a b II. III., V., VI. tř., mathematice v II.—IV. (21 hod.), správce sbírek přírodopisných.

6. **František Polák**, v VIII. tř. důst., učil latině v I. b, IV. řečtině ve IV. tř. (18 hod.), ordinarius IV.

7. **Jan Pískač**, v VIII. tř. důst., učil latině v V., VII., řečtině v V. tř. (16 hod.), od 6. dubna též řečtině v VII. tř. (20 hod.), ordinarius V., od 10. dubna správce ústavu.

8. **Pavel Krippner**, v VIII. tř. důst., učil latině v II., VIII. řečtině v VIII. tř. (18 hod.), ordinarius VIII., správce knihovny učitelské a spolu obstaravatel vzájemného půjčování knih a vědeckých časopisů mezi jednotlivými ústavy.

9. **P. Adrian Rotter**, v VIII. tř. důst., učil náboženství v I. a b—VIII tř. (18 hod.), exhortator vyššího gymnasia.

10. **Jan Kabelík**, učil češtině v V.—VIII., němčině v VI.—VIII tř. (21 hod.), ordinarius VI., správce knihovny žákovské.

11. **Rudolf Kreutz**, učil zeměpisu v I. a b, zeměpisu a dějepisu v V., VII., filos. prop. v VII., VIII., němčině v I. b tř. (20 hod.), od 13. dubna též němčině v III. tř. (24 hod.), ordinarius I. b, správce sbírky zeměpisné a numismatické.

12. **Jan Ondráček**, učil latině, češtině, němčině v I. a tř., němčině v III. tř. (20 hod.); od 13. dubna učil latině, češtině, němčině v I. a tř., češtině v III. tř. (19 hod.), ordinarius I. a.

γ) Zatímný učitel:

13. **Karel Novák**, učil mathematice v I. a, V.—VIII., fysice v VII., VIII. tř. (21 hod.), ordinarius VII., správce sbírek silozpytných

δ) Supplující učitelé:

14. **Josef Kupec**, učil češtině v I. b, II., IV., mathematice v I. b fysice ve IV., němčině v II. tř. (20 hod.), ordinarius II.

15. **Rudolf Neuhöfer**, učil od 2. ledna latině, řečtině, češtině v III., latině v VI. tř. (20 hod.); od 13. dubna učil latině v III., VI., řečtině v III., VI. tř. (22 hod.), ordinarius III.

ε) Výpomocní učitelé:

16. P. **František Pazdírek**, ředitel spirit. v klášteře školních sester v Přerově, exhortator nižšího gymnasia.

17. **Josef Neoral**, professor zemské střední hospodářské školy v Přerově, učil němčině v IV., V. tř. (6 hod.)

ξ) Učitelé vedlejších předmětů:

1. **Hynek Krch** (viz shora), učil kreslení nezávaznému na vyšším gymnasiu v 1 odd. (3 hod.)

2. **Jan Píškač** (viz shora), učil krasopisu ve 2 odd. po 1 hod.

3. **Rudolf Kreutz** (viz shora), učil tělocviku ve 2 odd. po 2 hod., pořadatel her žákovských.

4. **Jan Ondráček** (viz shora), učil těsnopisu ve 2 odd. po 2 hod.

5. **Rudolf Reinhart**, učitel obecné školy v Přerově, vyučoval tělocviku ve 2 odd. po 2 hod., z ochoty cvičil žáky také v plování 6 hodin v témdni.

6. **Bedřich Kozánek**, majetník hudební školy v Přerově, učil zpěvu ve 2 odd. po 2 hodinách.

η) Mojžíšskému náboženství

vyučoval rabín Dr. **Jakub Tauber** soukromě v místnostech školních do konce šk. r. 27 žáků ve 3 odděleních.

c) **Dovolenou měli:**

1. professor **Josef Šikola** po celý rok, byv ustanoven Jeho Excellencí panem c. k. ministrem kultu a vyučování vys. vynesením ze dne 28. září 1894. čís. 20061. (intim. velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 16. října 1894. čís. 10560.) c. k. okresním školním dozorcem pro české školy okresu Přerovského a Litovelského.

2. professor **Karel Altmann** po celý rok pro neduh oční vyneseními vys. c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 30. srpna 1898 č. 22811. (intim. velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 9. září 1898. č. 10168.) a ze dne 20. února 1899. č. 3368. (intim. velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 10. března 1899. č. 2662.).

II. Osnova učebná v předmětech závazných, v jazyce německém a v kreslení nezávazném.

Protože se na tomto ústavě zachovává učebná osnova předepsaná pro gymnasia, obmezuje se tato zpráva udáním odbyté četby v latině, řečtině a češtině, jakožto částí změnám podléhající, pak osnovou pro kreslení, které jest na nižším gymnasiu závazným, na vyšším nezávazným, konečně osnovou a četbou v jazyce německém, jemuž se všichni žáci učili.

Vynesením vysoké c. k. zemské školní rady ze dne 27. srpna 1892 čís. 8035. vyučuje se jazyku českému až na další rozhodnutí ve třídě I. po 4, v ostatních po 3 hodinách do téhodne.

A. Četba z jazyka latinského.

V tř. III.

a) Četba řádná: Corn. Nepos (ed Mikenda): Miltiades, Themistocles Aristides, Cimon, Conon, Epaminondas, Pelopidas, Thrasybulus Iphicrates, Phocion.

b) Memorovali: Milt. c. 6. Them. c. 9. — Cim. 4. — Epam. c. 6 — Epam. c. 9. — Pelop c. 3. — Thrasyb. c. 4. — Phocion c. 4

Ve tř. IV.

a) Četba řádná: Caesaris bellum Gallicum (ed Skřivan): I.; IV 5.—38.; V. 1.—23.; VI. 9.—28.; VIII. 1.—3., 63.—100.
Ovidius (ed Breindl): Metam. 1., 2., 4. Fast. 5.

b) Memorovali: Caes. b. G. I. 1., 14., 34., 36.; V. 14.; VI. 13.
Ovid. Met. I. 1.—4., 89.—124.

Ve tř. V.

a) Četba řádná: Livius (ed Novák) I., XXI.;
Ovidius (ed Breindl): Met. 6., 12., 14., 17., 18., 20., 22., 35. Fast. 3., 6., 7., 10., 11., 15.;
Trist. 1., 8.; ex Ponto 2.; Amor. 1.

b) Memor.: Všichni: Liv. I. 9., 29., XXI. 4.;
Ovid. Met. II. 1—47., X. 1.—39., XV. 871.—879.;
Trist. IV. 10. 1.—40.
Mimo to: Donát: Met. X. 40.—63., 72.—77. Gleich, Horák Přikryl, Rychlý, Vrána Josef, Zapletal: Met. VIII. 183.—235 Horner Oskar, Pala, Vrána Ludvík, Weiss, Žižka: Met. VIII 618.—720. Slovák, Weiss: Met. XI. 87.—193. Bartošek, Schenk Weiss, Žák: Fast. II. 193.—242. Žák: Fast. II. 687.—710. Horner Oskar, Kyjovský: Am. I. 15. 1.—38., Kyjovský: ex Ponto III 2 1.—110.

c) Soukromě četli: Horner Oskar, Caes. b. G. VI. 29.—54.; VII 14.—29. Kyjovský: Caes. b. G. II. 16.—35.

Ve tř. VI.

a) Četba řádná: Sall. Jug. (ed Novák); Cic. Cat. I. (ed Novák); Caes. B. Civ. (ed Novák) III. 41.—112.; Verg. (ed. Mikenda): Buc. I. V.; Georg. II. 136.—176., 458.—540., III. 478.—566., IV. 315. —567.; Aeneidos I.

b) Mem.: Sall. Jug. c. 10., 14. § 1.—13. — Cic. Catil. I. c. 1., c. 11. — Verg. Ecl. V. 20.—44.; Georg. I. 1.—5., IV. 559.—567.; Aen. I. 1.—33.; 198.—207.

c) Soukromě četli: Burjanek, Hájek, Kocian, Lasovský, Mika, Reich a Školoud: Sall. Cat.; Krippner: Sall. Cat., Cic. or. in Cat. II. III.; Nesvadba F.: Sall. Cat., Cic. or. in Cat. IV.; Petřík: Sall. Cat., Cic. or. in Cat. II. III.; Tauber: Liv. XXI. 21.—63.; Tománek: Sall. Cat.; Cic. or. in Cat. IV.

Ve tř. VII.

a) Četba řádná: Ciceronis de imp. Cn. Pompei (ed Novák), pro T. Annio Milone (ed Novák), Cato Maior (ed Novák).
Verg. Aen. (ed Klouček-Mikenda) II., IV., VI., VII. 608.—731., IX. 176. 449., X. 362. - 509., XI. 648.—867.

b) Mem.: Všichni: Cic de imp. Cn. Pompei c. 13., Verg. Aen. II. 40.—104., 199.—249., IV. 173.—197., VI. 788.—853.
Mimo to: Zlámal: Verg. Aen. II. 1.—39., 105.—198.

c) Soukromě četli: Beláček, Weber a Žák: Cic. pro Archia poeta; Furcht: Pro Sexto Roscio Amerino.

Ve tř. VIII.

a) Četba řádná: Tac. Germania (ed Novák) c. 1.—27., Ann. (ed Müller) I. 1.—15., 72. 81., II. 5.—18., 27.—43., 53.—63., 69.—83., 88., III. 1.—19., 65., IV. 1.—12., 34.—35., 39.—42, 52.—54., 57.—60., VI. 45.—48., 50.—51.
Hor. (ed. Keller-Haeussner) Carm. I. 1., 3., 4., 7., 9., 11., 14., 18., 22., 24., 34., 37., II. 2., 3., 6., 7., 10., 13., 14., 16., 18., III. 1.—6., 9., 13., 29., 30., IV. 2., 3., 4., 7., 9., 12., Epod. 2., 6., 7., 13., Sat. I. 1., 6., 9. II. 6., Epist. I. 2., 6., 19., II. 3. (výbor).

b) Mem.: Tac. Ann. III. 65., IV. 34.; Hor. Carm. II. 10., III. 30., IV. 3. a vybrané části z různých básní, zvl. I. 1., 3., II. 3., III. 1., 3., 29., IV. 2., 9., Epod. 2., a j.

c) Soukromě četli: Beneš Jos. a Grégr: Tac. Germ. c. 28.—fin. Polák: Tac. Dial. de oratoribus.

B) Četba z jazyka řeckého.

Ve tř. V.

a) Četba řádná: Xen. Kyrop. (ed Fejta) čl. 1., 2., 5., 6., Anab. A. čl. 1.—15., B. čl. 1.—5., 8.—11., C. čl. 1.—5., 7.—9., 18. Hom. Il. (ed Cumpfe) I., II.

b) Memor.: Všichni: Xen. Kyrop. VIII. 2. 19.—24., Hom. Il. I. 1.—41., II. 180.—235.
Mimo to: Eliáš: Hom. Il. I. 242.—280., Kyjovský: Hom. Il. I. 440.—518., Přikryl, Rychlý: Hom. Il. II. 1.— 73., Slovák: Hom. Il. II. 42.—99.

Ve tř. VI.

a) Četba řádná: Hom. Il IV. 73.—126., 422.—456., VI. 73.—118., 251.—339., 342.—529.; IX., XVII., XVIII., XIX. 1.—339., XXII., XXIV. 159.—803.
Herodoti l. V., VI. Xenof. Apomnem. čl. 2., 3., 7., 8.

b) Mem.: Hom. Il. IV. 439.—445., IX. 225.—261., 300.—306., 356.—363., XXII. 477.—498.

c) Soukromě četli: Burjanek, Krippner, Tauber a Tománek: Hom. Il. III.; Kocián, Petřík a Školoud: Her. VIII. 1.—80.; Mika: Hom. Il. III. 1.—180.; Nesvadba Frant.: Hom. Il. III. XXIII.

Ve tř. VII.

a) Četba řádná: Demosth. (ed Skřivan) Fil. I., Olynth. I., II., I
Hom. Odyss. (ed. Schulz) I., V., VII., IX., X., XI.
b) Mem.: Všichni: Dem. Ol. II. 2. - 6., Hom. Odyss. I. 1.—35., V
128.—174., IX. 333.—385.
Mimo to: Zlámal: Hom. Odyss. I. 36.—311.
c) Soukromě četl: Žák: Hom. Odyss. VIII.

Ve tř. VIII.

a) Četba řádná: Plat. Apologia, Crito, Laches, (ed Schanz). — So
kleův Oid. král (vyd. Breindl). — Hom. Odyss. XVI. (vyd. Schul
b) Mem.: Plat. Apol. p. 28. B.—D., 29. D. - 30., Kriton p. 50 E.—5
C. 54 B. C., Sof., Oid. král v. 151.—157.
c) Soukromě četli: Petřík, Polák, Potměšil a Sverdík: Plat. Euthyfr

C) Četba z jazyka českého.

V tř. V.

Bož. Němcové: Babička. Sv. Čecha: Dagmar. — Privatně S
Čecha: Ve stínu lípy.

V tř. VI.

Vrchlického: Legenda o svatém Prokopu. Jiráskovi: Psohlav
V cizích službách. — Privatně: Šmilovského: Za ranních červánk

V tř. VII.

Shakespaerův: Julius Caesar a Makbeth; Komenského: Labyri
světa a ráj srdce. — Privatně: Příhody V. V. z Mitrovic; Sv. Čech
Hanuman. Shakespearův: Koriolanus.

V tř. VIII.

Z Kollárovy Slávy dcery: Předzpěv. I. 1, 2, 10; II. 8. 37, 4
84, 88, 99, 100, 102, 109, 111, 117, 121, 122. 123, 124, 132, 138, 14
141, 142, 143; III. 24, 54, 56, 58, 60, 61, 62, 108, 110, 124. Čelako
ského: Růže stolisté II. díl. Bozděchův: Baron Goertz. Vrchlického: N
na Karlštejně. — Priv.: Scribova: Sklenice vody.

D. Osnova kreslení.

Třída I. 4 hodiny. Základní měřické tvary rovinné a v 2. běh
i prostorové. Měřické ozdoby ze IV. vydání Andělova „Geometrické
ornamentu".

Třída II. 4 hodiny. Jednotlivé přímky a pět rovnoběžek dle dr
těných vzorů z I. řady A; náčrtky a úplně stínované obrazy skupi
dle dřevěných těles i doplňovacích modelů z I. řady B. — Rostlin
prvky a ozdoby z I. řady Andělova díla „Elemente des pflanzliche
Ornamentes".

Třída III. 4 hodiny. Skupiny těles a základy architektonickýc
tvarů z I. a II. řady vzorů dřevěných. — Polychromované ozdoby

typy řecké a pompejské z Andělova „Polychrom. Orn.“ a Várdaiových „Nástěnných tabulí“. — Z paměti: 2 kresby perspektivné a 2 ornamentálné, vybrané z cvičiva II. třídy.

Třída IV. 4 hodiny. Skupiny architektonických tvarův umělých a nádob z III. řady vzorů sádrových s některými tělesy z I. řady. — Sádrové ornamenty ze IV. řady a). — Polychromované typy a ozdoby renaissanční, islamské a středověké z Várdaiových „Nástěnných tabulí“ a Andělova „Polychrom. Orn“. — Z paměti: 2 kresby perspektivné a 2 ornamentálné, vybrané z cvičiva III. třídy.*)

E. Osnova a četba z jazyka německého.

Třída I. A, B 4 hodiny týdně. Učebnice: „Úvod do jazyka německého rozborem a nápodobou“. Pro I. třídu škol středních vydali J. Roth a Fr. Bílý. Nauka o čtení a psaní slov a vět. Skloňování jmen podstatných, přídavných, náměstek, číslovky základní a řadové, stupňování jmen přídavných a vazba předložek. Časování sloves pomocných oznamovacího i rozkazovacího způsobu, sloves slabých v čase přítomném, souminulém, minulém a budoucím rodu činného. Slovosled ve větách hlavních, vedlejších, oznamovacích a tázacích. Vyučuje se methodou analyticko-direktní se stálým však zřetelem ku grammatice, aby žáci sami příčinu pochybení si nalézti a odůvodniti dovedli. V I. pololetí 9 diktand za účelem výcviku v psaní, 1 domácí a 2 školní práce; v II. pololetí 5 školních prací, 5 domácích.

Třída II. 4 hodiny týdně. Vyučovalo se methodou analyticko-direktní a základě učebnice „Úvod do jazyka německého II.“, kterou vydali Roth a Bílý. Články cvičebnice několikráte zprvu čteny a s náležitými akcenty slovnými i větnými procvičeny. Obsah jednotlivých vět otázkami odpovědmi německy reprodukován, rozšiřován a obměňován. Opakovány náměstky, číslovky, sloveso slabé i silné, vazby vět vedlejších vůbec a vazby infinitivné zvlášť. V druhém běhu mimo to probíráno sklonění substantiv a adjektiv ve spojení se substantivy; přeložena většina článků českých a ku konci probírány zajímavější partie připojené „Freie Lectüre“. Měsíčně 2 úlohy, střídavě školní a domácí, k nimž látka brána z krátkých článků ve škole vyložených a procvičených. Celkem písemných prací 20.

Třída III. 4 hodiny. Učebnice: „Německá Čítanka a Mluvnická učebnice“, kterou vydali Roth-Bílý. Pokračováno methodou analyticko-direktní se stálým zřetelem ku grammatice. Články cvičebnice čteny, celku a po částech rozebírány grammaticky a věcně, načež otázkami odpovědmi reprodukovány a k domácímu cvičení ukládány. Úkoly školní (9) záležely v reprodukci článků ve škole propracovaných; za domácí úkoly (9) dávány popisy z článků čtených, hlavně z básní, pak články pouze předčítané, dle určitých otázek sestavené a překlady článků českých ve cvičebnici obsažených. Řeč vyučovací úplně německá.

Třída IV. 3 hodiny. Učebná kniha: Roth a Bílý, „Německá Čítanka Mluvnická Cvičebnice pro III. a IV.“ — Články cvičebnice čteny, dle potřeby překládány, vykládány, po částech pak v celku otázkami a odpovědmi reprodukovány, některé memorovány. — Probrána nauka o souvětí souřadném a podřadném, užívání některých časů, užívání

*) Osnova kreslení nezávazného na vyšším gymnasiu jest mezi předměty nepovinnými IV. 3.

konjunktivu, zkracování vět, řeč nepřímá. — Za měsíc úloha domácí školní, celkem 18. Vyučovací řeč německá.

Třída V. 3 hodiny. Četba a výklad básní a článků prosaických Cvičení v konversaci. Fraseologie a opakování mluvnice. Memorová básní. (Viz memoranda.) Úlohy střídavě domácí a školní, celkem 1 Vyučovací řeč německá.

Třída VI. 3 hodiny. Četba a výklad básní i článků prosaických Překlady z jazyka českého a opakování mluvnice. Cvičení v konversa Memorování básní. Příležitostné poznámky z poetiky, jakož i literárn historické. Úloh 14.

Třída VII. 3 hodiny. Čteny a vykládány básně i články prosaick z větších děl básnických Lessingova „Minna von Barnhelm". Překla z jazyka českého; při nich a při opravě úloh opakovány důležité naul grammatické. Literatura až do Herdera. Cvičení v konversaci. Fraseolog Memorování a přednášení básní i článků prosaických. Úloh 14.

Třída VIII. 3 hodiny. Čtení a výklad článků prosaických i po tických s příslušnými poznámkami literárně-historickými. Z větších d přečteny Goethova „Iphigenie auf Tauris" a Schillerova „Das Lied v der Glocke". Překlady z jazyka českého a při tom opakování potřebný částí z mluvnice. Cvičení v konversaci. Přednášení básní memorovaný Úloh 14.

F. Memorované články v živých jazycích.

α) V jazyce českém.

Třída I. A.

Z čítanky Bartošovy pro I. třídu memorovány články: 1. Vlaš vičky, od Vlad. Šťastného. 3. Domov, od Jos. V. Sládka. 12. Křepelenk Moravská. 47. Zima, od Jos. V. Sládka. 51. Červ svědomí, od Bol. J blonského. 76. Skřivánek, od Jos. V. Sládka. 83. Kříž u lesa, od J V. Sládka. 89. Kovář, od Svat. Čecha. 137. Sedmera láska, od Bole Jablonského. 144. Píseň vesničanů, od J. V. Kamarýta.

Třída I. B.

Z čítanky Bartošovy pro I. tř.: 1. Vlašťovičky, od Vlad. Šťastnéh 47. Zima, od J. V. Sládka. 71. Lakomý a závistivý, od Ant. Puchmaje 83. Kříž u lesa, od Jos. V. Sládka. 86. Pšenice, od Vlad. Šťastnéh 92. Vlašťovička, od Karla Vinařického. 96. Světlo, od Bol. Jablonskéh 99. Píseň májová, od Karla Vinařického. 157. Tři perly, od Fr. Sušil 165. Oslava Hospodina v přírodě, česká píseň.

Třída II.

Z Bartošovy čítanky pro druhou třídu memorovány článk 1. Krása, od Václava Štulce. 17. Ptáci, od Jarosl. Vrchlického. 3 Novému roku, od Vlad. Šťastného. 39. Kdo ještě máš svou matič 46. Dědeček a babička, od Svat. Čecha. 50. Štěstí, od Adolfa Heyduk 53. Ve starém hradě, od Ant. Klášterského. 104. Jaro se blíží, Vítězsl. Hálka. 110. Topole, od Ant. Klášterského. 114. Zacelené rán od Jana Nerudy.

Třída III.

Z Bartošovy čítanky pro třetí třídu memorovány články: 1. Učitelé moudrosti, od Vlad. Šťastného. 33. Srdce mateřské, Národní. 38. Mládec koně pochvaluje, od Fr. Lad. Čelakovského. 45. Ve změnách života, od Jos. V. Sládka. 56. Jarní mlhy, od Fr. Kvapila. 77. Vřes, od Ant. Klášterského. 80. Na Bezdězi, od Sv. Čecha. 86. Má matička, od Jos. V. Sládka. 92. Vineta, od Sv. Čecha.

Třída IV.

Z čítanky Bartošovy pro čtvrtou třídu memorovány články: 1. Vzhůru, od Jarosl. Vrchlického. 3. Podzimní den, od Jarosl. Vrchlického. 11. Národní role dědičná, od Jana Kollára. 16. O dušičkách, od Vlad. Šťastného. 27. Nekonečný vesmír, od Jana Nerudy. 31. Vánoce, od Jarosl. Vrchlického. 44. Večerní jízda, od Jarosl. Vrchlického. 47. Není to sen, od Elišky Krásnohorské. 56. Měsíček, od Jana Nerudy. 60. Tři doby země české, od Bolesl. Jablonského. 84. Pouť na Hůrku, od Svat. Čecha. 87. Uplynulá mladost, slovenská píseň.

Třída V.

1. Domine, quo vadis? od O. Mokrého. 2. Romance o Karlu IV., od J. Nerudy. 3. Bohatýr Muromec, od F. L. Čelakovského. 4. Dagmar umírá, od Sv. Čecha. 5. Řeč Rokycanova ze Žižky, od Sv. Čecha. 6. Babiččina smrť, od B. Němcové. 7. Svatební košile, od K. J. Erbena.

Třída VI.

1. Toman a lesní panna, od F. L. Čelakovského. 2. Tři doby v zemi české, od B. Jablonského. 3. Smrť sv. Prokopa z Legendy o sv. Prokopu, od J. Vrchlického. 4. Pravá vlasť, od J. Vrchlického. 5. Buď vůle Tvá! od F. L. Čelakovského. 6. Po nebi hvězdic je rozseto, od J. Nerudy. 7. Tvůrčí jiskra ať se vznítí . . ., S námi štěstí ať zahrálo . . ., Ne horoucnost povalečná . . ., od F. L. Čelakovského. 8. Život jestiť ovný řece dravé . . ., Blaze, kdo si jeden čistý, smělý . . ., Pracuj každý chutí usilovnou . . ., od J. Kollára.

Třída VII.

1. Stín, od J. Vrchlického. 2. Potlesk, od J. Zeyera. 3. Hrad Kost, d Sv. Čecha. 4. Z předmluvy k Labyrintu světa, od J. A. Komenského. . Před fortnou klášterní, od J. Nerudy. 6. Když dílo Tvé je dokonáno, d J. Vrchlického. 7. Prostý motiv, od J. Nerudy.

Třída VIII.

1. Thorwaldsen, od J. Vrchlického. 2. Z předzpěvu k Slávy dceři, l J. Kollára. 3. Tyran Rozum, od Sv. Čecha. 4. Mrtvým vlastencům, l Sv. Čecha. 5. V lese, od J. V. Sládka.

β) V jazyce německém.

Třída I. A.

1. Der Frühling. 2. Ein Bäumchen. 3. Der Mai. 4. An den Fuchs 5. Meine Heimat. 6. Die Biene und die Wespe. 7. Die grüne Stadt 8. Das beste Getränk. 9. Im Sommer. 10. Mein Vaterland.

Třída I. B.

1. Ein Bäumchen. 2. Der Mai. 3. Das Gänschen. 4. An den Fuchs 5. Wen ich liebe? 6. Die böse Absicht. 7. Die grüne Stadt. 8. Wi ist es in dem Land der Zwerge? 9. Das beste Getränk. 10. Mein Vater land. 11. Kaiser Franz Josefs-Lied.

Třída II.

1. Die Biene. 2. Ehre das Alter. 3. Sprichwörter. 4. Drei Hasen aber wie viel Jäger? 5. Sprichwörter. 6. Der Tannenbaum und di Eiche. 7. Gefunden. 8. Der Schreiner. 9. Das Schneeglöckchen. 10. De Knabe und die Zugvögel. 11. Einige Wahrheiten. 12. In grüner Natur 13. Das Vaterhaus. 14. Das Wandern. (Aus freier Lectüre: An Erz herzog Albrecht).

Třída III.

1. Guter Vorsatz. 2. Der eifrige Schüler. 3. Ein klarer Bac und ein kindliches Herz (Häule). 4. Des Knaben Traum. 5. Eintrach (Gellert). 6. Der Tannenbaum (Deutsches Volkslied). 7. Zur Nach (Kletke). 8. Die Lerche (Schulze). 9. Benütze die Zeit (Gleim). 10. Di Schatzgräber (Bürger).

Třída IV.

1. Drei Paare und einer (Rückert). 2. Der Schiffbruch (Herder) 3. Der Bach (J. Trojan). 4. Die Macht des Beispiels (Keller). 5. Nacht lied (Goethe). 6. Die Tabakspfeife (Pfeffel). 7. Der Rabe und de Fuchs. 8. Der Löwe und der Fuchs (Gleim). 9. Das Vergissmeinnich (Cosmar).

Třída V.

1. Der betrogene Teufel (Rückert). 2. Die Bächlein (Goethe) 3. Der Sänger (Goethe). 4. Beherzigung (Goethe). 5. Lied des Hirte (Schiller). 6. Graf Richard ohne Furcht (Uhland). 7. Weisheit au Vogelmund (Rückert). 8. Das Riesenspielzeug (Chamisso).

Třída VI.

1. Harmosan (Platen). 2. Andreas Hofer (Körner). 3. Belsaza (Heine). 4. Die Bürgschaft (Schiller). 5. Der Graf von Habsburg (Schiller) 6. Der Ring des Polykrates (Schiller). 7. Des Sängers Fluch (Uhland)

Třída VII.

1. Der Tanzbär (Gellert). 2. Der todte Soldat (Seidl). 3. Die Kreuzschau (Chamisso). 4. Oberon, strofa 1., 8.—10. (Wieland). 5. Erlkönig (Goethe). 6. Johanna Sebus (Goethe). 7. Das Geschenk der Feien (Lessing).

Třída VIII.

1. Gefunden (Goethe). 2. Wanderers Nachtlied (Goethe). 3. Ein Gleiches (Goethe). 4. Mignon (Goethe). 5. Der König in Thule (Goethe). 6 Hermann und Dorothea I. 30 vv. (Goethe). 7. Das eleusische Fest (Schiller). 8. Das Lied von der Glocke 171 vv. (Schiller).

III. Látky k úlohám.

V tř. V.*)

a) Domácí: 1. Setkání na silnici do Capue. (Líčení dle básně „Domine, quo vadis“.) 2. O významu Foiničanův. (Pojednání.) 3. Ilja Volžanin. (Charakteristika dle stejnojmenné básně F. L. Čelakovského.) 4. Jak se dostal Servius Tullius na trůn římský? (Dle Livia.) 5. Stavba domu. (Popis.) 6. Císař Josef II. v „Babičce“ Boženy Němcové (Charakteristika.) 7. Důležitost skla. (Pojednání.)

b) Školní: O králi Ječmínkovi. (Dle čtené pověsti.) 2. Bohatýr Muromec. (Reprodukce básně F. L. Čelakovského.) 3. Hostina na hradě pražském. (Dle „Dagmary“ Sv. Čecha.) 4. Život a hra v šachy. (Příměr dle „Dagmary“ Sv. Čecha.) 5. Rodina Proškovic. (Dle „Babičky“ B. Němcové.) 6. Filemon a Baucis. (Dle Ovidia.) 7. Různé druhy pozdravů. (Vypsání.)

J. Kabelík.

V tř. VI.

a) Domácí: 1. Procházka poli o sv. Václavě. (Líčení.) 2. Stav věcí v Římě od Gracchů do prvního triumviratu. (Pojednání.) 3. Život podobá se knize. (Přirovnání.) 4. Častá krůpěj i kámen prorazí. (Výklad.) 5. Strom se opírá o strom, a člověk o člověka. (Vysvětlení.) 6. Výklad básně „Po nebi je hvězdic rozseto . . . .“ od J. Nerudy. 7. Význam Arabů pro vzdělanost lidskou. (Pojednání.)

b) Školní: Mládí Jugurthovo. (Dle latinské četby.) 2. Umírající gladiator. (Líčení dle Childe Haroldovy pouti s použitím reprodukce Umírajícího Galla.) 3. Poselství k Achilleovi. (Dle 9. zpěvu Iliady.) 4. Les jevištěm lidské práce. (Pojednání.) 5. Zvědavý. (Charakteristika.) 6. Názor o velikém štěstí u Herodota a u našeho lidu. (Srovnání.) 7. Ocenění Vergiliových Georgik. (Pojednání na zákl. latinské učby.)

J. Kabelík.

---

*) Počet úloh v páté třídě z jazyka českého ve školním roce 1898/9. zmírněn výminečně na 14 vynesením velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 29. října 1898 čís. 12869.

V tř. VII.

a) Domácí: 1. Líc a rub velkého města. (Pojednání.) 2. Zeyerův „Potlesk“ a Vrchlického „Stín“. (Srovnání.) 3. Valdštýnův vjezd do Chebu. (Líčení dle obrazu K. Pilotyho.) 4. O důležitosti stavu rolnického. (Řeč při svěcení školy hospodářské.) 5. Příbytek měřítkem lidské kultury. (Pojednání.) 6. Proč latina stala se řečí světovou? (Pojednání.) 7. Které věci určují ráz krajiny? (Pojednání.)

b) Školní: 1. Peníze jsou dobrým služebníkem, ale zlým pánem. (Úvaha.) 2. Pan Vilém z Pernštejna, vzor ušlechtilého šlechtice českého. (Dle výkladů školních.) 3. Cassius získává Bruta pro spiknutí. (Dle 1. jednání Shakespearova „Julia Caesara“.) 4. Vždyť jsme jen jednou na světě! (Úvaha.) 5. Karel ze Žerotína. (Chakteristika dle Apologie.) 6. Štěstí pozemské. (Dle „Labyrintu světa“.) 7. Kterak Makbeth stává se zločincem? (Na základě rozboru školního.)

c) Themata řečnických cvičení: 1. O hvězdách. (Beláček.) 2. O Mozartovi. (Psota.) 3. Livingston a Stanley. (Körner.) 4. O vývoji scenerie divadla. (Možíš.) 5. O Dantově „Pekle“. (Čeladník.) 6. Hlavní hrdina Jiráskova románu „V cizích službách“. (Ledvina.) 7. O středověkém rytířstvu. (Furcht.) 8. O vývoji a významu těsnopisu. (Žila.) 9. Heflštýn v dějinách. (Vaculík.) 10. Chodové v historii a v poesii. (Moš.) 11. Jak se jeví Olomouc literárním střediskem na Moravě. (Zlámal.) 12. Železná vrata dunajská před regulací a po ní. (Hirsch.) 13. Vývoj školství za panování J. V. císaře a krále Františka Josefa I. znázorněný na jubilejní výstavě vídeňské. (Šimek.) 14. O V. Beneši-Třebízském. (Oščádal.) 15. O Bohuslavi Balbínovi. (Vítěz.) 16. O vývoji malířství. Obrtel.) 17. Poměry v Čechách dle Jiráskovy „Maryly“. (Sroslík.) 18. Nade hrobem Josefa Dobrovského. (Jemelka.) 19. O vlivu poesie Byronovy na literatury slovanské. (Žák.) 20. O Puškinovi. (Weber.)

J. Kabelík.

V tř. VIII.

a) Domácí: 1. Národ vždy učil se od národu. (Pojednání.) 2. Maurové a Turci v Evropě. (Parallela.) 3. Člověk v boji s přírodou. (Pojednání.) 4. Proč Sokrates nechtěl uprchnouti z vězení? (Rozprava na základě Platonova „Kritona“.) 5. Které poměry přírodní a jaká zařízení umělá slouží obchodu mocnářství Rakousko-Uherského? (Pojednání.) 6. Složitý děj ve Vrchlického „Noci na Karlštejně“. (Pojednání na základě rozboru školního.) 7. Na rozloučenou. (Promluva k spolužákům.)

b) Školní: 1. Proč Jungmann doporučuje překládati z cizích jazyků? (Pojednání na základě čteného článku.) 2. Na jakém základě podává Šafařík obraz vzdělanosti staroslovanské. (Dle školní četby.) 3. Stavba a význam 1. jednání Bozděchova „Barona Goertze“. (Pojednání.) 4. Ulrika Eleonora. (Charakteristika dle „Barona Goertze“.) 5. Význam „Letopisů“ Tacitových. (Pojednání na základě latinské četby.) 6. Výklad básně „Tyran Rozum“ od Sv. Čecha. 7. Maturitní.

c) Themata řečnických cvičení: 1. Historický podklad Vlčkovy „Elišky Přemyslovny“. (Beneš Fr.) 2. O Vlčkově „Elišce Přemyslovně“. (Davídek.) 3. O Camoënsových Lusovcích. (Beneš Josef.) 4. O Vrchlického „Bar. Kochbovi“. (Keyř.) 5. O Jednotě českobratrské.

(Skácelík.) 6. O důležitosti tělocviku. (Špaček.) 7. O Shakespearově „Richardu III“. (Petřík.) 8. Charakteristika krále Leara. (Čech.) 9. O vývoji opery. (Dušek.) 10. O Sofokleově „Antigoně“. (Potměšil.) 11. O některých charakteristických vlastnostech tvorby Shakespearovy. (Šverdík.) 12. O významu J. Nerudy. (Polák.) 13. O klassicismu, romantismu, realismu, naturalismu, dekadentství. (Střelec.) 14. O Máchově „Máji“. (Zamazal.) 15. Život na Karlštejně za Karla IV. Dle „Noci na Karlštejně“. (Dokoupil.) 16. Karel IV. dle „Noci na Karlštejně“. (Jaroš.) Při rozboru „Sklenice vody“: 17. Historický podklad. (Horáček.) 18. Stoupající děj. (Horák.) 19. Klesající děj. (Chmelař.) 20. Trojí jednota. (Mádr.) 21. Hlavní hrdina. (Grégr.) 22. Kontrasty jednajících osob. (Zapletal.)

J. Kabelík.

B. V jazyce německém.

Ve tř. V.*)

a) Domácí: 1. Der kluge Richter. (Nach dem Gelesenen erzählt.) 2. Almansur und Osmai. (Nach dem Gelesenen erzählt.) 3. Die Handlung in Goethes Gedicht: „Der Sänger“. (Nach einer Vorbesprechung.) 4. Wer andern eine Grube gräbt. (Nach dem gleichnamigen Lesestücke erzählt.) 5. Der Blitz eine Schlange. (Auf Grundlage von Schillers „Räthsel“.) Das misslungene Zauberstückchen. (Nach dem Lesestücke „Der Zauberstössel“.) 7. Das Riesenspielzeug. (Nach dem gleichnamigen Gedichte erzählt.)

b) Školní: Mucius Scaevola. (Nacherzählung.) 2. Iphigenie in Aulis. (Nacherzählung.) 3. Herakles. (Nacherzählt.) 4. Prometheus. (Nacherzählung.) 5. Die unmenschlichen Lykier (Nacherzählt.) 6. Drei gute Lehren. (Im Anschlusse an das Rückert'sche Gedicht: „Weisheit aus Vogelmund“.) 7. Der verätherische Handwerker. (Inhalt des gelesenen Lesestückes.)

Jos. Neoral.

V tř. VI.

a) Domácí: 1. Harmosan. (Reproduction des gleichnamigen Gedichtes von A. Platen.) 2. Hans Euler erzählt von seinem Zusammentreffen mit dem Fremden. (Nach dem Gedichte Seidls.) 3. Belsazar. (Reproduction.) 4. Die Schlacht bei den Thermopylen. (Frei nach der Geschichte.) 5. Möros. (Charakteristik nach Schillers Gedichte „Die Bürgschaft“.) 6. Auf dem Dache des königlichen Palastes von Samos. (Schilderung nach dem Gedichte „Der Ring des Polykrates“.) 7. Der Tod Johanns von Luxemburg. (Frei nach der Geschichte.)

b) Školní: 1. Die Sage von der Gründung Roms. (Im Anschlusse an die Geschichte.) 2. Die Bärenhaut. (Erzählung nach Andeutungen.) 3. Das gestohlene Pferd. (Erzählung nach Andeutungen.) 4. Das Krönungsmahl Rudolfs von Habsburg. (Schilderung nach Schillers Gedichte „Der Graf von Habsburg“.) 5. Wilhelm Tell. (Concentration des gelesenen Lesestückes.) 6. Die Mongolen in Europa. (Übersetzung.) 7. Des Sängers Fluch. (Nach dem gleichnamigen Gedichte.)

J. Kabelík.

*) Počet úloh v páté třídě z jazyka německého ve školním roce 1898/9. zmírněn výminečně na 14 vynesením velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 29. října 1898 č. 12859.

V tř. VII.

a) Domácí: 1. Es ist nicht alles Gold, was glänzt. (Erklärung.) 2. Welchen Nutzen gewähren uns die Hausthiere? (Abhandlung.) 3. Reineke rächt sich an seinen Gegnern. (Nach dem VI. Gesange von Goethes „Reineke Fuchs“.) 4. Die Wahrheit des Satzes „Per aspera ad astra“ an einzelnen Männern nachgewiesen. (Abhandlung.) 5. Inhaltsangabe der Privatlectüre. (Lessings „Emilia Galotti“.) 6. Die Exposition in Lessings „Minna von Barnhelm“. (Abhandlung.) 7. Eine Hand wäscht die andere. (Erklärung.)

b) Školní: 1. Wie Siegfried erschlagen wurde. (Nach dem Nibelungenliede.) 2. Lohengrin. (Nach dem Vortrage.) 3. Die Einnahme der Kleinseite von den Schweden. (Übersetzung.) 4. Das Zusamentreffen Hüons mit Scherasmin. (Nach dem 1. Gesange „Oberons“.) 5. Inhalt und Bedeutung der Scene Tellheims mit Just. (Lessings „Minna von Barnhelm, I. 8“.) 6. Lessing als Forscher. (Übersetzung.) 7. Die Vorfabel in Lessings „Minna von Barnhelm“.

J. Kabelík.

V tř. VIII.

a) Domácí: 1. Welche Männer ehrt die Geschichte mit dem Beinamen der Grossen? (Abhandlung.) 2. Sprichwörtliche Redensarten, welche die Sprache der Geschichte entlehnt hat. (Erklärung.) 3. Inhalt und Bedeutung des 4. Gesanges von Goethes „Hermann und Dorothea“. (Abhandlung.) 4. Der Ehrgeiz, eine Triebfeder zum Guten und zum Bösen. (Abhandlung.) 5. Bella gerant alii, tu, felix Austria, nube! (Historische Begründung des Satzes.) 6. Kurze Inhaltsangabe der Privatlectüre. (Wallensteins Tod.) 7. Inhalt und Bedeutung des 3. Aufzuges von Goethes „Iphigenie auf Tauris. (Abhandlung.)

b) Školní: 1. Cids Jugendjahre. (Nach Herders „Cid“.) 2. Vor dem Wirtshause „Zum goldenen Löwen“. (Nach dem 1. Gesange von Goethes „Hermann und Dorothea“.) 3. Ulrike wartet auf Karl XII. (Übersetzung aus Bozděchs „Baron Goertz“.) 4. Der plötzliche Ruin des Familienglückes. (Im Anschlusse an das Lied von der Glocke.) 5. Die Schicksale der Tantaliden. (Nach dem 1. Acte von Goethes „Iphigenie auf Tauris“.) 6. Der Grossmutter Tod. (Übersetzung aus B. Němcová.) 7. Es fürchte die Götter das Menschengeschlecht! Der fürchte sie doppelt, den je sie erheben! (Mit Beispielen aus der deutschen Lectüre belegt.)

J. Kabelík.

Úlohy ku překládání z klassických jazyků v.

I. Na konci 1. pololetí.

α) Z latiny.

Ve tř. V. — Liv. II. 32. § 4.—12.
Ve tř. VI. — Sall. Catil. c. 58. 4.—12., 17.—21.
Ve tř. VII. — Cic. pro Sestio c. 22.
Ve tř. VIII. — Tac. Ann. XV. 38. a 39. (po slova „circum haurirentur“.)

β) Z řečtiny.

Ve tř. V. — Xen. Anab. IV., 3. § 8.—13.
Ve tř. VI. — Hom. Il. VII. 54.—91.
Ve tř. VII. — Dem. o míru. 1.—5. (incl.)
Ve tř. VIII. — Plat. Faidon p. 66. B—E (incl.)

II. Na konci 2. pololetí.

α) Z latiny.

Ve tř. V. — Ovid. Fast. IV. 585.—620.
Ve tř. VI. — Caes. Belli civ. II. 32. 1.—10.
Ve tř. VII. — Verg. Aen. V. 700.—739.
Ve tř. VIII. — Hor. Carm. IV. 5.

β) Z řečtiny.

Ve tř. V. — Xen. Anab. III. 2. 10.—15. (incl.)
Ve tř. VI. — Herod. VIII. 110.—111.
Ve tř. VII. — Hom. Odyss. VI. 23.—60. (ed. Schulz.)
Ve tř. VIII. — Sof. Fil. v. 254.—284.

IV. Předměty nezávazné.

I. Jazyk německý.

Jazyku německému se učili všichni žáci ústavu. Osnova učebná st udána pod II. E, knihy učebné, látky k úlohám a články memorované i závazných předmětech.

2. Krasopis.

V krasopise cvičilo se koncem II. běhu 60 žáků ve dvou odděních po 1 hodině v témdni. V prvním oddělení bylo 29 žáků, ve 2. dělení 31. Cvičeno v obou odděleních písmo latinské i kurentní.

3. Kreslení.

V kreslení cvičilo se v prvém běhu 17, v druhém 20 žáků vyšo gymnasia po 3 hodinách téhodne. Kreslily se: lidské hlavy dle andauera, předložek Bargue-Geromových, sádrových reliefů, masek hlav z V. řady; zátiší (vásy z III. řady); hlavice a patka sloupů III. řady; ornamenty a odlitky rostlinné dle sádrových vzorů ze IV. ly a polychromované okrasy z nové řady Andělova Polychromovano ornamentu; náčrty ornamentálné ze IV. řady vzorů nařízených.

4. Tělocvik.

Tělocviku súčastnil se 121 žák, cvičilo se ve 4 odděleních po 2 linách v témdni. Probírána a) cvičení prostná, s činkami a tyčemi,

pořadová cvičení, poklus, zápas a hry; b) cvičení na nářadích kro hrazdy visuté. Veškeré vyučování řídilo se dle osnovy vypracované p čátkem školního roku 1897/8 na základě osnovy a instrukcí vydaný vysokým c. k. ministerstvem kultu a vyučování ze dne 12. února 18 čís. 17261. ex 1896 pro gymnasia, reálná gymnasia a školy reál a schválené veleslavnou c. k. zem. školní radou a to pro tři oddělen jelikož oddělení I. bylo rozděleno ve dvě pobočky.

5. Zpěv.

Zpěvu vyučovalo se ve 2 odděleních po 2 hod. týdně.

V odděl. I. (31 žák) vyučováno dle „Nové nauky“ od Fr. Pivod Procvičen seš. I. (zpěv jednohlasý) s příslušnými theoretickými výkla o tónu, notách, klíčích, stupnicích atd., ze seš. II. (30 solfeggií) nacv čeno několik čísel všechno s průvodem harmonia. Doplňkem oběma sešitům Pivodovy školy cvičeny „Skřivánčí písně“ od Bend (1 hlas s průvodem harmonia), dvojhlasé písně ze „Školského zpěvník bratří Pivodů (s prův. harm.), „Květinka“, „Jaro“ dvojzpěvy s prů od Fr. Pivody.

V odděl. II. (60 žáků) cvičeny sbory pro smíšené hlasy, světs i církevní. Z těchto provedeny byly v kostele při různých přílež tostech: Modlitba za zeměpána od J. Maláta, Pangelingua od B. K zánka, O sanctissima, Vánoční zpěvy č. 1. a 2. (dle Maláta a ná písně upravil B. K.), „Žalozpěv“ od L. Vittoria, „Tantum ergo“ (ch rální s prův. varhan) „Ave verum“ od Mozarta, „Svatý Václave chorál. pro sm. sb. a „Missa brevis sollemnis“ od F. Z. Skuherské (sm. hlasy s prův. varhan).

6. Těsnopis.

Těsnopisu učil se koncem II. běhu 41 žák, ve dvou oddělení po dvou hod. týdně. V prvním oddělení (2 hod.) přednesena stručn historie stenografie, probráno nauka o tvoření slov se samoznaky. Cv čeno psaní dle diktatu a čtení z Iblovy Methodické učebnice české těsnopisu. Počet žáků 24 ze třídy IV., V., VI.

Ve druhém oddělení probráno krácení větné a logické dle Těsn pisu českého VIII. vydání. Čteno v Pražákově čítance. Psaní rychlopisn Počet žáků 17 ze třídy V., VI., VII., VIII.

V. Sbírky učebné.

α) Prostředky peněžné pro šk. r. 1898/9.

1. Přebytek z r. 1897/8	30 zl.	68 k
2. Taxy od 82 nově přijatých žáků po 2 zl. 10 kr. . (2 žákům taxy prominuty.)	172 zl.	20 k
3. Příspěvky na učebné pomůcky od 314 žáků po 1·50 (17 žákům příspěvek prominut.)	471 zl.	— k
4. Za duplikáty semestrálních vysvědčení	12 zl.	— k
Úhrnem . . .	**685 zl.**	**88 k**

Z toho obnosu ustanoveno:

Pro sbírky silozpytné	150 zl.	— kr.
Pro sbírky přírodopisné	50 zl.	— kr.
Pro kreslení a měřictví	40 zl.	— kr.
Pro obě knihovny, zeměpisný kabinet a sbírku archaeologickou, a to:		
a) na vědecké časopisy	88 zl.	60 kr.
b) na pokračování děl sešitových	71 zl.	— kr.
c) na nová díla pro knihovnu učitelskou	86 zl.	20 kr.
d) na kabinet zeměpisný a sbírku archaeologickou	52 zl.	62 kr.
e) na knihovnu žákovskou a vazbu knih	147 zl.	46 kr.
Úhrnem	685 zl.	88 kr.

Rozmnožení jednotlivých sbírek a stav jejich na konci škol. roku 1898/9.

A. Knihovny.

a) Knihovna učitelská.

(Správce prof. Pavel Krippner.)

běž.		Signatura	
	I. Encyklopaedie a časopisy:		
395.	*Alétheia.* R. III. V Praze 1899 v. 8.	XIV.	51
*15.	*Časopis, Český — historický.* R. V. V Praze 1899. v. 8.	—	50
*14.	— *katolického duchovenstva.* R. 40. (65.) V Praze 1899. 8.	—	29
*11.	— *Matice moravské.* R. XXII. V Brně 1899. 8.	—	5
*12.	— *Musea království českého.* R. LXXIII. V Praze 1899. 8.	—	3
*13.	— *pro pěst. math. a fysiky.* R. XXVIII. V Praze 1899. v. 8.	—	8
35.	*Generalkatalog* der laufenden periodischen Druckschriften an den österr. Universitäts- u. Studienbibliotheken etc. Wien 1898. lex. 8.	XV.	90
96.	*Hlídka.* R. IV. (XVI.) V Brně 1899. v. 8.	XIV.	52
22.	*Jahrbücher, Neue* — für das klassische Alterthum, Geschichte u. deutsche Litteratur u. für Paedagogik. Leipzig 1899. v. 8.	—	22
27.	*Komenský.* Týdenník vychovatelský. R. XXVII. V Olomouci 1899. 8.	—	14
97.	*Lid, Český* —. R. VII. V Praze 1899. v. 8.	—	53
32.	*Listy filologické.* R. XXVI. V Praze 1899. v. 8.	—	9
36.	— *Literární* —. R. XX. Ve Velkém Meziříčí 1898 až 99. lex. 8.	—	55
37.	*Mittheilungen* der k. k. Centralcommission zur Erforschung u. Erhaltung der Kunst- u. historischen Denkmale. XXV. Bd. Wien 1899. 4.	—	24
40.	*Museum, České — filologické.* R. V. V Praze 1899. 8.	—	47

*) Zařaděn ku předešlým ročníkům.

Čís. běž.		Signatur
1937.	*Památník* na oslavu padesátiletého panovnického jubilea J. V. cís. a král. F. J. I.: Vědecký a umělecký rozvoj v národě českém 1848—1898. V Praze 1898. v. 4.	IX. 2
1938.	*Přehled, Slovanský* —. R. I. V Praze 1898—99. 8.	XIV.
*52.	*Revue, Österr.-ungarische* —. XIII. Jahrg. Wien 1898 až 99. v. 8.	—
*55.	*Rozpravy* Čes. akademie c. F. J. v Praze. Tř. II. R. VII. č. 1.—28. Tř. II. R. VIII. č. 1.—10. V Praze 1898—99. v. 8.	—
*1898.	*Slovník, Ottův — naučný.* Díl IV.—VI. V Praze 1891—93. lex. 8.	V. 4
*67.	*Věstník* České akademie c. F. J. R. VIII. V Praze 1899. v. 8.	XIV.
*68.	*Zdraví.* List praktického zdravotnictví. R. V. V Praze 1899. v. 8.	—
*71.	*Zeitschrift* für die österr. Gymnasien. 50. Jahrg. Wien 1899. v. 8.	—
*77.	— für österr. Volkskunde. V. Jahrg. Wien 1899. 4.	—
*69.	— Österr. botanische —. XLIX. Jahr. Wien 1899. v. 8.	—
*78.	*Živa.* Časopis přírodnický. R. IX. V Praze 1899. 4.	XIV.

III. Paedagogika:

*119.	*Baumeister A.,* Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen. I. Bd. 1. Abth. Geschichte der Paedagogik von Th. Ziegler. München 1898. v. 8.	XIII.
—	— III. Bd. 6. Abth. Griechisch von P. Dettweiler. München 1898. v. 8.	—
1940.	*Instructionen* für den Unterricht an den Realschulen in Österreich im Anschlusse an einen Normallehrplan. 5. Aufl. Wien 1899. lex. 8.	—
*145.	*Lehrproben* u. *Lehrgänge* aus der Praxis der Gymnasien u. Realschulen. Herausg. von W. Fries u. R. Menge. Heft 56—58. Halle 1898—99. v. 8.	—

IV. Vědy náboženské:

*227. (1904.)	*Vigouroux F.,* Bible a nejnovější objevy v Palestině, Egyptě a Assyrii. Přel. A. Podlaha. Seš. 27.—37. V Praze 1898—99. m. 8.	I.

V. Klassická filologie. A) Klassikové řečtí:

1941.	*Homer,* Der Erzieher der Griechen von L. Adam. Paderborn 1897. 8.	III. 2
1942.	*Platon,* Apologie u. Kriton mit Stücken aus dem Symposion u. Phaidon. Herausg. von A. Bamberg. Text. Bielefeld-Leipzig 1897. 8.	III. 213

s. běž. Signatura

B. Klassikové římští:

943. *Ciceros* Reden. 5. Heft. Die 4. u. 5. Rede gegen Verres. Die Rede f. Murena. Herausg. von J. H. Schmalz. Text. Bielefeld-Leipzig 1898. 8. IV. 251 2i

944. — Reden gegen Verres. 1. IV. (De signis), 1. V. (De suppliciis) von K. Hachtmann. Gotha 1889, 97. 8. Text u. Commentar. . . . . IV. 260 a b

945. *Horatius,* Gedichte. Herausg. von G. Schimmelpfeng. Text. (Teubners Schülerausgaben.) Leipzig 1896. 8. . . . . — 259

471. *Sallustius,* Catilina u. Jugurtha. Commentar von Fr. Schlee. Bielefeld-Leipzig 1896. 8. . . . . 251 5b

C) Grammatika — starožitnosti:

539. *Daremberg — Saglio,* Dictionnaire des antiquités grecques et romaines. Fasc. 26. Paris 1898. 4. III. 117

946. *Sprachwissenschaft, Griechische u. lateinische —.* (Iw. Müllers. Handbuch der klass. Alterthumswissenschaft II. Bd.) München 1890. lex. 8. . . — 216

VI. Moderní filologie. A) Jazyk český s ostatními jaz. slovanskými:

916. *Flajšhans V.,* Písemnictví české slovem i obrazem od nejdávnějších dob až po naše časy. Seš. 8 až 13. V Praze 1898—99. v. 8. . . . . V. 438

703. *Gebauer Jan,* Historická mluvnice jazyka českého. Díl III. 2. V Praze a ve Vídni 1898. lex. 8. . . 414 c2

918. *Komenský J. A.,* Spisy J. A. K—ého.
č. 1. sv. 2. Korrespondence J. A. Komenského. Nová sbírka. Vyd. J. Kvačala. V Praze 1898. lex. 8. . . . . 434 a2
č. 3. J. A. Komenského na spis proti Jednotě bratrské od Sam. Martinia z Dražova sepsaný Ohlášení. Připojen spis Sam. Martinia z Dražova: Třicet pět důvodů, pro které všickni evang. Čechové za jedno býti povinni jsou. Vyd. J. Müller. V Praze 1898. lex. 8. . . . . 434 c

947. *Luňák T. J.,* Gostynskoje čudo (rusky.) V Oděse 1898. 8. . . . . — 445

948. *Palackého Fr.* korrespondence a zápisky. I. Autobiografie a zápisky do r. 1863. (Sbírka pramenů ku poznání literárního života v Čechách, na Moravě a v Slezsku. Skupina II. č 4.) Vyd. V. J. Nováček. V Praze 1898. lex. 8. . . . . V. 443

949. *Rypáček F. J.,* Frant. Palacký. V Brně 1898. 8. . IX. 245

950. *Stín A.,* Historie literatury ruské v XIX. st. Ve Velkém Meziříčí 1897. v. 8. . . . . V. 444

922. *Vychodil Pavel,* Frant. Sušil. Životopisný nástin. Seš. 3. V Brně 1899. 8. . . . . — 446

Čís. běž. Signatur

B) Jazyk německý:

1951. *Erzherzog Stephan,* Briefe an W. Haidinger. Wien 1897. v. 8. . . . . IX.

*1128. *Sterzinger J. — Mourek V.,* Německo-český slovník II. díl. V Praze b. l. lex. 8. . . . . VI.

VIII. Zeměpis, národopis, statistika:

*1414. *Monarchie,* Die österr.-ungarische — in Wort u. Bild. 303—322. Lief. Wien 1898—99. 4. . . . . IX.

1952. *Riedl Leop.,* Cesta na Rus. V Olomouci 1898. m. 8. —

1953. *Vlastivěda moravská.* Vyd. Musejní spolek v Brně. Dílu I. seš. 14—18., dílu II. seš. 1—7. V Brně 1898—99. v. 8. . . . . —

IX. Dějepis (kromě rak.-uherského) s vědami pomocnými:

*1926. *Lacina Jos.,* Obecná kronika. Seš. 23—42. V Praze 1898—99. v. 8. . . . . IX.

X. Dějepis mocnářství rak.-uherského a jeho jednotlivých zemí:

*1494. *Archiv* historický České akademie c. F. J.:
č. 12. Klicman Lad., Processus iudiciarius contra Jeronymum de Praga habitus Viennae a. 1410—1412. V Praze 1898. lex. 8. . . . . —
č. 13. Tobolka Zd., Hilaria Litoměřického Traktát k pánu Janovi z Rozenberka. V Praze 1898. lex. 8. . . . . —
č. 14. Schulz V., Korrespondence hraběte Václava Jiřího Holického ze Šternberka. V Praze 1898. lex. 8. . . . . —

*1928. *Lacina Jos.,* Česká kronika. Seš. 45—88. V Praze 1893. m. 8. . . . . —

XII. Přírodopis:

*1654. *Handwörterbuch* der Zoologie, Anthropologie u. Ethnologie. Herausg. von G. Jäger. 35. Lief. (Encyclopaedie der Naturwissenschaften I. Abth. 74. Lief.) Breslau 1898. lex. 8. . . . . XI.

1954. *Procházka Vlad.,* Repertorium literatury geologické a mineralogické království českého, markrabství moravského a vévodství slezského od r. 1528 až 1896. Díl I. Seznam auktorů. V Praze 1898. lex. 8. . . . . —

XIII. Fysika a chemie:

1955. *Gruss Gustav,* Základové theoretické astronomie. Díl I. V Praze 1898. lex. 8. . . . . XII.

XIV. Kreslení (s uměním) a měřické rýsování:

1956. *Jones Owen,* Grammatik der Ornamente. London 1868. fol. . . . . X.

Čís. běž. Signatura

XVII. Dopravnictví, obchod, průmysl:

1957. *Buschmann J.*, Ottokar v. Das Salz, dessen Production, Vertrieb u. Verwendung in Österreich mit besonderer Berücksichtigung der Zeit von 1848 bis 1898. Wien 1898. lex. 8. . . . . XV. 91

Do žádného ze 17 oddílů katalogu nelze zařaditi:

1934. *Ott Emil*, Soustavný úvod ve studium nového řízení soudního. Díl II. Část zvláštní. Odd. I. V Praze 1898. v. 8. . . . . XV. 89 b

Z těchto děl darem obdržela knihovna: od vys. c. k. ministerstva ultu a vyučování: č. 40., 69., 77.; od České akad. c. F. J.: č. 55., 67., 494., 1918., 1934., 1937., 1948., 1954., 1955.; od společnosti „Centrálka ro učebné pomůcky ve Vídni“: č. 1956.; od vydavatele časopisu Komenského: č. 27. Jakožto členské podíly obdržela knihovna od Matice eské: č. 12.; od Jednoty českých mathematiků: č. 13.; od dra. Leop. iedla: č. 1952.; od J. Luňáka, univers. professora v Rusku: č. 1947. e sbírky kreslířské přeneseno sem č. 1956.

Poznam. Časopisy Osvěta, Vesmír, Z říše vědy a práce, Zapova ronika a Vrázovy Cesty světem ukládají se zatím v knihovně učitelské, by, bude-li celé dílo shledáno nezávadným, přeneseno bylo do knihovny ákovské.

Celkem tedy čítá učitelská knihovna koncem šk. r. 1898/9. ěžných čísel 1957 ve 3315 svazcích a 1282 sešitěch.

Klassická archaeologie zařaděna jest v první části katalogu itelské knihovny, uveřejněné r. 1896/7., v odd. V. C. pod čísly těmito: 11., 513., 516., 537., 539., 564., 580. Ostatní díla (obrazy) sem spadací nalézají se ve sbírce pomůcek zaměpisných a dějepisných.

Programy. Sbírka programů obsahovala koncem šk. r. 1897/8. 321 běžných čísel programů gymn. a realných a 221 čísel programů kol odborných. Ve šk. r. 1898/9. přibylo 238 (1 dupl.) programů gymn. realných a 28 programů škol odborných. Čítá tedy sbírka programů oncem šk. r 1898/9. 4559 běžných čísel programů gymn. a realných 249 programů škol odborných.

b) Knihovna žákovská.

(Správce prof. J. Kabelík).

Koncem školního roku 1897/8 měla knihovna žákovská invent. sel 1765 v 2491 svazcích rozvázaných ve 2617 knih.

Ve školním roce 1898/9 přibylo darem od nakladatelství J. Kubeše ex. Stifter-Vepřek: Bunte Steine, od p. Dra. L. Riedla 2 ex. jeho esty na Rus, od J. Körnera, žáka tř. VII., Macl: Hrdinná srdce.

Koupí získáno: Tiray: Zachovej nám, Hospodine, císaře a naší m, Cervantes: Don Quijote ve zprac. pro mládež (Solc) 2 ex., Cooper: ovídky, Ztroskotání lodi Pacifiku, Na pobřeží východní Afriky, Stín: istorie literatury ruské, Jirásek: V cizích službách, (3 ex.), Jirásek: sohlavci (3 ex.), Šmilovský: Krupař Kleofáš, Za ranních červánků, ibrt: Klicpera dramatik, Váňa: Moudrost života, Vlček: Několik

kapitolek z dějin naší poesie, Bufková-Wanklová: Z Ječmínkovy říš Laurie: Kapitán Trafalgar, Benýšek: Po bojí vítězství, Zeyer: Mae dunova výprava, Goethe-Vaňorný: Hermann a Dorothea, Sofokles-Krá Elektra, Goethe-Quis: Ifigenie v Tauridě, Uhland-Arietto: Roman a ballady, Brus Matice české, Hrdina: Zapomenutý, Tisovský: Přího malé myšky, Na panství kmotra čápa, Molčík: Cestopisné obrázky starého i nového Peloponnesu (2 ex.), Soltésova: Proti prúdu, Němcov Pan učitel, Hrnčíř: Na Libici bílé, Benýšek: Práce zvítězila, Conso ence: Výjevy ze života flamského, Prus: Na přední stráži, Dvě povídk Brodský: Vesnické obrázky, Šafránek: Za českou osvětu, Moravsk Kravařsko, Rais: Mezi lidmi, Krásnohorská: Povídka o mně, Řezníček O českou korunu, Čermák: Kolem zeměkoule, Nehynoucí paměti J. V císařovny Alžběty, Zavadil: Moravské povídky, Andrlík: Šlechtic z česk chaty, Donát: Jubilejní rok 1898, Kabelík: Povídky ze Shakespear (2 ex.), Pypin a Spasovič: Historie liter. slov. II., Scribe: Sklenic vody, (3 ex.), Shakespeare-Sládek (Bartocha): Makbeth, Julius Caesa Vrchlický: Noc na Karlštejně (2 ex.), Světlá: Z literar. soukrom Sv. Čech: Dagmar, Stanley: V nejtemnější Africe, Jephson-Stanley Emin paša a vzpoura v Aequatorii.

Z knihovny učitelské sem přeneseny, jelikož neshledáno v nic nic závadného: Zapova Českomoravská kronika VII., Z říše vědy a prác Vesmír a Osvěta z r. 1898. Z cest Stanka Vráze.

Žákovská knihovna má tedy koncem škol. roku 1898/9 inven tárních čísel 1843 o 2574 svazcích rozvázaných ve 2700 knih.

Na nižším gymnasiu půjčovány knihy ve lhůtách čtrnáctidenních z třídních knihoven, na vyšším týdně, a výběr knih byl volný na zá kladě poučení daného učiteli a v mezích rozvrhu pro jednotlivé třídy

B. Pomůcky k vyučování zeměpisu a dějepisu.

(Správce prof. Rud. Kreutz.)

Koncem školního roku 1897/8 měla sbírka 102 mapy, 11 atlantů 2 globy, 1 tellurium a 87 obrazů, z nich 14 náležejících do klassick archaeologie.

Ve školním roce 1898/9 přibyly tři mapy a 12 obrazů, z nich dva jsou z oboru klassické archaeologie, tak že koncem školního roku 1898/9 čítá sbírka 105 map, 11 atlantů, 2 globy, 1 tellurium a 99 obr. z těchto přísluší 16 obrazů do oboru klassické archaeologie.

C. Sbírka přístrojů silozpytných.

(Správce zatímní učitel K. Novák.)

Koncem školního roku 1897/8 bylo v inventáři 448 čísel. K tomu přibylo v roce 1898/9 koupí 9 čísel: Do oddělení V. Křížové kyvadlo Oberbeckovo. Do oddělení IX. Model drobnohledu složeného. Model dalekohledu hvězdářského. Model dalekohledu pozemního. Model dalekohledu hollandského. Do oddělení X. Dutá koule mosazná plovoucí ve vodě teplé. Vodní teploměr Frickův. Dumasův přístroj k určování hustoty par. Do oddělení XII. Šestičlenná batterie akkumulatorů.

Jeví se tedy koncem školního roku 1898/9 v inventáři 457 čís. v 584 kusech.

D. Sbírka přírodopisná.

(Správce prof. Jos. Spáčil.)

Koncem minulého roku školního obsahovala sbírka zoologická 612 nventárních čísel v 724 kusech, sbírka botanická 34 invent. čís. ve 74 kusech, sbírka mineralogická 1306 invent. čís. ve 1552 kusech, bírka přírodopisných obrazů a jiných pomůcek 24 invent. čísel ve 15 kusech. Úhrnem obsahovala sbírka přírodopisná 1976 invent. čísel e 2965 kusech.

Roku letošního zakoupeno: Kostice velrybí; zpěvné ústroje pěvce; ikr. praeparaty: bacillus typhi, bacterium cyanogenes, micrococcus accinae, Přírodopisný atlas rostlin s textem od Jana Johna a Čeští rouci od Jos. Klimenta.

Darem dostalo se od p. Jana Troppra, správce c. k. statků: třev hlušec. — Od p. Arnošta Prachaře, strojvodiče v Přerově: křídtka veliká.

Uvedenými přírůstky rozmnožena byla sbírka přírodopisná celkem 9 čís., z nichž připadají 4 na sbírku zoologickou a 5 na sbírku přídopisných obrazů a jiných pomůcek.

Obsahuje letošního roku:

I. Sbírka zoologická: a) obratlovců 182 invent. čís. ve 188 kusech; jiných živočichů 150 invent. čís. ve 170 kusech; c) ostatních zoolog. edmětů 284 invent. čís. ve 370 kusech. Celkem 616 invent. čís. 728 kusech.

II. Sbírka botanická: a) herbář 1 invent. čís. ve 300 kusech; ostatních bot. předmětů 33 invent. čís. ve 274 kusech. Celkem 34 vent. čís. ve 574 kusech.

III. Sbírka mineralogická: a) nerostů 1208 invent. čís. ve 1454 sech; b) krystalografických modelů 98 invent. čís. ve 98 kusech. lkem 1306 invent. čís. ve 1552 kusech.

IV. Přírodopisných obrazů a jiných pomůcek 29 invent. čís. ve 0 kusech. Úhrnem obsahuje sbírka přírodopisná 1985 invent. čís. ve 74 kusech.

E. Sbírka kreslířská s pomůckami geometrickými.

(Správce prof. Hynek Krch.)

Koncem škol. roku 1897/8 vykázalo se ve 293 číslech inventárh 2277 kusů. V škol. roce 1898/9 přikoupily se do IV. oddělení ve číslech 102 listy.

Obsahuje tedy: odd. I. přístrojů v 7 číslech 13 kusů; odd. II. itěných pomůcek a dřevěných (lepenkových) vzorů v 63 číslech kusů; odd. III. sádrových (hliněných) vzorů ve 131 číslech 290 kusů; l. IV. předložek (seznamů) v 62 číslech 1893 listy (kusy); odd. V. měřictví v 33 číslech 80 kusů. Úhrnem má tato sbírka ve 296 ech inventárních 2379 kusů, jinak listů.

F. Sbírka nářadí pro tělocvik.

(Správce prof. Rud. Kreutz.)

Během tohoto roku nebylo nářadí rozmnoženo. V inventáři jeví tedy koncem školního roku 1898/9 33 čísel ve 204 kusech.

G. Sbírka hudebnin.

(Správce uč. zpěvu B. Kozánek.)

Sbírka hudebnin měla koncem školního roku 1897/8. 202 čísl (v tom harmonium) o 4613 hlasích.

Ve školním roce 1898/8 přibyla čísla: 203. Modlitba za země pána, smíš. sbor s pr. varhan od J. Maláta. 204. Pangelingua pro smí sb. s pr. varhan slož. B. Kozánek. 205. Dvě vánoční měšní vložky, pr smíš. sb. s pr. varhan up. B. Kozánek. 206. „Neveta". Smíš. sbor od K Weisse. 207. Vyběhla bříza běličká, smíš. sbor od A. Dvořáka. 208 „Studentská" od J. Nešvery (pro smíš. sb. upr. B. K.) 209. „Žalozpěv (v době postní) od L. Vittoria. 210. Missa brevis sollemnis pro smí sb. s pr. varhan od F. Z. Skuherského. 211. „Svatý Václave". Staro český chorál pro smíš. hl. 212. Ave verum pro smíš. sb. od Mozarta 213. „Ave Maria" pro smíš. sb. od Mozarta. 214. „Ave Maria" pr smíš. hl. sl. B. Kozánek.

Čítá tedy sbírka hudebnin koncem školního roku 1898/9 213 čísel o 4910 hlasích.

H. Sbírka numismatická.

(Správce prof. Rud. Kreutz.)

Sbírka čítala koncem minulého roku škol 1281 kus. Během tohoto roku školního přibylo darem 36 mincí a to od p. A. Mrkvy, městského stavitele, pražský groš Václava II. vykopaný na Trávníku v Přerově od p. Arnošta Prachaře, strojvodiče z Přerova 9 kusů mincí, najmé amerických; ostatní od žáků ústavu. Sbírka čítá nyní 1317 mincí.

VI. Zkoušky maturitní.

A. Ve školním roce 1897/8.

α) Doba písemných maturitních zkoušek v období letním a úlohy k nim udány v programě šk. r. 1897/8.

β) Ústní maturitní zkoušky se konaly dne 21. a 22. července za předsednictví p. t. pana c. k. zemského školního inspektora Edvarda Kučery

γ) Maturitní ústní zkoušky opravné a doplňovací konaly se dne 27. září 1898. za téhož předsednictví.

Při opravné zkoušce z řečtiny ustanoveno ku písemnímu přeložení Herodoti Hist. l. III. cap. 157.—159. po slova: τὴν πόλιν οἰκέειν

Konečný výsledek maturitní zkoušky ve školním r. 1897/8. jev se takto:

Z 10 veřejných ku zkoušce se přihlásivších žáků obdrželi:

1. vysvědčení dospělosti s vyznamenáním	1
2. vysvědčení dospělosti	8
3. reprobován na dobu neurčitou	1
Úhrnem . . .	10

Seznam approbovaných abiturientů ve šk. r. 1897/8.

Jméno	Den a rok narození	Rodiště a vlast	Kolik let stud. gymn.	Stupeň dospělosti	Povolání, jež si vyvolil
1. Bařina Karel,	2. ledna 1880.	Prusinky, Morava.	8	dospělý	práva.
2. Engel Theodor,	19. listopadu 1877.	Přerov, Morava	8	„	služba při dráze.
3. Kobliha Gustav,	6. října 1878.	Přívoz, Morava.	8	„	služba při dráze.
4. Martilík František,	18. května 1880.	Přerov, Morava.	8	dospělý s vyznam.	práva.
5. Pospíšil Leopold,	13. června 1879.	Rožnov, Morava.	9	dospělý	práva.
6. Tauber Oskar,	14. února 1880.	Přerov, Morava.	8	„	medicina.
7. Vavřík Jindřich,	28. srpna 1876	Přerov, Morava.	8	„	poštovnictví.
8 Vyměřal Julius,	16. dubna 1876.	Velké Prosenice, Morava.	11	„	práva.
9. Zapletal Antonín,	13. ledna 1879.	Malé Lazníky, Morava.	8	„	práva.

Poznámka: Ve školním roce 1897/8. žádný abiturient nepodrobil se zkoušce aturitní z jazyka německého.

B. Ve školním roce 1897/9.

Písemné maturituí zkoušky se konaly od 5.—9. června 1899., a dány k nim tyto úlohy:

1. pro překlad z jazyka českého na latinský: Proč stal se Horatius přívržencem Oktavianovým? (Článek k účelu tomu zvláště upravený.)
2. Pro překlad z jazyka latinského na český: Taciti Hist. II. 46. a 47.
3. Pro překlad z jazyka řeckého na český: Herodoti VIII. 143. a 144.
4. Z jazyka českého: Mládeži patří budoucnost; jaké plynou z toho pro ni povinnosti? (Úvaha.)
5. Z mathematiky:

a) Rozměry trojúhelníku provoúhlého vypočítati ze součtu jeho stran $a + b + c = 132$ a součtu jejich čtverců $a^2 + b^2 + c^2 = 6050$?

b) $3^{(\sin x + \sin y)} = 4$

$8^{(\sin^2 x - \sin^2 y)} = 4.$

c) V jak veliké úseče rozdělí se přímka

$$y = x - 2$$

kruh, jehož rovnice jest $x^2 + y^2 = 16$?

d) Jak hluboká jest propast, slyšíme-li dopadnouti kámen do ní puštěný po 25 sek.? (: Rychlost zvuku 333 m., g = 9·8 m.; k odporu v ústředí se nepřihlíží.)

β) Ústní maturitní zkoušky se konaly od 6. do 8. července 1899. z předsednictví p. t. pana c. k. gymnasijního ředitele Edvarda Ouředníčka.

Z 22 veřejných žáků ku zkoušce se přihlásivších obdrželi:

1. vysvědčení dospělosti s vyznamenáním 4
2. vysvědčení dospělosti 16
3. oprava po prázdninách povolena 2

Úhrnem . . . 22

VII. Učebné knihy pro školní rok 1899—1900.

I. Náboženství.

Šťastný. Učení katol. nábožen. pro I. tř. stř. škol; 2. a 3. vyd. ve třídě I
Hrudička. Liturgika pro střední školy; 1. a 2. vyd. ve třídě II
Procházka Dr. Mat.-Vondruška. Dějiny zjevení Božího v starém zákoně; 5. vyd. ve třídě III
Procházka Dr. Mat.-Vondruška. Dějiny zjevení Božího v novém zákoně; 5. vyd. ve třídě IV
Procházka Dr. Mat. Základní nauka nábož. v církvi katol.; 4. vyd. ve třídě V
Guggenberger. Katolická věrouka; 1. a 2. vyd. ve třídě . VI
Procházka Dr. Jan. Katolická mravověda; ve třídě VII
(Nebylo-li by 1. vyd. na skladě, Procházka-Podlaha; 2. vyd.)
Drozd. Církevní dějiny; 2. a 3. vyd. ve třídě VIII
Modlitby a zpěvník „Chvalte Hospodina“ . . . . . I.—VIII

2. Latinský jazyk.

A. Gramatiky a cvičebné knihy.

Hrbek. Latinská mluvnice. I. Nauka o slově; 2. vyd. ve třídě I. II
Hrbek. Latinská mluvnice I. Nauka o slově; 1. vyd. ve třídě III.—VI
Hrbek. Latinská mluvnice II. Skladba; 1. vyd. ve třídě . . III.—VI
Kořínek. Latinská mluvnice; 5. vyd. ve třídě . . . . . VII.—VIII
Hrbek. Cvičebná kniha jaz. latin. pro I. tř.; 3. vyd. ve třídě I
Hrbek. Cvičebná kniha jazyka lat. pro II. tř. se slovníčkem; 2. vyd. ve třídě II
Hrbek-Hrubý. Cvičebná kniha jaz. lat. pro III. tř. ve třídě III
Hrbek-Hrubý. Cvičebná kniha jaz. lat. pro IV. tř.; ve třídě IV
Hrubý. Úkoly k překladům z jaz. čes. na jaz. lat.; 3. vyd. ve třídě . . . . . V.—VI
Riss. Cvičebná kniha ku překládání z jaz. česk. na jaz. lat.; 2. vyd. ve třídě . . . . . VII.—VIII

B. Auktorové.

Cornelius Nepos ed. Mikenda; ve třídě . . . . . III.
G. Julius Caesar. Commentarii de bello Gallico ed Prammer-Skřivan; 2. vyd. ve třídě . . . . . IV.
P. Ovidius Naso. Vybrané básně ed. Breindl; ve tř. . . IV.—V.
T. Livi ab urbe condita libri ed. Novák; ve tř. . . . . V.
G. Sallusti Crispi. Bellum Jugurthinum ed. Novák; ve tř. VI.
M. Tulli Ciceronis Orationes in Catilinam ed. Novák; 2. vyd. ve tř. . . . . VI.
G. Julii Caesaris commentarii de bello civili ed. Novák; ve tř. VI.
P. Vergilia Maróna Aeneis a vybrané části zpěvů pastýřských a rolnických ed. Klouček-Mikenda; 2. vyd. ve tř. VI.—VII.
M. Tulli Ciceronis pro Sex. Roscio Amer., de imperio Cn. Pompei, pro Archia orat. ed. Novák; ve tř. . . . . VII.
M. Tulli Ciceronis De officiis ed. Schich-Dušánek; ve tř. . VII.
Cornelii Taciti Germania, Agricola, Dialogus de orat. ed. Novák; ve tř. . . . . VIII.
Cornelii Taciti ab excessu divi Augusti ed. Müller; ve tř. VIII.
R. Horati Flacci opera ed. Keller et Haeussner; 2. vyd. ve tř. VIII.
Šuran. Přehled dějin literatury řím.; ve tř. . . . . V.—VIII.
Kubelka. Římské realie; ve tř. . . . . V.—VIII.

3. Řecký jazyk.

A. Gramatiky a cvičebné knihy.

Schulz Jar. Mluvnice jaz. řeckého pro gymnasia; 2. vyd. ve třídě . . . . . III.—IV.
Schulz Jar. Mluvnice jaz řeckého pro gymnasia; 1. a 2. vyd. ve tř. . . . . V.—VIII.
Schulz Jar. Řecká kniha cvičebná pro nižší gymn.; 1. vyd. z r. 1890. ve tř. . . . . III.—IV.
Schulz Jar. Souvislé úkoly z četby Xenofonta pro V. a VI. tř.; ve tř. . . . . V.—VIII.

B. Auktorové.

Xenofon. Výbor ze spisů Xenofontových ed. Fejta; ve tř. V.—VI.
Homer. Ilias ed. Cumpfe Dr.; ve tř. . . . . V.—VI.
Homer. Homerova Odysseia ed. Schulz; ve tř. . . . . VII.—VIII.
Herodot. Výbor z Herodota. Války řeckoperské ed. Šuran; ve třídě . . . . . VI.
Demosthenes. Výbor řečí ed. Skřivan; ve tř. . . . . VII.
Demosthenes. Pro privatní četbu a domácí přípravu: Výbor Demosth. ed. Dr. Kastner; ve tř. . . . . VII.
Plato. Apologia et Crito ed. Král; ve tř. . . . . VIII.
Plato. Protagoras ed. Král; ve tř. . . . . VIII.
Sophoclis Aiax ed. Breindl; ve tř. . . . . VIII.
Šuran. Přehled dějin literatury řecké; ve tř. . . . . V.—VIII.

4. Jazyk český.

Gebauer Dr. Krátká mluvnice česká; 2. vyd. ve tř. . . . I.—I
Gebauer Dr. Mluvnice česká pro školy střední a ústavy učit. I. díl. Nauka o slově; 1. a 2. vyd. ve tř. . . . V.—VI
Bartoš-Jokl. Skladba jazyka českého; 7. vyd. ve tř. . . . III.—VI
Bartoš. Skladba; 5. a 6. vyd. ve tř. VI
Bartoš. Česká čítanka pro I. tř.; 6. vyd. ve tř. I
Bartoš. Česká čítanka pro II. tř.; 5. vyd. ve tř. I
Bartoš. Česká čítanka pro III. tř.; 3. vyd. ve tř. II
Bartoš. Česká čítanka pro IV. tř.; 4. vyd. ve tř. I
Bartoš-Bílý-L. Čech. Malá slovesnost; 5. vyd. ve tř. . . . V.—VI
Pelikán. Výbor z literatury české. Doba stará; 2. vyd. ve tř. V
Grim. Výbor z literatury české. Doba střední; 2. a 3. vyd. ve tř. VI
Truhlář. Výbor z literatury české. Doba nová; 3. vyd. ve tř. VII.—VII

5. Jazyk německý.

Roth a Bílý. Úvod do jaz. něm. rozborem i nápodobou; 2. vyd. ve tř. I
Roth a Bílý. Úvod do jaz. něm. rozborem i nápodobou; 2. vyd. ve tř. I
Roth a Bílý. Německá čítanka a mluvnická cvičebnice pro tertii a quartu škol středních; 2. vyd. ve tř. . . . . III.—IV
Willomitzer. Deutsche Grammatik für österr. Mittelschulen; 7. a 8. vyd. ve tř. . . . . V.—VI
6. vyd. ve tř. VII
Mourek. Cvičebná kniha ku překl. z jaz. čes. na jaz. něm. I.; 2. vyd. ve tř. . . . . V.—VII
Trnka. Deutsches Lesebuch für die V. u. VI. Class; ve tř. V.—VI
Veselík Dr. Deutsches Lesebuch für Mittelschulen III. Th. Für die obersten Classen; ve tř. . . . . VII.—VIII
Regeln und Wörter-Verzeichnis für die deutsche Rechtschreibung; ve tř. . . . . I.—VIII

6. Zeměpis.

Sobek. Všeobecný zeměpis pro I. tř. škol střed.; 3. a 4. vyd. ve tř. I
Sobek Všeobecný zeměpis pro II. a III. tř. škol. střed.; 3. a 4. vyd. ve tř. . . . . II.—III
Tille. Učebnice zeměp. obec. i rak.-uher. pro šk. stř. sv. II.; 6. vyd. ve tř. IV
Kozenn-Jireček-Metelka. Zeměpisný atlas pro školy střední; 14. vyd., dojde-li v čas schválení c. k. ministerstva, ve tř. I
11., 12., 13. vyd. ve tř. . . . . II.—VIII
Putzger-Dušek. Historický atlas; ve tř. . . . . II.—VIII
Tille-Metelka. Statistika mocnářství rak.-uher. 2. vyd. ve tř. VIII

7. Dějepis.

Šembera Dr. Učebná kn. dějep. pro nižší tř. škol stř. I. Věk starý; ve tř. . . . . II.
Šembera Dr. Učebná kn. dějep. pro nižší tř. škol střed. II. Věk střední; ve tř. . . . . III.
Šembera Dr. Učebná kn. dějep. pro nižší tř. škol střed. III. Věk nový; ve tř. . . . . IV.
Kameníček Dr.-Dvořák. Všeob. dějepis pro vyšší tř. stř. škol. I. díl. Starý věk; ve tř. . . . . V.—VI.
Kameníček Dr.-Dvořák. Všeob. dějepis pro vyšší tř. stř. škol II. díl. Střední věk; ve tř. . . . . VI.
Hindely-Řehák. Dějepis. všeob. pro vyšší tř. škol stř. III. díl. Nový věk; 2. vyd. ve tř. . . . . VII.
Šobek. Děje císařství rak.-uher. pro stř. školy; 2., 3., 4. vyd. ve třídě . . . . . VIII.

8. Mathematika.

Ťůma. Arithmetika pro I. a II. tř. šk. gymn ; 4 a 5. vyd. ve tř. I.—II.
Ťůma. Arithmetika pro III. a IV. tř. šk. gymn.; vyd. 2. ve tř. III.—IV.
Čeřábek. Základové měřictví pro nižší gymn.; 4. vyd. ve tř. I.—IV.
Šaftl., Algebra; 4. vyd. ve tř. . . . . V.—VIII.
Šandečka. Geometrie pro vyšší gymn. I. díl; 5. vyd. ve tř. V.
Šandečka. Geometrie pro vyšší gymn. II. díl; 4. vyd. ve tř. VI.
Šandečka. Geometrie pro vyšší gymn. III. díl; 4. vyd. ve tř. VI.
Šandečka. Geometrie pro vyšší gymn. IV. díl; 3. vyd. ve tř. VII.
Šandečka. Geometrie pro vyšší gymn. I.—IV. díl; 3., 4. a 5. vyd. ve tř. . . . . VIII.
Šromádko-Strnad. Sbírka úloh z algebry pro vyšší tř. šk. stř.; 5. vyd. ve tř. . . . . V.—VII.
4. a 5. vyd. ve tř. . . . . VIII.

9. Přírodopis.

Čolívka. Živočichopis pro nižší třídy škol střed.; ve tř. . . I.—II.
Čolívka. Rostlinopis pro nižší třídy škol střed.; 1. a 2. vyd. ve tř. . . . . I.—II.
Čosický Frant. Nerostopis pro nižší třídy škol střed.; 3. a 4. vyd. ve tř. . . . . III.
Šafránek-Bernard. Nerostopis pro V. třídu gymn.; 2. a 3. vyd. ve tř. . . . . V.
Čosický. Botanika; 2. vyd. ve tř. . . . . V.
Čoldřich Dr. Jan. Rukojeť zoologie pro vyšší odd. stř. škol; ve třídě . . . . . VI.

10. Fysika.

Čušta. Základy silozpytu pro nižší tř. střed. šk. pro gymn.; 3. vyd. ve tř. . . . . III.—IV.
Čeiss-Theuerer. Fysika pro vyšší třídy střed. škol. Vydání pro gymnasia; 2. vyd. ve tř. . . . . VII.—VIII.

11. Propaedeutika.

Procházka Dr. Fr. Logika pro stř. školy; ve tř. VI
Durdík. Psychologie pro školy; 3. a 4. vyd. ve tř. V

12. Jazyk francouzský.

Šubert. Učebnice a čítanka francouzská. Díl I.; 3 vyd.
Šubert. Učebnice a čítanka francouzská. Díl II.
Šubert. Učebnice a čítanka francouzská. Díl III.

13. Těsnopis.

Pražák. Česká čítanka těsnopisná pro stř. školy; 3. a 4. vyd.
Ibl. Methodická učebnice českého těsnopisu. Díl I.; 2. vyd.

VIII. Kronika ústavu.

Smutnou paměť zůstavují v mysli učitelův i mládeže studující minulé prázdniny, naplnivše srdce všech nenadále hlubokým žalem:

Její Veličenstvo Nejmilostivější císařovna a královna

Alžběta,

matka chudých, těšitelka trpících
a zarmoucených,

zavražděna zločinnou rukou anarchisty
dne 10. září 1898.

Nehynouci sláva Její památce!

Dne 11. září 1898. roznesla se městem hrozná zvěst, že Její eličenstvo, naše Nejjasnější císařovna a královna Alžběta, byla ne 10. září úkladně zavražděna; když ohromující zpráva byla zvláštním ydáním úředního listu v Brně potvrzena, vztýčen byl na budově gymnajní na znamení smutku černý prapor a potrval tam až do 19. září.

Ve čtvrtek, dne 15. září, odebrala se deputace sboru učitelské spolu s ostatními zástupci státního úřednictva a veškerého učitelst k panu c. k. okresnímu hejtmanovi s prosbou, by tlumočil city hluboké zármutku a soustrasti těchto sborů na stupních Nejvyššího trůnu n přebolestnou zkouškou a hroznou ránou, která Jeho Veličenstvo, naše Nejmilostivějšího císaře a krále, zastihla, a spolu tlumočil, že všick vysílají vroucí prosby k nebesům, by dobrotivý Bůh zachoval naše Nejmilostivějšího mocnáře a popřál Mu síly, aby i tuto krutou rá přetrpěl, maje důvěru v Nejvyššího a spoléhaje na oddanost a věrno všech národů velikého našeho mocnářství. Sbor učitelský se žactve uctil památku Jejího Veličenstva zvěčnělé císařovny slavnými zádušní službami Božími, konanými dne 19. září v chrámu Páně šířavském.

Školní rok 1898/9. počal dne 18. září vzýváním Ducha Svaté a slavnými službami Božími, jež konal s assistencí vdp. P. Kajeta Sláma, konsistorní rada a děkan v Přerově. V pondělí, dne 19. zá sloužena byla zpívaná smuteční mše sv. za slavné paměti Její Vel čenstvo, Nejjasnější císařovnu a královnu Alžbětu za účastenst celého sboru učitelského a veškerého žactva; ostatek dne bylo prázdn dle telegr. rozkazu vysokého c. k. ministerstva.

V úterý, dne 20. září, přečten a vyložen žákům disciplinár řád; dne 21. září počalo pravidelné vyučování.

Zařízení pobočky při první třídě pro šk. rok 1898/9., kam s přihlásilo 78 žáků, povoleno vynesením velesl. c. k. zemské školní rad ze dne 26. října 1898. č. 11995.; dodatečně pak schváleno vysoký vynesením c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 18. listopad 1898. č. 28458.

Přípisem sl. c. k. okresního hejtmanství ze dne 12. září 189 č. 217. oznámeno, že Jeho císařské a královské Apoštolské Veličenstv dle vynesení vys. c. k. mor. místodržitelského praesidia ze dne 8. zá 1898. č. 5444. ráčilo blahosklonně přijati nejpokornější blahopřán které učitelský sbor gymnasia ku slavnosti Nejvyšších narozenin n stupních Nejvyššího trůnu prostřednictvím pana c. k. okresního hejtman složil.

Dne 27. září 1898. za předsednictví p. t. pana c. k. zemské školního inspektora Edvarda Kučery konány byly opravné a doplňova maturitní zkoušky.

Dne 4. října 1898. ústav oslavil jmeniny Jeho císařského a krá lovského Apoštolského Veličenstva Nejjasnějšího císaře a krále Fran tiška Josefa I. slavnými službami Božími, jež skončeny byly národn hymnou rakouskou; rovněž dne 19. listopadu, v den jmenin Jejíh Veličenstva zesnulé císařovny Alžběty, vykonána přiměřená kostelní slavnost.

Dne 9. listopadu 1898. professor František Martínek zemře a dne 11. listopadu důstojně byl pochován; dne 12. listopadu obcova celý ústav slavnému „requiem“ za něj obětovanému.

Památný den padesátiletého jubilea panovnického Jeho cís. a krá Apoštolského Veličenstva Františka Josefa I. učitelským sboreu a studující mládeží důstojně byl oslaven.

Dne 30. listopadu 1898. zastupoval ředitel Jan Veselý ústa v deputaci ředitelů českých středních škol na Moravě, která přednesl

Jeho Excellenci panu c. k. místodržiteli baronu Aloisu Spens-Bodenu ıoldovací blahopřání ku padesátiletému vladařskému jubileu Jeho cís. ı král. Apoštolského Veličenstva.

Dne 2. prosince 1898. budova školní praporem barev říšských ı zemských ozdobena, večer pak od 5.—9. hod. leskla se za všeobecného ısvětlení města v plném světle, osvětlena bývši nákladem obecním.

Téhož dne o 10. hod. ráno obcovala studující mládež se sborem ıčitelským slavnostním službám Božím.

Po službách Božích shromáždilo se žactvo se sborem učitelským ' aule, kde ředitel způsobem slavnosti důstojným žákům vyložil zvláštní ýznam dne a vlády Jeho Veličenstva císaře Františka Josefa I.; vylíčiv bzvláště otcovskou péči Jeho Veličenstva o hmotné i duševní blaho šech národů říše, vyzval žáky, by vždy zachovávali nezvratnou věrnost Nejvyššímu trůnu a provolal Jeho c. a k. Apoštolskému Veličenstvu ísaři a králi Františku Josefu I. třikrát nadšeně „Sláva", co shromáž- ění s nadšením opakovalo. Po té slavnost ukončena zapěním první loky národní hymny.

Na konec odevzdal ředitel přítomným členům učitelského sboru ıbilejní medaille, sám je každému připínaje za přítomnosti žákův. —)statek dne bylo prázdno.

Dne 11. ledna 1899. navštívil ústav p. t. pan c. k. zemský školní ıspektor Edvard Kučera a byl přítomen vyučování mojžíšskému nábo- enství a zpěvu II. oddělení.

Běh I. se ukončil dne 11., druhý začal dne 15. února.

Dne 29. března celý ústav doprovodil ke hrobu svého váženého ıditele Jana Veselého a súčastnil se slavných zádušních služeb Božích ne 10. dubna ve farním chrámu Páně za něj obětovaných.

Dne 2. května navštívil ústav p. t. pan c. k. zemský školní ıspektor Jan Slavík.

Dne 14. června navštívil ústav p. t. pan c. k. zemský školní ıspektor Edvard Kučera a byl přítomen vyučování mojžíšskému nábo- enství.

Dne 21. června ústav světil svátek sv. Aloisa, patrona studu- cí mládeže, slavnými službami Božími; toho dne bylo se svolením p. pana c. k. zemského školního inspektora Jana Slavíka prázdno (jeden ı dvou dní, jež ředitelé ze své moci prázdnými povolují.)

Od 6.—8. července byly konány ústní maturitní zkoušky za ıedsednictví c. k. gymnasijního ředitele pana Edvarda Ouředníčka.

Službám Božím mimo shora uvedené, exhortám pro nižší a vyšší ımnasium odděleně a cvičením náboženským obcovali studující v neděle svátky, v den dušiček a sv. Aloisia; průvodu Božího Těla súčastnilo veškeré žactvo katolické se sborem učitelským; sv. zpověď a sv. ijímání vykonáno třikráte v roce; dne 28. června byli žáci se svými iteli přítomni smuteční mši svaté za slavné paměti J. V. císaře erdinanda Dobrotivého.

Vdp. P. Kajetán Sláma, konsistorní rada a děkan v Přerově, ı ordinariatním komisařem náboženství, vykonal inspekci předmětu hoto ve všech třídách v době od 10. června do konce školního roku.

Školní rok se ukončil dne 15. července 1899. slavnými službami ožími s Te Deum, jež konal s assistencí vdp. P. Kajetán Sláma, nsistorní rada a děkan v Přerově.

IX. O tělesném cvičení a otužování mládeže studuj

Aby se vyhovělo nařízení vys. c. k. ministerstva kultu a vy
vání ze dne 15. září 1890 čís. 19097. a ze dne 15. října 1893
18830. — intim. velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 20. listop
r. 1893 čís. 11930. — konala se dne 25. listopadu 1898 porada uč
ského sboru, jehož usnesení v tom směru učiněná, byla vzata na
domost velesl. c. k. zemskou školní radou vynesením ze dne 3. pros
r. 1898 čís. 14984. Za tím účelem jsou na ústavě tato nařízení:

1. Tělocvična v ústavě, prostranná, krytá, v zimě vytápěná, opatř
veškerým potřebným nářadím dle nejnovějšího způs
2. Dvůr prostranný, upravený vedle zahrady; na něm za
znivého počasí žáci konají prostocviky a hry a t
na nářadí dle možnosti cvičí, chráněni jsouce p
úpalu slunečnímu.
3. Koupele volné v řece na místě nedaleko města vykázaném za doz
poskytnutého slavnou městskou radou a střídavě
dozoru učitelů ve středu a v sobotu mezi 3. a 8. h
jindy mimo neděle a svátky mezi 4. a 8. hod. veče
Kromě toho vyhledáno a upraveno při potoku „Strha
příhodné místo ku vyučování v plování, jemuž se
učovalo v úterý a ve čtvrtek od 5—7 hod., v sob
od 4—6 hod. Vyučováno 75 žáků a to z I. A třídy
z I. B třídy 20, z II. tř. 17, z III. tř. 6, ze IV. tř.
ze VI. tř. 1. Plování vyučoval z ochoty učitel t
cviku Rudolf Reinhart, učitel obecné školy zdejší.
4. Koupele parní. Žáci třídy VI., VII. a VIII. navštěvovali od podzi
do jara s prof. Františkem Oščádalem nově zříz
parní lázně paní Ter. Procházkové za sníženou c
15 kr. za osobu.
5. Rejdiště slavnou obcí poskytnuté nedaleko města, výhodně
ložené, chráněné proti prachu, blízko říčných koupe
tam hrávají žáci po vyučování odpoledním za přít
nosti některého člena učitelského sboru, pokud
časí dovoluje.
6. Kluziště za přispění slavné městské rady upravené.
7. Vycházky měly předem ráz tělocvičný, avšak dbáno též příle
tostného poučování z oboru zeměpisu a dějepisu,
přírodních, archaeologie a j. Dozor měly z pravi
prof. třídní, mimo ně též jiní členové učitelského sbo

Žáci I. A a B třídy měli dne 3. června spol
nou vycházku do Penčic, vedeni jsouce svými uči
třídními, professory J. Ondráčkem a Rud. Kreutze
Vyšedše ráno o 6. hodině, dospěli přes Žeravice a
lešovice o 10. hodině do Penčic a odtud vydali se
poledne přes Čekyň zpět. Delší zastávky byly jme
vitě v lese u Nelešovic a u Penčic. Žáci pokochali
pěknou vyhlídkou na údolí řeky Moravy a Bečvy,
bavili se zpěvem a hrou v čistém vzduchu lesním a
koupali se v říčce Kokorce.

Žáci II. třídy měli dne 3. června společnou vycházku na hrad Helfštýn za vedení svého učitele třídního Jos. Kupce. Prohlídka hradu provázena předčítáním zajímavého o poučného spisu Kahligova: „Hrad Helfštýn“. Mohutným dojmem působil na žáky čarokrásný pohled s hradeb. zřícenin do dalekého údolí Bečvy. Na zpáteční cestě prohlédnuty některé památnosti města Lipníka, a k večeru vykonána zpáteční cesta drahou.

Dne 17. června podnikli všichni žáci třídy III. vedením třídního učitele Rudolfa Neuhöfra celodenní výlet. Ráno vyjeli vlakem z Přerova do Olomouce, z které za krásného počasí nastoupen pochod na sv. Kopeček. Tu prohlédli si žáci výstavný chrám, nasytili se vyhlídky po širém kraji Olomouckém, načež po krátkém odpočinku pokračovalo se v cestě až do údolí prorývající horstvo do Slezska. Půvabným úvalem tímto šlo se pak velikým obloukem přes Hluboček, Marianské údolí a Velkou Bystřici do Olomouce, odkud vlak zavezl účastníky zpět do Přerova. Žáci vykonali na tomto výletě, jsouce stále svěží, pěšky pochod přes 24 km.

Dne 3. června vykonali žáci tř. IV. za vedení svého třídního prof. Fr. Poláka celodenní výlet drahou do Uh. Hradiště a odtud pěšky na posvátný Velehrad. Tam dostalo se žákům od veledůst. správy klášterní s nevšední laskavostí a vzácnou ochotou nejen dovolení ku prohlídce všech památek velechrámu a kaple sv. Cyrilla, ale i důkladného, více než $^5/_4$ hod. trvajícího vysvětlení, začež buďtež tu vzdány díky nelíčené. — Z Velehradu nastoupena cesta na památný Buchlov, kde výletníci po náležitém odpočinku a zotavení odebrali se ku prohlídce více než $1^1/_2$ hod. trvající do komnat tohoto památného zámku, kde ochotou p. přítomného dozorce všecky místnosti, jakož i nahromaděně v nich památky historické a umělecké ukazovány a vysvětlovány byly. — Pokochavše se ještě krásnou vyhlídkou s tohoto hradu, odebrali se účastníci výletu k 6. hod. večer pěšky do Uh. Hradistě a odtud drahou zpět k domovu.

Dne 31. května podnikli žáci V. třídy vedením prof. Rud. Kreutze celodenní výlet. Jelo se drahou do Uh. Hradiště, prohlédnuto město, pak pochodem pěším na Velehrad, kde prohlédnut chrám a vykonána pobožnost. Odtud ubírali se žáci přes Barborku na hrad Buchlov k prohlídce sbírek, které ochotně byly učiněny přístupnými. Z Buchlova odebrali se přímo přes Buchlovice a Zléchov na nádraží Uhersko-Hradišťské a po dráze vrátili se do Přerova.

Dne 3. a 4. června vykonali žáci tř. VI. a VII. za vedení svých třídních, prof. J. Kabelíka a prozatím.

učitele K. Nováka, dále prof. J. Spáčila a suppl. učitele R. Neuhöfra výlet. Jelo se drahou do Brna, kde prohlédnuty památnosti hlavního města, hlavně komnaty na Špilberku; laskavostí sl. správy akciového pivovaru v Přerově bylo žákům darováno pivo v přerovské pivnici „U tří kouhotů“, p. restaurateur J. Procházka pak připravil jim velmi chutný a laciný oběd, začež buďte jim tuto vzdány srdečné díky. Odpoledním vlakem vyjelo se do Blanska, odkud za krásné pohody pěsky na Macochu a odtamtud dále do Sloupu, kam dorazilo se za soumraku. Ráno obcovali žáci v poutnickém chrámu Páně sloupském službám Božím, prohlédnuty stará i nová jeskyně sloupská a Šošůvka, načež nastoupen návrat cestou do Rájce, dále po dráze zpět do Brna a do Přerova.

Dne 10. června podnikli žáci třídy VIII. za vedení třídního prof. P. Krippnera celodenní výlet do Tovačova a Kojetína. Ráno jelo se drahou do Brodku, odtud šlo se pěšky do Tovačova. Tam laskavou ochotou ředitele měšť. školy, p. Vlad. Novotného, zjednán žákům přístup do zámku šl. z Guttmannů a to do všech komnat jeho i věže zámecké, kde pokochali se vzácnou vyhlídkou na vše strany se otvírající. Nato prohlednut u Tovačova pomník zřízený důstojníkům a vojínům rakouským, padlým tu v boji r. 1866. Odpoledne nastoupen pochod do Kojetína. Tam ochotným vedením odb. učitele měšť. škol, p. Fr. Stojana prohlednuto město a zvl. měšť. školy, jejichžto třídy a sbírky žákům ochotně ukázal sám ředitel, p. Fr. Robenek. K večeru drahou nastoupena cesta zpáteční do Přerova.

Žáci I. A tř. vykonali dne 15. a žáci I. B tř. dne 16. června vedeni jsouce prof. Jos. Spáčilem vycházky do nejbližšího okolí, na nichž částečně opakována látka ve škole probraná, částečně seznámeni žáci s novými druhy rostlin s květy pravidelnými neb jednoduchými.

Dne 20. června podnikli žáci II. tř. botanickou vycházku do blízkého lesa „Žebračky“, na níž poznali nejdůležitější druhy stromů lesních nejen lupenatých, nýbrž i jehličnatých a jejich všestranné upotřebení. Vycházka konána za vedení prof. Jos. Spáčila.

Kázeň při vycházkách, ač se mládeži, jak jen se stanoviska vychovatelského možno, dopřávalo volnosti, byla řádná; nikdo ze žáků nedopustil se přestupku disciplinárního. Úrazů při vycházkách a porušení zdraví vycházkami nebylo.

8. Hry. Her súčastnily se veškeré třídy ústavu. Hrávalo se mezi 6—8. hodinou večerní 3krát v témdni dílem na rejdišti vykázaném slavnou obcí, dílem na dvoře gymn. Hry nacvičeny učiteli tělocviku, dozor pak měli střídavě někteří členové sboru.

Hrály se tyto hry: Kočka a myš, na babu, přebíhačka, Jakub a pán, zvon, na třetího, na medvěda, na lišku na přehazovačku, zajímačka vyzývavá, válečná. Pešek vně a uvnitř kruhu, s obroučkami. — Lanové hry: přeskakování kroužícího se švihadla, podbíhání, skákání na místě, též o jedné noze, přetahování. — Hry míčové: na hadače, přestřelky, na střelce, střelení do pohyblivého terče, na krále, na rady, míč v důlcích. — Hry míčem a pálkou: pastorek, velký pasák. — Hry míčem poháněným: honiti svinku do města, do kruhu. — Hry míčem velkým plným: honěná za míčem v kruhu, podávaná v ulici, v kole, závodění dvou míčů, kopaná z kruhu a do kruhu, na hradního, vrhaná. — Hry míčem velkým dutým: tlučená v kole, tlučená přes mez, odbíjená, kopaná jednoduchá.

Lawn-tennis, kroket, hra míčí opeřenými.

Přehledná tabulka o tělesném tužení se mládeže.

Třída		Počet žáků koncem školního roku	Do tělocviku ohodili	Koupali se v teplé lázni	Koupali se v řece	Z těch uměli plovati	Klouzat se chodili	Na rejdišti hráli	Učili se plovati
I. a.		39	25	29	25	16	6	28	19
I. b.		37	27	31	31	11	10	27	20
II.		44	17	36	39	35	16	19	17
III.		45	10	38	36	5	16	12	6
IV.		58	24	25	55	48	28	15	12
V.		27	7	12	25	22	15	15	—
VI.		27	4	24	27	23	10	17	1
VII.		20	3	12	18	17	6	—	—
VIII.		22	8	18	20	20	5	—	—
Úhrnem	absol.	319	125	225	276	197	112	133	75
	proc.	100%	39·74	70·53	86·52	61·76	35·1	41 69	23·51

Inventář nářadí ku hrám vykazoval koncem školního roku 1897/8. čísel o 185 kusech. Letos přibylo jenom několik míčů, obroučků chytaček, které pod zvláštním číslem do inventáře neuvedeny, tak inventář obsahuje opět 35 čísel.

Na zakoupení nářadí pro hry vybíralo se od majetných žáků po kr. dle schválení velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 17. října 1898 čís. 12379.

K tomu účelu odvedla: třída I. A	— od	27	žáků	—	8	zl. 10	kr
I. B	— „	29	„	—	8	„ 70	„
II.	— „	20	„	—	6	„ —	„
III.	— „	34	„	—	10	„ 20	„
IV.	— „	38	„	—	11	„ 40	„
V.	— „	24	„	—	7	„ 20	„
VI.	— „	19	„	—	5	„ 70	„
VII.	— „	16	„	—	4	„ 80	„
VIII.	— „	15	„	—	5	„ 50	„
				úhrnem . .	66	zl. 60	kr
K tomu přebytek z roku školního 1897/8.					—	„ 81	„
				úhrnem . .	67	„ 41	„
Vydáno: na remunerace za školní rok 1897/8. . . .					40	zl. —	kr
na nájem za místo cvičení v plování žáků					15	„ —	„
za úpravu raket					—	„ 90	„
na hračky					2	„ 46	„
				úhrnem . .	58	zl. 36	kr
Zbývá pro školní rok 1899—1900.					9	„ 05	„
				úhrnem . .	67	zl. 41	kr

X. Důležitější vynesení vysokých c. k. úřadů ve šk. roce 1898/9.

1. Dle vynesení vys. c. k. ministerstva vnitra ze dne 6. září 1898 č. 7407.

Nejvyšším nařízením konati se mají obvyklým způsobem pobožnosti na památku úmrtí Jejího Veličenstva zvěčnělé císařovny a královny Alžběty dne 9. a 10. září každého roku, má tudíž od nynějška počínajíc 9. září (předvečer dne úmrtního) býti novým dvorním dnem noremním.

Zároveň bylo Nejvyšším rozhodnutím ustanoveno, že pobožnosti na památku úmrtí Jejího Veličenstva zvěčnělé císařovny a královny Marie Anny mají přestati, čímž odpadá budoucně též dotyčný dvorní den noremní t. j. 3. květen.

2. Vynesení vys. c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 6. října 1898. čís. 2310., jímž se nařizuje, aby dne 19. listopadu jakožto v den jmenin Jejího Veličenstva zesnulé císařovny Alžběty jako dosud i budoucně na všech školách a ústavech zůstalo prázdno a aby se tento den konala přiměřená kostelní slavnost; naproti tomu dlužno však budoucně od obvyklých snad zvláštních školních slavností v uvedený den upustiti.

3. Vynesení velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 18. listopadu 1898. čís. 14263., jímž oznámeno, že se Jeho Excellenci panu ministru kultu a vyučování vynesením ze dne 9. listopadu 1898. čís. 24288. vidělo svěřiti funkci odborného dozorce pro vyučování kreslení na školách středních a ústavech ku vzdělávání učitelův a učitelek na Moravě a ve Slezsku na dobu dalších tří let, t. j. do konce školního

roku 1900.—1901. professoru na státní realce ve Štyrském Hradci, Antonínu Andělovi.

4. Vynesení velesl. c. k. zemské školní rady ze dne 20. února 1899. čís. 11581., jímž žákům zakázáno jest pod trestem nejpřísnějším súčastňovati se jakýchkoli politických demonstrací, schůzí, jakož i nositi odznaky a t. p.

5. Vynesení vys. c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 21. února 1899. čís. 344., jímž má za zjednodušením písemního styku úřadům a ústavů c. k. ministerstvu kultu a vyučování podřízených jak vespolek tak i s civilními úřady jiných správních odvětví býti zcela upuštěno od titulatur.

6. Vynesení vys. c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 1. května 1899. čís. 12014., kterým se upravuje vedení katalogů třídních. S rodiči neb jich zástupci na jich žádost neb úředně sděliti lze celkový soud o prospěchu žákově na konci každého konferečního období; rovněž sděliti lze výsledky jednotlivých zkoušek písemných, v předmětech, ve kterých se písemné zkoušky konají.

Za to však na dále se nedovoluje, aby obecenstvo nahlíželo do třídních katalogů, třeba to dříve dovoleno bylo.

XI. Podpory udělené chudým žákům.

Stravu a peněžitou podporu udíleli tito p. t. pp. dobrodincové; p. K. Altmann, c. k. professor, 1 oběd týdně, p. A. Bartoník, c. k. pošt. kontrolor, 7 snídaní, 2 ob. týd., p. F. Berka, nadučitel m. sl., 2 sníd., 2 ob. týd., 1 zl. měs., p. M. Braun, obchodník, 1 ob. týd., p. V. Čížek, sládek, 1 ob. týd., pí. M. Dočkalová, měšťanka, 1 zl. 50 kr. měs., pí. M. Dolečková, soukromnice, 1 ob. týd., p. MUDr. Em. Dostál, 1 ob. týd., p. J. Firbas, 1 ob. týd., p. H. Frühbauer, obchodník, 1 zl. měs., p. J. Ginter, stavitel, 25 zl. jako mikulášský dar chudým žákům, p. M. Haas, kavárník, 2. ob. týd., p. V. Häusler, rukavičkář, 3 ob., 2 več. týd., p. J. Hlávka, účet. přírući, 1 zl. měs., p. A. Horáček, průvodce vlaků, 1 ob. týd., p. J. Horáček, průvodce vlaků, 1 ob. týd., p. V. Horáček, nádraž. úředník, 1 ob. týd., p. V. Chválek, stolař, 1 ob. týd., pí. M. Kahovcová, choť professora, 50 kr. měs., p. R. Kasalovský, hostinský, 2 ob. týd., p. J. Keyř, c. k. vrchní finanční kontrol., 3 ob. týd., p. Em. Klein, hostinský, 1 ob. týd., p. M. Kočíž, malíř, 1 ob. týd., p. B. Körner, obchodník, 2 ob. týd., 50 kr. měs., pí. Kat. Krátká, majitelka továrny, 6 zl. 50 kr. měs., 1 žák 10 zl., p. F. Krátký, řezník, 2 ob. týd., p. P. Krippner, c. k. professor, 1 ob. týd., p. H. Krch, c. k. professor, 3 ob. týd., p. V. Kunert, obchodník, 1 ob. týd., p. F. Kunovský, c. k. soudní rada, 2 ob. týd., p. J. Langer, strojvodič, 3 snid. týd., pí. M. Lipčíková, choť advokáta, 3 ob. týd., 50 kr. měs., p. M. Mandl, obchodník, 1 ob., 1 več. týd., p. Fr. Matouš, lékárník, 2 ob. týd., pí. M. Matoušová, choť advokáta, 3 ob. týd., p. K. Mayr, obchodník, 1 ob. týd., pí. M. Méslová, majitelka továrny, 1 ob., 1 več. týd., p. K. Mezírka, nádraž. úředník, 2 ob. týd., p. A. Mrkva, stavitel, 1 zl. měs., p. Al. Mühlberger, měšťan, 1 ob. týd., p. V. Nový, hotelier, 1 ob. týd., p. Fr. Oščádal, c. k. professor, 1 ob. týd., sl. obchodní gremium v Přerově 10 zl., p. Fr. Opletal, účetní

akc. pivov., 1 zl. měs., p. J. Parkus, obchodník, 2 ob., 7 svač., 1 več. týd., p. J. Pisch, řezník, 1 ob. týd., p. Fr. Plaček, dělník, 7 svač., 7 več. týd. p. B. Pollak, obchodník, 2 ob. týd., p. L. Pollak, obchodník, 3 ob. týd. p. H. Psota, lékárník, 2 več. týd., pí. F. Purcnerová, choť c. k. ad junkta, 1 ob. týd., p. J. Pyskatý, nádraž. zříz., 1 ob. týd., p. J. Richter c. k. vrchní pošt. kontrolor, 7 sníd. týd., pí. A. Roháčková, choť advokáta, 1 ob. týd., dp. P. A. Rychlý, kaplan, 1 ob. týd., 2 zl. měs. p. MUDr. Fr. Skácelík, 1 ob. týd., vysokorodá pí. M. ze Skenů, 4 ob týd., vysokorodý p. A. ze Skenů, velkostatkář, 10 zl. měs., vdp. P. K. Sláma, děkan a kons. rada, 10 zl., p. MUDr. J. Stránský, c. k. štábní lékař m. sl. 5 zl., p. Fr. Svozil, účetní akc. pivov., 1 zl. měs., p. Jos. Silhavý, sládek, 4 zl. 50 kr. měs., p. J. Sponar, nádraž. dohlížitel, 1 ob. týd., p. Dr. J. Tauber, rabín, 1 ob. a 1 več. týd., p. J. Tauber, obchodník, 1 ob., 1 več. týd., pí. M. Tichá, choť MUDr., 50 kr. měs., p. Fr. Tománek, c. k. okres. zvěrolékař, 7 sníd. týd., p. Fr. Tropper, starosta, 2 rohlíky denně a 1 zl. měs., p. Jar. Vítěz, uzenář, 5 več. týd., pí. Veissová, hostinská, 3 ob. týd., p. A. Volf, obchodník, 1 snid. týd., p. Fr. Vrba, měst. důchodní, 1 zl. měs., p. MUDr. C. Zbořil, zubní lékař, 3 ob. týd., p. MUDr. A. Ziffer, 1 ob., 1 več. týd., vdp. P. J. Žváček, farář v Domaželicích, 20 zl.

Pp. med. doktoři R. Cantor, E. Dostál, K. Kutálek, L. Riedl, Fr. Skácelík, D. Tichý, C. Zbořil a A. Ziffer poskytovali chudým žákům bezplatně lékařské pomoci, pp. lékárníci H. Psota a Fr. Matouš bezplatně léky. Kromě toho přispěli ještě někteří dobrodinci žákům penězi ku koupi knih a pod.

O podporu chudých žáků pečoval dále spolek na podporu chudých studujících, který rozdělil letos ze své pokladny 451 zl. podpory. Podkladem rozdělování byly návrhy sboru professorského. Správu spolku vedli pp. MUDr. Fr. Skácelík jako starosta, L. Pospíšil, c. k. notář, jako náměstek, J. Veselý, c. k. ředitel, jako pokladník, (po jehož smrti převzal zatím správu pokladny p. Dr. Skácelík), J. Kabelík, c. k. professor, jako jednatel, a členové výboru V. Čížek, sládek, J. Ginter, stavitel, H. Krch, c. k. professor, J. Martilík, ředitel I. obec. školy a Fr. Slaměník, ředitel škol měšťan.

Spolek má t. r. 13 členů zakládajících (s příspěvkem 10 zl. pro vždy a 2 zl. 40 kr. ročně) a 55 přispívajících (2 zl. 40 kr. ročně.)

a) Zakládající: pp. H. Frühbauer, obchodník, J. Hrubý, mlynář v Prosenicích, J. Keyř, c. k. vrchní kontrolor, pí. K. Krátká, majitelka továrny, JUDr. A. Lipčík, advokát, Fr. Matouš, lékárník. J. Matzenauer, měst. rada, L. Pospíšil, c. k. notář, MUDr. Fr. Skácelík, lékař, P. K. Sláma, kons. rada a děkan, Fr. Slaměník, ředitel měšťan. škol, L. Silhavý, sládek, Fr. Vyplel, měst. rada.

b) Přispívající: p. L. Abendroth, c. k. okresní hejtman, J. Adamec, ředitel střed. hospodář. školy, K. Altmann, c. k. professor, V. Čížek, sládek, Fr. Dvořák, účetní, J. Ginter, stavitel, JUDr. M. Havránek, P. Hon, c. k. berní nadinspektor, Fr. Jurečka, rolník v Předmostí, pí. Fr. Hrbáčková, měšťanka, R. Kokora, továrník, J. Kabelík, c. k. professor, F. Konečný a J. Kratochvil, obchodníci, R. Kreutz, c. k. professor, P. Krippner, c. k. professsor, Hynek Krch, c. k. professor, JUDr. K. Kryška, advokát, F. Kunovský, c. k. soudní rada, F. Lazar,

tavitel, J. Martilík, ředitel I. šk. obec., A. Michálek, knihkupec, K. finařík, c. k. professor v Olomouci, Fr. Mohapl, měšťan, J. Mühlstein, . k. soudní sekretář, R. Neuhöfer, c. k. professor, J. Neoral, professor, . Novák, c. k. professor, Fr. Olšaník, rolník ve Vlkoši, J. Ondráček, . k. professor, Fl. Oščádal, mag. pharm, Fr. Oščádal, c. k. professor, . F. Pazdírek, spiritual, J. Pískač, c. k. professor, F. Polák, c. k. rofessor, P. M. Pryč, kaplan, JUDr. Roháček, advokát, P. A. Rychlý, aplan, J. Spáčil, c. k. professor, MUDr. J. Stránský, c. k. štábní ékař m. sl., V. Šálek, učitel měšť. škol, J. Šikola, c. k. professor a kres. škol. insp., J. Šrámek, c. k. nadinženýr, MUDr. D. Tichý, lékař, r. Tropper, starosta, J. Vavrouch, ochodník, K. Vlasák, c. k. ředitel trojnické školy, Fr. Vrba, důchodní, P. J. Vrtek, kaplan, H. I. Zapletal, bchodník, MUDr. C. Zbořil, MUDr. A. Ziffer, sl. akciová knihtiskárna.

Do podporovacího fondu přispěli při zápise:

t. pan	Frant. Bayer, odbor. uč. měšť. šk. v Přerově	2	zl.	80 kr.
„	Cyrill Široký, účetní v Přerově	1	„	40 „
„	Max Mayer, obchodník v Přerově	1	„	40 „
„	Mořic Mandl, zástupce cukrovaru v Přerově .	1	„	80 „
„	Josef Parkus, obchodní cestující v Přerově .	1	„	40 „
„	Antonín Kobliha, účetní v Přerově	1	„	40 „
„	Dr. Karel Roháček, soukromník v Přerově .	2	„	— „
„	Josef Šikola, c. k. okres. škol. inspekt. v Přerově	1	„	50 „
„	Dr. August Lipčík, advokát v Přerově . . .	3	„	50 „
„	Karel Altmann, c. k. professor v Přerově . .	1	„	50 „
„	Šalomoun Donath, účetní v Přerově	1	„	50 „
„	František Lazar, stavitel v Přerově	3	„	50 „
„	Vincenc Šmatlák, rolník v Bezměrově . . .	3	„	„
„	Isidor Horner, obchodník v Přerově	5	„	50 „
„	Adolf Horner, zasílatel v Přerově	1	„	50 „
„	František Vrba, městský důchodní v Přerově	1	„	50 „
„	Richard Michálek, obchodník v Dědicích . .	1	„	50 „
„	Dr. Jakub Tauber, rabín v Přerově	2	„	— „
„	P. Antonín Rychlý, kooperator v Přerově . .	—	„	50 „
„	Bernard Körner, obchodník v Přerově . . .	3	„	— „
„	Ignác Keyř, c. k. vrchní kontrolor v Přerově	3	„	50 „
	úhrnem . . .	45	zl.	70 kr.

Během školního roku darovali:

avná	obec města Přerova	100	zl.	— kr.
t. pan	P. František Urbášek, farář v Citově . . .	1	„	— „
„	Max Mayer, obchodník v Přerově	5	„	— „
„	Josef Parkus, obchodní cestující v Přerově .	5	„	— „
„	MUDr. Richard Cantor, lékař v Přerově . .	10	„	— „
„	Antonín Michálek, knihkupec v Přerově . .	12	„	— „
	Žáci III. třídy zbytek po zakoupení věnce při pohřbu prof. Frant. Martínka	3	„	— „
	úhrnem . . .	136	zl.	— kr.

*) Z podpůrného fondu gymnasia obdrželi příspěvek knihy někteří žáci ze tř. I.—VII. v celkovém obnose 129 zl. 80 kr.

*) Zvláštní podpůrné knihovny pro chudé žáky není.

Přehled účtů podpůrného fondu gymnasia za šk. r. 1898/9.

α) *Fond vydajný.*

Příjem.

1.	Hotovost ze školního roku 1897/8. . . . . (Přebytek v programu škol. roku 1897/8. obnosem 37 zl. 04 kr. uvedený jest zmenšiti o 5 zl., jež obdržel dne 15. července 1898. odměnou dozorce při koupání.)	32 zl.	04 kr.
2.	Při zápise přijato	45 „	70 „
3.	Během roku přijato	136 „	— „
	úhrnem . . .	213 zl.	74 kr.

Vydání.

1.	Na knihy poskytnuto	129 zl.	80 kr.
2.	Dozorci při koupání 15. července 1899.	5 „	— „
	úhrnem . . .	134 zl.	80 kr.
3.	Zbývá pro školní rok 1899.—1900.	78 „	94 „
	úhrnem . . .	213 zl.	74 kr.

β) *Fond nevydajný.*

1.	Přijato ze školního roku 1897/8.	595 zl.	51 kr.
2.	Úroky od 1./7.—31./12. 1898. a od 18./5.—30./6. 1899.	15 „	82 „
	úhrnem . . .	611 zl.	33 kr.

Hotovost se ukládá v městské spořitelně v Přerově.

Ředitelství vzdává všem p. t. velectěným podporovatelů chudých studujících za všechna tato dobrodiní díky nejvřelej a prosí co nejuctivěji za další podpory.

XII. Stipendisté.

Rudolf Ludík, žák II. tř., má stipendium Stružkovo roč. 30 z udělené od vys. c. k. mor. místodržitelství ze dne 14. července 189 čís. 26238.

2. František Kamelander, žák III. tř., má stipendium Stružko roč. 30 zl., udělené od vys. c. k. mor. místodržitelství vynesením dne 25. ledna 1899. čís. 1469.

3. Josef Beneš, žák VIII. tř., má stipendium J. K. Czikan-o čís. 2. roč. 70 zl., rozhodnutím Její Jasnosti Alexandriny kněžn z Dietrichsteinu ze dne 9. června 1894. čís. 404.

4. Josef Špaček, žák VIII. tř., má stipendium Stružkovo roč. 30 z udělené od vys. c. k. mor. místodržitelství vynesením ze dne 11. úno 1895. čís. 659.

Seznam žáků na konci školního roku 1898—9.

Hvězdičkou poznamenaní žáci nabyli vysvědčení I. třídy s vyznamenáním

Třída I. A.

1. *Adamec Otto z Lipníka (Přerov).
2. Andrášek Jan z Přerova.
3. *Bayer Frant. z Přerova.
4. Benda František ze Slušovic (Přerov).
5. Bořil Bohumil z Daskabatu.
6. Brázda Frant. z Lověšic.
7. Březina Frant. z Přerova.
8. Cagášek Robert z Lišné.
9. Cemper Robert z Přerova.
10. Čech Jan ze Vsetína (Přerov).
11. Černoch Josef z Rožnova.
12. Dostál Jan z Tučína.
13. *Drábek Ignác z Nelešovic.
14. Drcmánek Rudolf z Kostelce.
15. Dreiseitl Frant. z Nelešovic.
16. Dvořák Methoděj z Brodku (Prosenice).
17. Eliáš Rudolf z Přerova.
18. Fryček Adolf z Lejsek.
19. Havlíček Ladislav z Beňova.
20. Horáček Josef z Přerova.
21. Horák Antonín z Přerova.
22. *Horák Cyrill z Bochoře.
23. Hrbáček Al. z Nové Plavnice u Belovaru v Chorvatsku (Přerov).
24. Chudoba Boh. z Dědic (Přerov).
25. Inderka Ladislav z Břeclavy (Přerov).
26. Jemelík Frant. z Přerova.
27. Kadlec Otto z Olomouce (Přerov).
28. Kavka Josef z Dluhonic.
29. Klabazňa Frant. z Přerova.
30. Kobliha Ant. z Karlína v Čechách (Přerov).
31. Konopčík Ant. ze Žeravic.
32. Křižan Rudolf z Vlkoše.
33. Kuča Stanislav z Hradčan.
34. Ležatka Jan z Brodku.
35. Lipner Jan z Veselíčka.
36. Lukáš Augustin z Přerova (Lověšice).
37. Mackovík Frant. z Lukové.
38. Martilík Vratislav z Přerova.
39. Mikeš Oldřich z Prus.

Třída I. B.

1. Donath Otto z Přerova.
2. Mandl Jindřich z Přerova.
3. *Mayer Pavel z Přerova.
4. *Mikula Meth. z Domaželic.
5. Motka Leopold z Přerova.
6. Mrkva Albert z Přerova.
7. Neoral Václav z Přerova.
8. Netopil Ant. z Bochoře.
9. Novák Rudolf z Milenova (Jindřichov).
10. Parkus Otto z Přerova.
11. Perdula Jin. z Kelče (Brodek).
12. Plaček Arnošt z Přerova.
13. Pluhař Josef z Bochoře.
14. Procházka Rudolf ze Šternberka (Přerov).

15. Přikryl Kamil ze Šternberka (Přerov).
16. Pumperla Oldřich z Prus (Bochoř).
17. Puschner Josef z Přerova.
18. *Roháček Vratislav z Přerova.
19. Rychlý Jar. ze Starých Mokrolazců ve Slezsku.
20. Sedláček Method z Duban (Přerov).
21. *Slovák Havel z Dřevohostic.
22. *Slovák Method z Dřevohostic.
23. *Soušek Josef z Roketnice.
24. Steiner Siegf z Úsova (Přerov).
25. Stoll Jan z Přerova.
26. Široký Cyrill z Přerova.
27. Šmahel Karel z Adamova (Přerov).
28. Tolar Fr. z Husovic (Přerov
29. Tománek Oskar z Kroměří (Přerov).
30. Tříska Jin. z Brtnice (Přerov
31. Vašica Edvard z Chropině.
32. Veselý Bohumír z Kojetína (Raclavice).
33. Vinkler Frant. z Klokočí.
34. Vyplel Vavřinec z Přerova
35. Záběhlický Frant. ze Šišn (Přerov).
36. *Zapletal Jan z Oseka.
37. *Zlámal Jakub z Roketnice.

Třída II.

1. Bayer Method z Kokor.
2. *Bubeník Stanislav z Velkých Prosenic.
3. Buberla Raimund z Přerova.
4. *Doležel Fr. z Hor. Moštěnice.
5. Frgal Ignác z Přerova.
6. Garlík Methoděj z Přerova.
7. Halma Vlad. z Dřevohostic.
8. *Häusler Václav z Přerova.
9. Hübner Josef z Přerova.
10. Chválek Otmar z Přerova.
11. Inderka Richard z Přerova.
12. *Janiš Ferd. z Henčlova.
13. Jaroš Frant. z Čech.
14. Jůrka Josef z Přerova.
15. Keller Marcelín z Přerova.
16. Kotek Ferd. z Kojetína.
17. Kučerka Methoděj z Tučína.
18. Levý Marian z Podgórze v Hal. (Přerov).
19. Ludík Josef z Brodku.
20. Ludík Rudolf z Přerova.
21. Mrtvý Rudolf z Troubek.
22. Mucha Alois z Předmostí.
23. Neoral Bohuslav z Přerova
24. Nevrkla Rudolf z Přerova.
25. Novák Alois z Vinar.
26. Parkus Ervín z Přerova.
27. Pecha Josef z Radkov.
28. Petr Frant. z Domaželic.
29. Rajndl Ferd. z Horní Vsi (Přerov).
30. Rund Slavomil z Olomouce (Kyjov).
31. Řehulka Jaroslav z Oseka.
32. Říhošek Jan z Chropině.
33. Seidl Jaroslav z Chropině.
34. Skála Methoděj z Hradčan.
35. *Slaměník Amos z Přerova.
36. Smítal J. z Ospilova (Přerov
37. Smola Rudolf z Přerova.
38. Sikola Ladislav z Přerova.
39. *Tschiassný Max z Přerova.
40. Uhlíř Aug. ze Staré Vsi.
41. Zámečník Josef ze Všetul.
42. *Zaoral Vilém ze Staré Vsi.
43. Zapletal Josef z Brodku.
44. *Zlámal Antonín z Radvani

Třída III.

1. Adamec Richard z Lipníka (Přerov).
2. *Ambrozek Rudolf z Přerova.
3. Cagaš František z Čech.
4. Dokoupil František z Popovic.
5. *Dokoupil Josef z Popovic.
6. *Doležel František z Lišné.
7. Dytrych Tomáš z Brodku.
8. Gayer Jan z Přerova.
9. Hein Rudolf z Přerova.

10. Hobl Vladimír z Březolup.
11. Chmelař František z Beňova.
12. Janal František z Lechotic.
13. Jančík Josef z Lhoty Radkov.
14. Janda František z Beňova.
15. Janda Method z Raclavic.
16. Kamelander Frant. z Přerova.
17. Kolář Vladimír z Tovačova.
18. Kolda Josef z Kozlovic.
19. *Konečný Frant. z Horní Vsi.
20. König Gustav z Vídně (Přerov).
21. Kořínek Jan z Přerova.
22. *Kozelka Ludvík ze Zákřova.
23. *Kubiš Fabian z Nahošovic.
24. Letfus Josef z Přerova.
25. *Lipčík Aug. z Olom. (Přerov).
26. Lukáš Jan z Přerova (Loveščice).
27. Machala Adolf z Předmostí.
28. Machula Frant. ze Staré Vsi.
29. Malý Rudolf z Přerova.
30. Mazáč Jindřich z Přerova.
31. Mikyska František z Kojetína (Přerov).
32. Nedoma Julius z Grymova.
33. Nedvěd Josef z Kojetína.
34. Netopil Rafael z Troubek (Brodek).
35. Pavlík Bohumil z Dřevohostic.
36. Pleva Jan z Přerova.
37. Skála Josef z Hradčan.
38. Sobol Jaroslav z Přerova.
39. Široký František z Přerova.
40. Spičák Jindřich z Přerova (Vyškov).
41. Talla Antonín z Prus.
42. Tománek Richard z Kroměříže (Přerov).
43. * Trunkát Rudolf ze Slušovic.
44. Vrána Alois z Nelešovic.
45. Zlámal Antonín z Vel. Lazník (Přerov).

Třída IV.

1. *Altmann Jan z Přerova.
2. *Bekárek Bohumil z Drahotouš.
3. Beneš Jaroslav z Přerova.
4. *Bezděk Arnošt z Předmostí.
5. Crhonek Jindřich z Drahan.
6. Černošek Vladimír z Přerova.
7. Dlouhý Eugen ze Sušic.
8. Dočkal František z Kozlovic (Přerov).
9. * Doležel Valentin z Kokor.
10. *Donath Alfred z Přerova.
11. Drábek Vilém z Nelešovic.
12. Grünwald Isidor z Belovaru v Chorvátsku (Přerov).
13. *Horner Ervín z Přerova.
14. Horner Viktor z Přerova.
15. Chválek Hynek z Přerova.
16. Chválek Stanislav z Přerova.
17. Inderka Jan z Břeclavy (Přerov).
18. Jemelka Alois z Tučína.
19. Koch Berthold z Přerova.
20. Koza František ze Želatovic (Přerov).
21. Kroutil Josef z Lýsek.
22. Kryštof František z Přerova.
23. Kubíček Alois z Rakodav (Přerov).
24. Kühn Jindřich z Přerova.
25. Lazar Miloslav z Přerova.
26. Ludvík Vilém z Přerova.
27. Mackovík Jan ze Slušovic.
28. Machala Antonín z Lýsek.
29. Martilík Vladimír z Přerova.
30. Maťa Methoděj z Oseka.
31. *Mayer Bedřich z Přerova.
32. Mrázek Jan z H. Moštěnice.
33. Novák Rudolf z Čech (Přerov).
34. *Obrtel Leopold z Henčlova.
35. *Ondráček Vladimír z Chlumu v Čechách.
36. Pluhař Josef z Kojetína.
37. Pospíšil Bedřich z Předmostí.
38. Přikryl František z Velkých Penčic.
39. Ptáček Jindřich z Dluhonic.
40. Ratiborský Leop. z Přerova.
41. Rédl Ludvík z Březolup.
42. Rübenstein Arnold z Přerova.
43. *Slaměník Cyrill z Přerova.
44. Snídal Jaroslav z Mořic (Předmostí).
45. Široký Rudolf z Přerova.
46. Šmatlák Frant. z Bězměrova.
47. Španhel Jiljí z Dědic.
48. Štěpka Miloš z Přerova.

49. Šustek Josef z Petřkovic (Přerov).
50. *Svrček Jindřich z Přerova.
51. Tolar Jan z Brna (Přerov).
52. Tomčík František z Lišné.
53. *Trunkát Alois ze Slušovic.
54. Vlasák Florian z Řikovic.
55. *Zedek Jan z Řikovic.
56. Zemánek Alexander z Val Meziříčí.
57. Zielinski Stanisl. z Prusinek.
58. Zlámal František z Přerova.

Třída V.

1. *Bartošek Ferd. z Rychlova.
2. Donát Oskar z Újezda.
3. Eliáš Filip z Lipníka (Přerov).
4. Gleich Alfred z Přerova.
5. Horák Josef z Bochoře.
6. Horner Felix z Přerova.
7. *Horner Oskar z Přerova.
8. Janák Otto z Lýsek.
9. Kabela Richard z Přerova.
10. Kubáč Josef z Kozlovic.
11. *Kyjovský Vojtěch z Přerova.
12. Pala Josef z Horních Něčic.
13. *Polák Vladimír z Přerova.
14. Pospíšil Artur z Loveščic.
15. Přikryl Eugen ze Šternberka (Přerov).
16. Rychlý Al. z Holic (Bolelouc).
17. Schenk Rudolf z Přerova.
18. Slovák Josef z Oseka.
19. Steinmayer Karel z Přerova.
20. Stojan František z Beňova.
21. *Vrána Josef z Henčlova.
22. Vrána Ludvík z Tovačova.
23. Vrba Vojtěch z Přerova.
24. Weiss Arnošt z Přerova.
25. Zapletal Jaroslav z Penčic.
26. Žák Bedřich z Dědic.
27. Žižka Raimund z Přerova.

Třída VI.

1. Bočan Karel z Podhoří.
2. Burjanek Vladivoj z Přerova (Slavkov).
3. Hájek František z Přerova.
4. Janda Vladimír z Raclavic (Nezamyslice).
5. *Kocián Alois z Oprostovic.
6. Kratochvil Richard z Přerova.
7. *Krippner Pavel z Přerova.
8. Lasovský Josef z Topolan.
9. Lesák Vojtěch z Týna (Přerov).
10. Malant Josef z Blazic.
11. Mazáč Oldřich z Beňova (Přerov).
12. Michálek Richard z Dědic.
13. Mika Vincenc ze Šišmy.
14. Nesvadba Alois z Krčmaně.
15. *Nesvadba František z Lišné.
16. Odstrčil Bohumil ze Sobíšek (Přerov).
17. *Petřík Josef z Podolí.
18. Pospíšil Bedřich z Přerova.
19. Procházka Jan z Chropině.
20. Reich Alfred z Přerova.
21. Reinert Leopold z Chropině (Vídeň).
22. *Školoud Hubert z Domaželic.
23. Šponar Rudolf z Trzebinie v Haliči (Přerov).
24. Šumšal Josef ze Sobèchleb.
26. *Tauber Bruno z Mostu v Čechách (Přerov).
27. *Tománek Emil z Kroměříže (Přerov).

Třída VII.

1. *Beláček František z Oujezda u Přerova (Přerov).
2. *Furcht Ludvík ze Želatovic (Přerov).
3. Hirsch Lev z Přerova.
4. *Jemelka František z Tučína.
5. Körner Ignác z Přerova.
6. Ledvina František z Horní Moštěnice (Vežky).
7. Moš Josef z Přerova.

8. Možíš František z Bochoře.
9. Obrtel Antonín z Henčlova.
10. *Oščádal František z Přerova.
11. Psota Osvald z Přerova.
12. * Ryšánek Osvald z Oseka.
13. Sroslík Alois z Čech u Prostějova (Přerov).
14. Šimek L. z Olomouce (Přerov).
15. *Vaculík Innocenc ze Šišmy.
16. *Vítěz Cyrill z Přerova.
17. *Weber Jaroslav z Přerova.
18. Zlámal Oldřich z Kokor.
19. *Žák Jan z Dolní Vsi u Fryštáku.
20. *Žíla Jan z Přerova.

Třída VIII.

1. Beneš Frant. z Lipníka.
2. Beneš Josef z Nov. Dvora.
3. Čech Karel z Dřevohostic.
4. Davídek Stan. z Velkých Prosenic.
5. Dokoupil Frant. z Předmostí.
6. Dušek Jan z Přerova.
7. Grégr Emanuel z Hrobic.
8. Horáček Frant. z Přerova.
9. Horák Frant. z Vlkoše.
10. Chmelař Josef z Beňova.
11. Jaroš Ladislav z Čech (Lhotsko).
12. Keyř Vikt. z Vrbátek (Přerov).
13. Mádr Karel z Majetína.
14. Petřík Sylvestr z Beňova (Přerov).
15. *Polák Jaroslav z Přerova.
16. *Potměšil Frant. z Mnichova Hradiště v Čechách.
17. Skácelík Arnošt z Přerova.
18. *Střelec Frant. z Dřevohostic.
19. Špaček Josef z Přerova.
20. *Šverdík Oskar z Přerova.
21. Zamazal Antonín z Čekyně.
22. Zapletal Jindřich z Brodku.

XIII. Statistika žáků koncem roku.

	Třída									Celkem
	I.		II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	
	A	B								
I. Počet.										
Koncem šk. r. 1897/8	56		52	60	43	34	23	23	10	301
Počátkem šk. r. 1898/9.	39	39	49	47	58	27	28	21	23	331
Během roku přistoupili	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mezi těmi bylo:										
odjinud přišlých postouplých	36	35	—	1	3	—	1	1	—	77
„ „ opakujících	—	—	1	2	—	—	—	—	—	3
ze soukromého studia	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Posavádních žáků tohoto ústavu bylo:										
postupujících	—	—	43	39	51	25	25	19	23	225
opakujících	3	4	5	4	4	2	2	1	—	25
během roku odešlo	—	2	5	2	—	—	1	1	1	12
Počet žáků koncem r. 1898/9.	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319
Mezi těmi bylo:										
veřejných	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319
privatistů	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2. Vlast a rodiště.										
Přerov	11	14	17	14	22	11	7	8	6	110
Morava mimo Přerov	26	22	26	30	34	16	18	12	15	199
Slezsko	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Čechy	1	—	—	—	1	—	1	—	1	4
Dolní Rakousy	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Chorvatsko	1	—	—	—	1	—	—	—	—	2
Halič	—	—	1	—	—	—	1	—	—	2
Celkem	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319

3. Jazyk mateřský.										
Český	38	30	43	44	50	23	23	17	22	290
Německý	1	7	1	1	8	4	4	3	—	29
Celkem	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319
4. Vyznání náboženské.										
Římsko-katolické	39	31	42	44	51	23	23	17	22	292
Mojžíšské	—	6	2	1	7	4	4	3	—	27
Celkem	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319
5. Věk.										
10. letých	—	2	—	—	—	—	—	—	—	2
11. „	5	5	—	—	—	—	—	—	—	10
12. „	20	21	9	—	—	—	—	—	—	50
13. „	10	3	13	2	1	—	—	—	—	29
14. „	3	5	12	10	11	2	—	—	—	43
15. „	1	—	8	18	29	7	—	—	—	63
16. „	—	1	1	11	10	11	4	—	—	38
17. „	—	—	1	4	6	4	12	6	1	34
18. „	—	—	—	—	1	3	10	8	3	25
19. „	—	—	—	—	—	—	1	2	10	13
20. „	—	—	—	—	—	—	—	4	4	8
21. „	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3
22. „	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Celkem	39	38	44	45	58	27	27	20	22	319
6. Bydliště rodičů.										
Přerov	18	22	19	17	30	13	11	9	8	147
Morava mimo Přerov	21	14	25	28	27	14	15	10	13	167
Slezsko	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Čechy	—	—	—	—	1	—	—	—	1	2
Dolní Rakousy	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Uhry	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Celkem	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319

	Třída								
	I.		II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Celkem
	A	B								
7. Klasifikace.										
a) koncem šk. r. 1898/9.										
Třídu I. s vyznamenáním obdrželi	4	8	8	8	13	5	7	10	4	67
„ I. obdrželi	27	24	28	29	44	20	15	10	18	215
Zkouška opravná povolena	3	2	5	1	1	1	2	—	—	15
Třídu II. obdrželi	1	2	1	6	—	1	3	—	—	14
„ III. „	4	1	2	1	—	—	—	—	—	8
Nezkoušeni zůstali	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Celkem	39	37	44	45	58	27	27	20	22	319
b) Dodatek ku šk. r. 1897/8.										
Opravná zkouška byla povolena	2		—	2	2	1	—	—	—	7
Obstáli	1		—	1	2	1	—	—	—	5
Neobstáli (nebo se nedostavili)	1		—	1	—	—	—	—	—	2
Doplňovací zkouška povolena	—		—	2	1	—	—	1	—	4
Obstáli	—		—	1	1	—	—	1	—	3
Neobstáli (nebo se nedostavili)	—		—	1	—	—	—	—	—	1
Celkový výsledek ve šk. r. 1897/8.										
Třídu I. s vyznamenáním obdrželi	12		8	12	8	10	11	4	1	66
„ I. obdrželi	32		36	40	31	17	11	18	9	194
„ II. „	8		8	7	4	7	1	1	—	36
„ III. „	4		—	—	—	—	—	—	—	4
Nezkoušen zůstal	—		—	1	—	—	—	—	—	1
Celkem	56		52	60	43	34	23	23	10	301
8. Peněžné příspěvky.										
Školné platiti povinni byli:										
v I. pololetí	19	24	21	21	25	14	11	5	14	154
v II. pololetí	15	18	20	21	26	13	12	3	10	138

Z polovice osvobozeni byli:											
v I. pololetí	—	—	4	2	3	1	1	4	—	15	
v II. pololetí	—	—	3	2	3	1	—	4	—	13	
Docela osvobozeni byli:											
v I. pololetí	20	14	24	23	30	12	16	12	8	159	
v II. pololetí	24	19	23	22	29	13	15	13	12	170	
Školné vyneslo:											
v I. pololetí	285·—	360·—	345·—	345·—	397·50	217·50	172·50	105·—	210·—	2437	zl. 50 kr.
v II. pololetí	225·—	270·—	322·50	330·—	412·50	202·50	180·—	75·—	150·—	2167	zl 50 kr.
Taxy za přijetí obnášejí	71·49	73·50	2·10	8·40	8·40	2·10	2·10	2·10	2·10	172	zl. 20 kr.
Příspěvky na učebné prostředky	55·50	57·—	69·—	63·—	81·—	40·50	40·50	30·—	34·50	471	zl. — kr.
Za duplikáty sem. vysvědčení přijato	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12	zl. — kr.

9. Návštěva relativně závazných a nezávazných předmětů na konci šk. r. 1898/9.

Druhý zemský jazyk (německý)*)										
Krasopis I. oddělení	24	3	2	—	—	—	—	—	—	29
„ II. „	—	20	11	—	—	—	—	—	—	31
Kreslení na vyšším gymnasiu	—	—	—	—	—	6	7	4	3	20
Tělocvik oddělení I. A.	19	4	7	—	—	—	—	—	—	30
„ „ I. B.	5	22	1	—	—	—	—	—	—	28
„ „ II.	—	—	9	10	15	—	—	—	—	34
„ „ III.	—	—	—	2	6	6	4	3	8	29
Zpěv I. oddělení	13	16	2	—	—	—	—	—	—	31
„ II. „	—	—	16	15	16	3	7	—	3	60
Těsnopis oddělení A.	—	—	—	—	22	1	1	—	—	24
„ „ B.	—	—	—	—	—	9	5	2	1	17

10. Stipendisté.

Počet stipendistů	—	—	1	1	—	—	—	—	2	4
Obnos stipendií	—	—	30·—	30·—	—	—	—	—	100·—	160	zl. — kr.

*) Předmětu tomu všichni žáci se učili jako předmětu závaznému.

ÜBER FOURIERSCHE DOPPELREIHEN
UND DAS
POISSONSCHE DOPPELINTEGRAL.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

II. SEKTION DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

AM 19. JUNI 1913

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

WALTER WOLLEBEN KÜSTERMANN.

MÜNCHEN
DR. WILD'SCHE BUCHDRUCKEREI GEBR. PARCUS
1913.

INHALT.

Seite

Einleitung 5

§ 1. Summation der Fourierschen Doppelreihe im gewöhnlichen Sinne und nach Diagonalen 8

§ 2. Das Dirichletsche Doppelintegral 15

§ 3. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne 24

§ 4. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der zu $f(x, y)$ gehörigen Diagonalreihe 29

§ 5. Die Fejèrsche Summationsmethode 34

§ 6. Ueber das Poissonsche Doppelintegral 39

§ 7. Vergleich der verschiedenen Darstellungsmethoden durch Anwendung auf ein Beispiel 52

Die ersten Arbeiten über Fouriersche Doppelreihen sind meines Wissens von Ascoli[1]) veröffentlicht und stammen aus dem Jahre 1879. Sie behandeln die trigonometrischen Reihen im allgemeinen, stützen sich jedoch auf eine unzulängliche Definition der Konvergenz einer Doppelreihe und ihre Resultate sind mit großer Vorsicht aufzunehmen. Der heute maßgebliche Konvergenzbegriff für Doppelreihen ist der von Stolz[2]) herrührende und durch die grundlegende Pringsheimsche Arbeit über die „Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen“[3]) allgemein zur Annahme gelangte. Diesen benutzen auch alle folgenden Autoren.

Im Jahre 1903 erschien eine Arbeit von Krause[4]), in welcher bewiesen wurde, daß eine Funktion von zwei Variabeln f(x, y), die nach beiden Axenrichtungen monoton verläuft, und für welche der Ausdruck:

$$\triangle f(x,y,h,k) \equiv f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

wenigstens abteilungsweise sein Vorzeichen nicht ändert, in eine konvergente Fouriersche Doppelreihe entwickelbar ist.

Unabhängig hiervon zeigte Hardy[5]), später Vergerio[6]), dem Vorgange Jordans für einfache Fourierreihen folgend, daß eine Funktion von zwei Variabeln immer dann in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelt werden kann, wenn sie „von beschränkter Schwankung“ ist. Jede Funktion von beschränkter Schwankung läßt sich nun als Summe oder Differenz zweier gleichsinnig[7]) monoton zunehmenden Funktionen $\ominus_1(x, y)$, $\ominus_2(x, y)$ darstellen, die außerdem die Ungleichung[8]) befriedigen:

1) $$\triangle \ominus (x, y, h, k) \geq 0$$

---

[1]) Ascoli, Sulla rappresentabilita di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometriche. Reale Acc. d. Lincei, Roma, 1879; und, daselbst: Sulle serie trigonometriche a due variabili, 7. Bd. d. 3. Serie.

[2]) Stolz, Über unendliche Doppelreihen, Math. Ann. Bd. 24.

[3]) Pringsheim, Münchner Sitzgsber. Bd. 27, 1897, p. 101.

[4]) Krause, Über Fouriersche Reihen mit zwei veränderlichen Größen, Leipz. Sitzgsber. Bd. 55, 1903, p. 164.

[5]) Hardy, On double Fourier Series, Quart. Journal of Math. No. 145. 1905.

[6]) Vergerio, Giornale di Matematiche. 1911, p. 181.

[7]) d. h. die Funktion muß nach beiden Axenrichtungen gleichzeitig steigen (oder fallen).

[8]) Hardy, p. 58.

Somit ergibt sich die Krausesche Bedingung als Spez
fall der Hardyschen, denn Funktionen, die der Krauseschen
dingung genügen, sind sicher „von beschränkter Schwanku

Die drei letztgenannten Autoren führen ihre Beweise
Hilfe eines sogen. „zweiten“ Mittelwertsatzes für Doppelintegr
eines Analogon des bekannten zweiten Mittelwertsatzes für
fache Integrale. Verzichtet man auf die Anwendung jenes Sat
und benutzt zum Beweise der Konvergenz des Summatio
integrals der Fourierschen Doppelreihe nur eine zweckentsprechen
Zerlegung in Teilintegrale, wie es in § 2 der vorliegenden Arb
geschehen ist, so stellt sich heraus, daß die Ungleichung (1) üb
flüssig ist, und daß jede Funktion, die sich als Summe o
Differenz zweier gleichsinnig monotoner Funktionen darstel
läßt — eine „monotonoïde“ Funktion will ich sie im Anschl
an Herrn Pringsheim nennen — in eine Fouriersche Doppelre
entwickelbar ist.

Die Hardyschen Funktionen mit beschränkter Schwanku
sind also spezielle Fälle der monotonoïden Funktionen.

Außer zur Darstellung willkürlich vorgegebener Funktion
dienen die Fourierschen Reihen auch zur Untersuchung des V
haltens von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Handelt
sich um analytische Funktionen von zwei veränderlichen Größ
so artet auf den Konvergenzkreisen (Einheitskreise) die
Funktionselement darstellende Taylorsche Reihe in eine na
Diagonalen summierte Fouriersche Doppelreihe aus. Da nun
allgemeinen, d. h. wo es sich nicht um absolut konverger
Doppelreihen handelt, die Existenz der Doppelreihensumme
gewöhnlichen Sinne keineswegs für die Konvergenz der Diagon
reihe bürgt[1]), und da die Frage nach der Existenz der Diagon
summe der Fourierschen Doppelreihe meines Wissens nirgen
behandelt ist, so habe ich sie in § 4 untersucht. Die hierin g
gebene Bedingung hat ähnlichen Charakter wie die von §
ist aber keineswegs mit ihr identisch.

In einer 1904 erschienenen Arbeit hat Fejèr[2]) gezeigt, d
die Folge der arithmetischen Mittel der Partialsummen d
Fourierschen Reihe, resp. die daraus gebildete „Fejèrsche Reih
auch dann noch konvergiert, wenn es die einfache Fourierrei
nicht mehr tut; mit anderen Worten, die Fouriersche Reihe ein
jeden integrablen Funktion ist „von der ersten Ordnung sum
mabel“. Fejèr bewies dies mit Hilfe des ersten Mittelwertsatz

---

[1]) Vergl. Pringsheim, l. c. p. 124 und die darauffolgenden Beispie

[2]) Fejèr, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Ann. 58.

llein, und da dieser ohne Einschränkung auch für Doppelinte-
ralе gilt, so lag der Gedanke nahe, daß sich die Fejèrschen
Resultate ohne Schwierigkeit auf die Fouriersche Doppelreihe
ürden übertragen lassen. Das ist in der Tat, wenigstens für
ndliche Funktionen, der Fall (§ 5).

Nahe verwandt mit der Fourierschen Reihe ist das Poisson-
che Integral[1]). Es entsteht bei der Summation der mit den
onvergenzfaktoren $r^n (r < 1)$ versehenen Fourierreihe und hat
ls analytisches Darstellungsmittel etwa die Tragweite der
Fejèrschen Reihe". Da es eine bedeutend knappere Form besitzt
ls jene, so scheint es für eine Darstellung von Funktionen
weier Veränderlicher besonders geeignet. Eine Funktion von
ner Variablen kann nur zwei Arten von endlichen Unstetig-
eiten besitzen, nämlich Punkte, in denen die Funktion einen
loßen „Sprung" macht und solche, in deren Umgebung sie
nendlich oft oszilliert. Viel komplizierter ist die Sachlage bei
nstetigen Funktionen mehrerer Variablen. Ich habe mich be-
üht, das Verhalten des Poissonschen Integrals an Unstetigkeits-
ellen besonders zu berücksichtigen (§ 6).

Nach Fertigstellung dieser Arbeit sind zwei Veröffentlichungen
ıs dem Jahre 1912 zu meiner Kenntnis gelangt, die sich eben-
lls mit einigen der hier behandelten Probleme befassen. Die
ste, von Moore[2]), enthält eine Ankündigung von Resultaten
er die Fejèrsche Reihe in Anwendung eines allgemeinen Satzes
er Doppelreihen[3]). Die zweite, von W. H. Young[4]) bringt eine
hr eingehende Untersuchung über Fouriersche Doppelreihen
d ihre Summation nach den verschiedenen Cesàroschen Methoden,
denen ja auch das Fejèrsche Verfahren gehört. Für die Kon-
rgenz der gewöhnlichen Doppelreihe wird ein Integralkriterium
fgestellt. Ob dieses Kriterium umfassender ist, als das hier
gegebene, entzieht sich zurzeit noch meiner Beurteilung. Jeden-
ls sind die dort verwandten Methoden von denen der vorliegen-
n Arbeit ganz verschieden.

---

[1]) Vergl. Bôcher, An Introduction to Fourier Series, Annals of Math., Ser. Vol. 7, # 2—3, 1906.

[2]) Moore, Comptes rendues, t. 154, p. 126, 1912.

[3]) Mittlerweile sind auch die Beweise hierzu veröffentlicht worden in Trans. Amer. Math. Soc. Vol. XIV. No. 1, pp. 73—104 Jan. 1913.

[4]) W. H. Young, Proc. Lond. Math. Soc. Series 2, Vol. 11, p. 133. 1912.

§ 1.

Summation der Fourierschen Doppelreihe im gewöhnlichen Sinne und nach Diagonale

Jede Doppelreihe von der Form:

$$s(x,y) = \sum_0^\infty {}_{\mu,\nu} B_\mu^\nu (x, y)$$

$$(1) \qquad = \sum_0^\infty {}_{\mu,\nu} \left| \begin{array}{l} (a_\mu^\nu \cos \mu x + b_\mu^\nu \sin \mu x) \cos \nu y \\ + (c_\mu^\nu \cos \mu x + d_\mu^\nu \sin \mu x) \sin \nu y \end{array} \right|$$

heißt eine trigonometrische Doppelreihe. Man bezeichnet sie die Fouriersche Doppelreihenentwicklung der Funktion f (x, falls ihre Coeffizienten die Fouriersche Form haben, nämlich

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} a_o^o = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta; \qquad b_o^o = c_o^o = d_o^o = \\ \left.\begin{matrix} a_\mu^o \\ b_\mu^o \end{matrix}\right| = \dfrac{1}{2\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \left.\begin{matrix} \cos \mu\alpha \\ \sin \mu\alpha \end{matrix}\right| d\alpha\, d\beta; \qquad \begin{matrix} c_\mu^o = d_\mu^o = \\ \mu = 1, 2, \end{matrix} \\ \left.\begin{matrix} a_o^\nu \\ c_o^\nu \end{matrix}\right| = \dfrac{1}{2\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \left.\begin{matrix} \cos \nu\beta \\ \sin \nu\beta \end{matrix}\right| d\alpha\, d\beta; \qquad \begin{matrix} b_o^\nu = d_o^\nu = \\ \nu = 1, 2, \end{matrix} \\ \left.\begin{matrix} a_\mu^\nu \\ b_\mu^\nu \\ c_\mu^\nu \\ d_\mu^\nu \end{matrix}\right| = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta) \left.\begin{matrix} \cos \mu\alpha \cos \nu\beta \\ \sin \mu\alpha \cos \nu\beta \\ \cos \mu\alpha \sin \nu\beta \\ \sin \mu\alpha \sin \nu\beta \end{matrix}\right| d\alpha\, d\beta; \quad \begin{cases} \mu = 1, 2, \\ \nu = 1, 2, \end{cases} \end{array} \right.$$

Da s (x, y) immer eine in x und y periodische Funktion mit Periode 2π darstellt, d. h. da

$$+ 2k\pi,\ y + 2l\pi) = s(x, y), \quad \text{wo} \begin{cases} k = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ l = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases},$$

wollen wir das gleiche von f (x, y) voraussetzen.

Damit nun die Fouriersche Entwicklung einer Funktion überpt existiert, d. h. damit die Formeln (2) einen Sinn haben, ß f (x, y) folgende Bedingungen erfüllen:

1. Sie muß im Fundamentalquadrate

$$\begin{cases} -\pi < x \leqq +\pi \\ -\pi < y \leqq +\pi \end{cases}$$

leutig definiert sein,[1])

2. ihr über das Fundamentalquadrat erstrecktes Doppelintegral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta)\ d\alpha\, d\beta$$

3 existieren.

Wir wollen untersuchen, unter welchen von f (x, y) außerdem zu erfüllenden Bedingungen die Summe s (x, y) gleich f (x, y) Zu diesem Zwecke summieren wir die Doppelreihe, und zwar ächst im gewöhnlichen Sinne. Es ist:

$$B_0^0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$B_\mu^0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) [\cos \mu\alpha \cos \mu x + \sin \mu\alpha \sin \mu x]\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \cos \mu(\alpha - x)\, d\alpha\, d\beta; \qquad \mu = 1, 2, \ldots$$

[1]) Ist der ursprüngliche Definitionsbereich von f (x, y) nicht das Fundalquadrat, sondern ein endlicher von regulären Kurven begrenzter, h oder mehrfach zusammenhängender Bereich, so kann man ihn immer inem Rechteck umgeben. In den nicht zum Bereich gehörigen Teilen Rechtecks setze man f (x, y) ≡ 0. Durch eine Ähnlichkeitstransfor- n läßt sich sodann das Rechteck auf das Fundamentalquadrat abbilden.

$$
(3)\quad
\begin{cases}
B_{o}^{\nu} = \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\cos\nu(\beta-y)\,d\alpha\,d\beta; & \nu = 1, 2 \\
B_{\mu}^{\nu} = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\Big[(\cos\mu\alpha\cos\mu x + \sin\mu\alpha\sin\mu x)\cos\nu\beta \\
\qquad + (\cos\mu\alpha\cos\mu x + \sin\mu\alpha\sin\mu x)\sin\nu\beta\sin\nu y \\
\qquad = \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\cos\mu(\alpha-x)\cos\nu(\beta-y)\,d\alpha\,d\beta; & \begin{cases}\mu = 1,\\ \nu = 1,\end{cases}
\end{cases}
$$

Die Summe der Terme, welche enthalten sind in dem der $(m+1)^{ten}$ Kolonne rechts und von der $(n+1)^{ten}$ Zeile u begrenzten rechteckigen Ausschnitt aus der Doppelreihe, bezei man als die Fouriersche Partialsumme:

$$s_{m}^{n}(x, y) = \sum_{o}^{m}{}_{\mu}\sum_{o}^{n}{}_{\nu} B_{\mu}^{\nu}(x, y).$$

Wegen der bekannten Relation:

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{p}{}_{\nu}\cos\nu\varphi = \frac{\sin(p+\tfrac{1}{2})\varphi}{2\sin\tfrac{1}{2}\varphi}$$

erhält man:

$$
\begin{aligned}
s_{m}^{n}(x, y) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\Big[\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\Big\{\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\cos\mu(\alpha-x) + \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\cos\nu(\beta- \\
&\qquad + \sum_{1}^{m}{}_{\mu}\cos\mu(\alpha-x)\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\cos\nu(\beta-y)\Big] d \\
(5)\qquad &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\Big[\tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{m}{}_{\mu}\cos\mu(\alpha-x)\Big] \\
&\qquad \Big[\tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\cos\nu(\beta-y)\Big]\,d\alpha\,d\beta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\,\frac{\sin(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-x)}{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-x)}\,\frac{\sin(n+\tfrac{1}{2})(\beta-y)}{\sin\tfrac{1}{2}(\beta-y)}\,d
\end{aligned}
$$

Die Entscheidung der Frage, ob die Doppelreihe s (konvergiert, und ob ihre Summe für Punkte des Fundame quadrats mit f(x, y) übereinstimmt, hängt dann lediglich al der Existenz bezw. Auswertung des Doppellimes:

$$\lim_{m,\,n=\infty} s_m^n(x,y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha,\beta)\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\beta-y)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-y)}\,d\alpha\,d\beta.$$

Transformieren wir $s_m^n(x,y)$ durch die Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha-x}{2}=\gamma;\ d\alpha=2\,d\gamma;\left[\alpha=\pi,\ \gamma=\frac{\pi-x}{2}\right]:\\
&\qquad\left[\alpha=-\pi,\ \gamma=\frac{-\pi-x}{2}\right];\ 2m+1=\varkappa\\
&\frac{\beta-y}{2}=\delta;\ d\beta=2\,d\delta;\left[\beta=\pi,\ \delta=\frac{\pi-y}{2}\right];\\
&\qquad\left[\beta=-\pi,\ \delta=\frac{-\pi-y}{2}\right];\ 2n+1=\lambda
\end{aligned}\right\}$$

ird:

$$,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}}\int_{\frac{-\pi-y}{2}}^{\frac{\pi-y}{2}} f(x+2\gamma,y+2\delta)\,\frac{\sin\varkappa\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\sin\lambda\delta}{\sin\delta}\,d\gamma\,d\delta.$$

Nun ist der Integrand dieses Doppelintegrals eine periodische
tion, sowohl in γ als in δ, und beide Male mit der Periode π.
Wert des Integrals bleibt also ungeändert, solange man als
rationsbereich ein den Koordinatenaxen paralleles Quadrat
ler Seitenlänge π benutzt. Ich kann daher schreiben:

$$,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\gamma,y+2\delta)\,\frac{\sin\varkappa\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\sin\lambda\delta}{\sin\delta}\,d\gamma\,d\delta.$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}+\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right\} f(\,)\,,,\,,\,d\gamma\,d\delta$$

Setzt man im zweiten Integral:

$$\delta = -\delta'; \quad d\delta = -d\delta'; \quad \begin{bmatrix} \delta = 0 & , \ \delta' = 0 \\ \delta = -\frac{\pi}{2}, & \delta' = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

(8) im dritten

$$\gamma = -\gamma'; \quad d\gamma = -d\gamma'; \quad \begin{bmatrix} \gamma = 0 & , \ \gamma' = 0 \\ \gamma = -\frac{\pi}{2}, & \gamma' = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

und in das vierte beide Substitutionen gleichzeitig ein, so

$$s_m^n(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\sin \gamma} \frac{\sin \gamma\delta}{\sin \delta} d\gamma\, d\delta,$$

(9) $F(x, y, 2\gamma, 2\delta) = f(x + 2\gamma, y + 2\delta) + f(x + 2\gamma, y -$
$+ f(x - 2\gamma, y + 2\delta) + f(x - 2\gamma, y -$

Definieren wir:

(10) $$\varphi(\gamma, \delta) = \frac{\gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin \delta} \cdot F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$$

so ergibt sich:

$$s_m^n(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} d\gamma\, d\delta,$$

ein Integral, welches nach bekanntem Vorbilde als Dirichlet
Doppelintegral bezeichnet werden möge.

Schließlich ist:

(11) $$s(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\varkappa, \lambda = \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, \delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} d\gamma$$

Letzterer Ausdruck, der als gewöhnlicher Doppellim
verstehen ist, stellt die Reihensumme im gewöhnlichen Sinn
Speziellere Summationsmethoden gibt es in Fülle, so dieje
nach Zeilen, Kolonnen, Diagonalen, Quadraten. Da es in
gemeinen, wo es sich um bedingt konvergente Doppelreihen ha
keine Beziehungen zwischen den Resultaten der verschie
Summationsmethoden gibt, so schien es mir nicht unnütz
jenige nach Diagonalen ebenfalls zu untersuchen, weil sie i

heorie der Funktionen zweier complexen Variabeln eine Rolle ielt. Entwickelt man nämlich eine Funktion F (u, v) in der Umebung des Nullpunktes nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$(u, v) = F(0,0) + u \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right]_{(o,o)} + v \left.\frac{\partial F}{\partial v}\right]_{(o,o)} + \frac{1}{2!}\left\{u^2 \left.\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right]_{(o,o)} + 2uv \left.\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \delta v}\right]_{(o,o)} + v^2 \left.\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right]_{(o,o)}\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

id untersucht Punkte der Konvergenzkreise [1]), so artet sowohl r reelle als imaginäre Teil dieser Taylorschen Reihe in eine ch Diagonalen summierte Fouriersche Reihe aus.

Sei $D_m(x, y)$ die Summe der ersten $(m + 1)$ Diagonalen r Doppelreihe (1), also:

$$D_m = \begin{array}{l} B_o^o + B_1^o + \ldots\ldots\ldots + B_{m-1}^o + B_m^o \\ + B_o^1 + B_1^1 + \ldots\ldots\ldots + B_{m-1}^1 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + B_o^{m-1} + B_1^{m-1} \\ + B_o^m \end{array}$$

$$= \sum_o^m{}_\nu \left(\sum_o^{m-\nu}{}_\mu B_\mu^\nu\right), \text{ so folgt aus (3)}$$

$$D_m(x, y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \sum_o^m{}_\nu \left(\sum_o^{m-\nu}{}_\mu \cos\mu(\alpha - x)\cos\nu(\beta - y)\right) d\alpha\, d\beta,$$

in der Doppelsumme an Stelle von cos 0 immer $\frac{1}{2}$ zu setzen ist.

Wenden wir hierauf die Umformungen (6), (7) und (8) an, wird:

$$D_m = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta)\, \triangle_m\, d\gamma\, d\delta, \text{ wo}$$

$$\triangle_m = \sum_o^m{}_\nu \left(\sum_o^{m-\nu}{}_\mu \cos 2\mu\gamma \cos 2\nu\delta\right)$$

$$= \sum_o^m{}_\nu \cos 2\nu\delta \cdot \frac{\sin(\varkappa - 2\nu)\gamma}{2\sin\gamma}, \text{ infolge der Relation (4)}$$

[1]) Man hat sich die Konvergenzkreise durch Transformation der Reihe die Einheitskreise übergeführt zu denken.

$$2\sin\gamma\,\triangle_m = \sum_1^m{}_\nu \cos 2\nu\delta\,(\sin\varkappa\gamma\cos 2\nu\gamma - \cos\varkappa\gamma\sin 2\nu\gamma) + \frac{1}{2}\sin\varkappa\gamma$$

$$4\sin\gamma\,\triangle_m = \sin\varkappa\gamma\left(\sum_1^m{}_\nu\, 2\cos 2\nu\delta\cos 2\nu\gamma + 1\right) - \cos\varkappa\gamma\sum_1^m{}_\nu\, 2\cos 2\nu\delta\sin 2\nu\gamma$$

$$= \sin\varkappa\gamma\left(\sum_1^m{}_\nu[\cos 2\nu(\gamma+\delta) + \cos 2\nu(\gamma-\delta)] + \right.$$
$$\left. - \cos\varkappa\gamma\sum_1^m{}_\nu[\sin 2\nu(\gamma+\delta) + \sin 2\nu(\gamma-\delta\right.$$

$$= \frac{\sin\varkappa\gamma}{2}\left[\frac{\sin\varkappa(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} + \frac{\sin\varkappa(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)}\right] - \frac{\cos\varkappa\gamma}{2}\left[\frac{\cos(\gamma+\delta) - \cos\varkappa(\gamma+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)} + \frac{\cos(\gamma-\delta) - \cos\varkappa(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)}\right]$$

wegen der zu (4) analogen Relation:

$$\sum_1^p{}_\nu \sin\nu\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos(p+\tfrac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$8\sin\gamma\cdot\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta)\cdot\triangle_m$$
$$= \sin\varkappa\gamma[\sin\varkappa(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta) + \sin\varkappa(\gamma-\delta)\cdot\sin(\gamma+\delta$$
$$+ \cos\varkappa\gamma[\cos\varkappa(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta) + \cos\varkappa(\gamma-\delta)\cdot\sin(\gamma+\delta) - \sin 2$$
$$= \sin(\gamma-\delta)\cdot\cos\varkappa\delta + \sin(\gamma+\delta)\cdot\cos\varkappa\delta - \sin 2\alpha\cos\gamma$$
$$= 2[\sin\gamma\cdot\cos\delta\cdot\cos\varkappa\delta - \sin\gamma\cdot\cos\gamma\cdot\cos\varkappa$$

daher:

$$\triangle_m = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varkappa\gamma\cdot\cos\gamma - \cos\varkappa\delta\cdot\cos\delta}{\cos 2\gamma - \cos 2\delta}$$

$$(12) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(m+1)(\gamma+\delta)\cdot\sin(m+1)(\gamma-\delta) + \sin m(\gamma+\delta)\cdot\sin m(\gamma-}{\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\gamma-\delta)}$$

Die m^{te} Partialsumme der Diagonalreihe in ihrer kürzeste Form ist also:

(13)

$$D_m(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x,y,2\gamma,2\delta)\,\frac{\cos\varkappa\gamma\cos\gamma - \cos\varkappa\delta\cos\delta}{\cos 2\gamma - \cos 2\delta}\,d\gamma\,d$$

wo $\varkappa = 2m +$

§ 2.

Das Dirichletsche Doppelintegral.

Wir wenden uns nun zur Auswertung des Doppellimes (11):

$$\lim_{\lambda=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma,\delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\gamma \, d\delta = \lim_{\varkappa,\lambda=\infty} I(\varkappa,\lambda).$$

Es ist:

$$I(\varkappa,\lambda) = \left| \int_0^{a_0} \int_0^{d_0} + \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{d_0} + \int_0^{c_0} \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{c_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \right| \varphi \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

(4) $$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

wo $a_0 > c_0 > 0$, $d_0 > 0$.

Unter der Voraussetzung, daß $\varphi(\gamma,\delta)$ in dem Bereich

$$0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2} \; ; \; 0 \leqq \delta \leqq \frac{\pi}{2}$$

dlich bleibt, d. h. $|\varphi(\gamma,\delta)| < G$, und ein über diesen Bereich trecktes Doppelintegral besitzt, beweisen wir die folgenden r Hülfssätze.

1. Hülfssatz:

$$\lim_{\varkappa,\lambda=\infty} I_4(\varkappa,\lambda) = 0.$$

Beweis: Man denke sich den Bereich

$$c_0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2} \; ; \; d_0 \leqq \delta \leqq \frac{\pi}{2}$$

ch die Geraden:

$$\gamma = c_\mu \; ; \quad \delta = d_\nu \; ; \quad \begin{matrix} \mu = 1, 2 \ldots . (p-1) \\ \nu = 1, 2 \ldots . (q-1) \end{matrix}$$

p · q Rechtecke eingeteilt, deren Seiten mit zunehmendem p l q unendlich klein werden. Zerlegt man das über jenen eich erstreckte Doppelintegral in die Summe der Integrale r die kleinen Rechtecke, so wird:

$$I_4(\varkappa,\lambda) = \sum_0^{p-1}{}_\mu \sum_0^{q-1}{}_\nu \int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}} \int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}} \varphi(\gamma,\delta) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\gamma \, d\delta,$$

wo $c_p = \frac{\pi}{2}$; $d_q = \frac{\pi}{2}$.

Führt man in jedes dieser Teilintegrale die ihm entsprechende Identität ein:

$$\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}=\left[\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\delta}-\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}\right]+\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}$$

so folgt:

$$I_4(\varkappa,\lambda)=$$

$$\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}\left[\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}-\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}\right]\sin\varkappa\gamma\sin\lambda\delta\,d\gamma\,d\delta$$

$$+\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\cdot d_\nu}\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}\sin\varkappa\gamma\sin\lambda\delta\,d\gamma\,d\delta.$$

Bezeichnet D_μ^ν die Schwankung der Funktion $\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}$ in dem Rechtecke

$$\left\{\begin{matrix}c_\mu\leqq\gamma\leqq c_{\mu+1}\\ d_\nu\leqq\delta\leqq d_{\nu+1}\end{matrix}\right\}$$

so ist für die Punkte dieses Rechtecks

$$\left|\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}-\frac{\varphi(c_\mu,d_\nu)}{c_\mu\,d_\nu}\right|\leqq D_\mu^\nu,$$

und wegen der Endlichkeit von $\varphi(\gamma,\delta)$ folgt:

$$|I_4(\varkappa,\lambda)|<\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\,D_\mu^\nu\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}d\gamma\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}d\delta$$

$$+\frac{G}{c_0\,d_0}\sum_0^{p-1}{}_\mu\sum_0^{q-1}{}_\nu\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}\sin\varkappa\gamma\,d\gamma\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}\sin\lambda\delta\,d\delta.$$

Nun ist

$$\int_{c_\mu}^{c_{\mu+1}}d\gamma\int_{d_\nu}^{d_{\nu+1}}d\delta=(c_{\mu+1}-c_\mu)(d_{\nu+1}-d_\nu)=\tau_\mu^\nu$$

= dem Flächeninhalt eines kleinen Rechtecks; da ferner $\varphi(\gamma,\delta)$, also auch $\frac{\varphi(\gamma,\delta)}{\gamma\cdot\delta}$ in dem betrachteten

ereich ein Doppelintegral besitzt, so muß bei hinreichender ergrößerung von p und q:

5) $$\sum_{0}^{p-1}{}_{\mu} \sum_{0}^{q-1}{}_{\nu} D_{\mu}^{\nu} \tau_{\mu}^{\nu} < \frac{\varepsilon_4}{2}$$ gemacht werden können.

$$\left| \int_{c_\mu}^{c_\mu+1} \sin \varkappa\gamma \, d\gamma \int_{d_\nu}^{d_\nu+1} \sin \lambda\delta \, d\delta \right|$$

$$= \frac{1}{\varkappa \cdot \lambda} \left| \left[\cos \varkappa\gamma \right]_{c_\mu}^{c_\mu+1} \left[\cos \lambda\delta \right]_{d_\nu}^{d_\nu+1} \right| < \frac{4}{\varkappa \cdot \lambda}$$

glich: $$| I_4 (\varkappa, \lambda) | < \frac{\varepsilon_4}{2} + \frac{4G}{c_0 d_0} \cdot \frac{p\,q}{\varkappa\,\lambda}.$$

Nachdem nun p und q so groß fixiert sind, daß die Behung (15) erfüllt ist, kann man immer noch K_4 und Λ_4 um viel größer wählen, daß

$$\frac{4G}{c_0 d_0} \cdot \frac{p\,q}{\varkappa \cdot \lambda} < \frac{\varepsilon_4}{2}$$

d und bleibt für alle $\varkappa$, λ, welche K_4, Λ_4 überschreiten.

Folglich ist $| I_4 (\varkappa, \lambda) | < \varepsilon_4$ für $\left\{ \begin{matrix} \varkappa > K_4 \\ \lambda > \Lambda_4 \end{matrix} \right\}$

n. $$\lim_{\varkappa, \lambda = \infty} I_4 (\varkappa, \lambda) = 0$$ Q. E. D.

Wir setzen nach Dirichlet:

$$\varphi (+0, \delta) = \lim_{\gamma = 0} \varphi (|\gamma|, \delta)$$ (bei festem δ)

n wollen analog unter $\varphi (+0, +0)$ den folgenden Doppellimes verstehen: $$\varphi (+0, +0) = \lim_{\gamma, \delta = 0} \varphi (|\gamma|, |\delta|).$$

2. Hülfssatz:

Existiert für jedes beliebig klein vorgeschriebene a_0 das Integral

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi (\gamma, +0) \, d\gamma$$

n läßt sich zu jedem solchen a_0 ein $d > 0$ finden, derart, daß Doppelintegral

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{d} \left| \frac{\varphi (\gamma, \delta) - \varphi (\gamma, +0)}{\delta} \right| d\gamma \, d\delta = H_2 (d)$$

einen Sinn hat, so kann man durch hinreichende Verkleinerung von $d_0 < d$, erreichen, daß

$$|I_2(\varkappa, \lambda)| < \varepsilon_2 \text{ für alle } \begin{cases} \varkappa > K_2 \\ \lambda > \Lambda_2 \end{cases}$$

Beweis:

$$I_2 = \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{d} \frac{\varphi(\gamma, \delta) - \varphi(\gamma, +0)}{\delta} \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \sin \lambda\delta \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, +0) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \, d\gamma \int_0^{d_0} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\delta.$$

Mit Hülfe der bekannten Formel:

$$\lim_{\lambda = \infty} \int_0^{d_0} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta} \, d\delta = \int_0^{\infty} \frac{\sin \chi}{\chi} \, d\chi = \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

erhält man

$$|I_2| < \frac{1}{a_0} \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{d_0} \frac{|\varphi(\gamma, \delta) - \varphi(\gamma, +0)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ \left| \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\gamma, +0) \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \, d\gamma \right| \cdot \left| \frac{\pi}{2} + \varepsilon_\lambda \right|$$

$$< \frac{1}{a_0} M_2(d_0) + R_\varkappa \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \text{ für } \lambda > \Lambda_2.$$

Nun ist $M_2(d_0) < \frac{a_0}{2} \varepsilon_2$ für hinreichend kleines d_0, weil a_0 fe bleibt. Da ferner $\varphi(\gamma, +0)$ endlich und integrabel ist, kann, na der Beweismethode von Hülfssatz 1, durch Vergrößerung von $R_\varkappa < \frac{\varepsilon_2}{\pi + 2}$ gemacht werden [1]),

darum $\left| I_2(\varkappa, \lambda) \right| < \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2$ für $\begin{cases} \varkappa > K_2 \\ \lambda > \Lambda_2 \end{cases}$

Q. E.

[1]) Vergleiche Pringsheim, Math. Ann. 68, p. 380.

In derselben Weise zeigt man die Richtigkeit des

3. Hülfssatzes:

istiert für jedes beliebig klein vorgeschriebene d_0 das Integral

$$\int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\ (+0,\ \delta)\ d\,\delta$$

d läßt sich zu jedem solchen d_0 ein $c > 0$ finden, derart, 3 das Doppelintegral

$$\int_0^c \int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\varphi(\gamma,\ \delta) - \varphi(+0, \delta)}{\gamma} \right| d\gamma\, d\delta = M_3\ (c)$$

stiert, so kann man durch Verkleinerung von $c_0 < c$ stets eichen, daß

$$|\, I_3(\varkappa, \lambda)\,| < \varepsilon_3 \text{ für alle } \varkappa > K_3,\ \lambda > \Lambda_3.$$

4. Hülfssatz:

Existiert $\varphi(+0, +0)$ und ist $\varphi(\gamma, \delta)$ mit beliebigem Vor- hen für jedes γ des Intervalls $0 \leqq \gamma \leqq a_0$ in δ monoton ehmend, ebenso für jedes δ des Intervalls $0 \leqq \delta \leqq d_0$ in γ noton abnehmend, so wird bei hinreichender Verkleinerung a_0 und d_0

$$\left| I_1(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4}\, \varphi\ (+0, +0) \right| < \varepsilon_1 \quad \text{falls } \varkappa > K_1,\ \lambda > \Lambda_1$$

Beweis:

$$I_1(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4}\, \varphi\ (+0, +0)$$

$$= \int_0^{a_0} \int_0^{d_0} \left\{ \varphi(\gamma, \delta) - \varphi(a_0, d_0) \right\} \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta}\, d\gamma\, d\delta$$

$$+ \left\{ \varphi(a_0, d_0) - \varphi(+0, +0) \right\} \frac{\pi^2}{4}$$

$$- \varphi(a_0, d_0) \left\{ \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{a_0} \frac{\sin \varkappa\gamma}{\gamma}\, d\gamma \int_0^{d_0} \frac{\sin \lambda\delta}{\delta}\, d\delta \right\}$$

zt man: $\psi(\gamma, \delta) = \varphi(\gamma, \delta) - \varphi(a_0, d_0),$

st $\psi(+0, +0) = \varphi(+0, +0) - \varphi(a_0, d_0)$ und

$$\left| I_1 - \frac{\pi^2}{4}\varphi(+0,+0) \right| < \left| \int_0^{a_0}\int_0^{d_0} \psi(\gamma,\delta)\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\gamma\,d\delta \right.$$

(17)
$$\left. + \frac{\pi^2}{4}\psi(+0,+0) + G.N_{(\varkappa,\lambda)} \right| < \left| J \right| + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3},$$

da $N_{(\varkappa,\lambda)}$, nachdem a_0, d_0 hinreichend klein fixiert sind, n
$\psi(+0,+0) < \frac{4\varepsilon_1}{3\pi^2}$ zu machen, wegen (16) noch unter je
endliche Schranke hinabgedrückt werden kann.

$$J = \int_0^{a_0}\int_0^{d_0} \psi(\gamma,\delta)\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\gamma\,d\delta$$

und $\psi(\gamma,\delta)$ eine positive, gleichsinnig monoton abnehmere
Funktion, Ich zerlege J in die folgenden Teilintegrale:

$$J = \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\mu+\nu}\cdot u_\mu^\nu + \sum_1^m{}_\mu (-1)^{\mu+n+1}\cdot \ominus_\mu \cdot u_\mu^{n+1}$$
$$+ \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\nu+m+1}\cdot \overset{(\nu)}{\ominus}\cdot u_{m+1}^\nu + (-1)^{m+n}\cdot \ominus \cdot u_{m+}^{n+1},$$

wo
$$u_i^l = \left| \int_{(i-1)\frac{\pi}{\varkappa}}^{\frac{i\pi}{\varkappa}} d\gamma \int_{(l-1)\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{l\pi}{\lambda}} \psi(\gamma,\delta)\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\delta \right|$$

zu setzen ist und m und n so bestimmt werden, daß

$$\frac{m\pi}{\varkappa} \leq a_0 \leq \frac{(m+1)\pi}{\varkappa}; \qquad \frac{n\pi}{\lambda} \leq d_0 \leq \frac{(n+1)\pi}{\lambda},$$

während die $\ominus$ sämtlich zwischen 0 und 1 liegen.

Transformiert man u_i^l durch die Substitutionen:

(18) so wird
$$\left| \begin{array}{l} \varkappa\gamma = \alpha + (i-1)\pi; \quad d\gamma = \dfrac{d\alpha}{\varkappa} \\ \lambda\delta = \beta + (l-1)\pi; \quad d\delta = \dfrac{d\beta}{\lambda} \end{array} \right|$$

$$u_i^l = \int_0^\pi\int_0^\pi \psi\left(\frac{\alpha+(i-1)\pi}{\varkappa}, \frac{\beta+(l-1)\pi}{\lambda}\right)\frac{\sin\alpha}{\alpha+(i-1)\pi}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta+(l-1)\pi}\,d\alpha\,d\beta$$

Wegen der Monotonie von ψ ist sofort ersichtlich, daß auch
e u_i^l mit wachsendem i und l gleichsinnig monoton abnehmen.
chreiben wir nun:

$$= u_1^1 - u_1^2 + u_1^3 - u_1^4 + u_1^5 - \ldots\ldots + (-1)^n \quad \ominus_1 u_1^{n+1}$$
$$- u_2^1 + u_2^2 - u_2^3 + u_2^4 - u_2^5 + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} \ominus_2 u_2^{n+1}$$
$$+ u_3^1 - u_3^2 + u_3^3 - u_3^4 + u_3^5 - \ldots\ldots + (-1)^{n+2} \ominus_3 u_3^{n+1}$$
$$- u_4^1 + u_4^2 - u_4^3 + u_4^4 - u_4^5 + \ldots\ldots + (-1)^{n+3} \ominus_4 u_4^{n+1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^m \ominus^{(1)} u_{m+1}^1 + (-1)^{m+1} \ominus^{(2)} u_{m+1}^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{m+n} \ominus \cdot u_{m+1}^{n+1}$$

ıd setzen:

$$= \quad u_i^i \quad - u_i^{i+1} + u_i^{i+2} - \ldots + (-1)^{n+i} \ominus_i u_i^{n+1}$$
$$= - u_{i+1}^i + u_{i+2}^i - u_{i+3}^i + \ldots + (-1)^{m+i} \ominus^{(i)} u_{m+1}^i$$

ist

$$J = Z_1 + C_1 + Z_2 + C_2 + \ldots\ldots = \sum_i (Z_i + C_i).$$

Wegen der Monotonie von u_i^l bestehen die Ungleichungen

$$u_i^i - u_i^{i+1} < Z_i < u_i^i$$
$$- u_{i+1}^i < C_i < - u_{i+1}^i + u_{i+2}^i$$
$$\sum_i (u_i^i - u_i^{i+1}) - \sum_i u_{i+1}^i < J < \sum_i u_i^i - \sum_i (u_{i+1}^i - u_{i+2}^i)$$
$$- \sum_i u_{i+1}^i > J < \sum_i u_i^i$$
$$- \sum_i u_{i+1}^i \equiv - \sum_i u_i^i + \sum_i (u_i^i - u_{i+1}^i) \geqq - \sum_i u_i^i$$

fglich
$$- \sum_i u_i^i < J < \sum_i u_i^i$$

dh. $|J| < \sum_i u_i^i$, denn die u_i^l sind positiv.

Nun ist gemäß (18):

$$u_1^1 < \psi(+0,+0) \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta < \pi^2 \psi(+0,+0)^{1})$$

und für $i > 1$

$$u_i^i < \psi(+0,+0) \cdot \frac{1}{(i-1)^2}$$

$$\therefore \sum_i u_i^i < \psi(+0,+0) \left\{ \pi^2 + \sum_2^q i \frac{1}{(i-1)^2} \right\}$$

Letztere Reihe konvergiert absolut. Bezeichnen wir ihr Summe mit σ, so bleibt die Klammergröße kleiner als $\pi^2 +$ wie groß auch q ausfallen mag, das mit $\varkappa$ und λ wächst. Es mu also durch passende Wahl von a_0, d_0 gelingen, $\psi(+0,+0) \cdot \varphi(+0,+0) - \varphi(a_0, d_0)$ so zu verkleinern, daß:

$$|J| < \sum_i u_i^i < \frac{\varepsilon_1}{3} \text{ wird, unabhängig von } \varkappa \text{ und } \lambda.$$

Führen wir dieses Resultat in (17) ein, so ergibt sich:

$$\left| I_1(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0,+0) \right| < \varepsilon_1, \quad \text{falls } \begin{cases} \varkappa > K_1 \\ \lambda > \Lambda_1 \end{cases}$$

Q. E. I

Zusatz:

Hülfssatz 4 gilt auch dann noch, wenn $\varphi(\gamma, \delta)$ eine gleich sinnig monoton zunehmende Funktion ist, oder sich als Summ zweier Funktionen darstellen läßt, wovon die eine gleichsinni monoton abnimmt, die andere zunimmt.

Denn ist $\varphi(\gamma, \delta)$ zunehmend, so ist $[-\varphi(\gamma, \delta)]$ abnehmen und die obige Beweismethode läßt sich hierauf anwenden Zusammenfassend können wir als Ergebnis dieses Paragraphe folgenden Hauptsatz über das Dirichletsche Integral aussprechen

„Ist $\varphi(\gamma, \delta)$ im Bereich

$$0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}\,;\ 0 \leqq \delta \leqq \frac{\pi}{2} \text{ endlich,}$$

und existieren in diesem Bereich die Grenzwerte:

$$\varphi(+0, \delta), \varphi(\gamma, +0), \varphi(+0, +0);$$

---

[1]) Man hat immer:

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| < \pi, \quad \text{für jedes } a \geqq 0, \quad b \leqq \infty$$

owie die Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\gamma,\delta)\,d\gamma\,d\delta,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\gamma,+0)\,d\gamma,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(+0,\delta)\,d\delta;$$

ann ich ferner:

A) für jedes beliebig klein vorgeschriebene a_0 ein d so klein finden, daß

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{d}\frac{|\varphi(\gamma,\delta)-\varphi(\gamma,+0)|}{\delta}\,d\gamma\,d\delta$$

endlich bleibt;

B) für jedes beliebig klein vorgeschriebene d_0 ein c so klein bestimmen, daß

$$\int_0^{c}\int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\varphi(\gamma,\delta)-\varphi(+0,\delta)|}{\gamma}\,d\gamma\,d\delta \text{ endlich bleibt;}$$

C) a_0 und d_0 so klein wählen, daß im Bereich

$$\begin{cases}0<\gamma\leqq a_0\\ 0<\delta\leqq d_0\end{cases}$$

$\varphi(\gamma,\delta)$ als Summe zweier Funktionen dargestellt werden kann, wovon die eine gleichsinnig monoton ab-, die andere zunimmt, so ist:

$$\lim_{\varkappa,\lambda=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\gamma,\delta)\,\frac{\sin\varkappa\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\sin\lambda\delta}{\delta}\,d\gamma\,d\delta=\frac{\pi^2}{4}\varphi(+0,+0).\text{“}$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Zerlegung (14) unter wendung der Hülfssätze 1 ... 4. Denn sind

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\frac{\varepsilon}{4}$$

liebig klein vorgeschrieben, so kann ich:

$$\left|I(\varkappa,\lambda)-\frac{\pi^2}{4}\varphi(+0,+0)\right|$$

$$\leqq\left|I_1(\varkappa,\lambda)-\frac{\pi^2}{4}\varphi(+0,+0)\right|+\left|I_2\right|+\left|I_3\right|+\left|I_4\right|$$

$$<\quad\varepsilon_1\qquad\qquad+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$$

$$<\quad\varepsilon\quad\text{machen, für } \varkappa>K,\ \lambda>\Lambda$$

durch passende Wahl der Größen a_0, c_0, d_0, K_i, $\mathcal{A}_i$ $(i = 1..4)$. Hi bedeutet $K, \mathcal{A}$ ein Zahlenpaar, welches entsprechend größer i als jedes der Paare K_i, $\mathcal{A}_i$.

Die Ungleichung

$$\left| I(\varkappa, \lambda) - \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0) \right| < \varepsilon$$

besagt aber nichts anderes als

$$\lim_{\varkappa, \lambda} I(\varkappa, \lambda) = \frac{\pi^2}{4} \varphi(+0, +0)$$

Q. E I

---

§ 3.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Doppelreihe im gewöhnliche Sinne.

Um aus der Diskussion des Dirichlet'schen Doppelintegral die Nutzanwendung auf das Summationsintegral der Fouriersche Doppelreihe zu ziehen, hatten wir in (10):

$$\varphi(\gamma, \delta) \equiv F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \cdot \frac{\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta} \text{ gesetzt.}$$

Es fragt sich nun, welche Bedingungen muß $f(x, y)$, resp $F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$, erfüllen, damit $\varphi(\gamma, \delta)$ den Forderungen des Haupt satzes über das Dirichletsche Integral genüge?

$$\text{Da } \lim_{\gamma, \delta = +0} \left\{ \frac{\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta} \right\} = 1$$

ist, so zieht die Bedingung der Endlichkeit und Integrabilität von $\varphi(\gamma, \delta)$ diejenige von $F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$, resp. $f(x, y)$, nach sich

Ferner ist:

$$\frac{\varphi(\gamma,\delta)-\varphi(\gamma+0)}{\delta} = \frac{\gamma}{\sin\gamma}\left\{\frac{F(x,y,2\gamma,2\delta)}{\sin\delta} - \frac{F(x,y,2\gamma,+0)}{\delta}\right\}$$

$$= \frac{\gamma}{\sin\gamma}\left\{F(x,y,2\gamma,2\delta)\left(\frac{1}{\sin\delta}-\frac{1}{\delta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{F(x,y,2\gamma,2\delta)-F(x,y,2\gamma,+0)}{\delta}\right\}$$

also:

$$\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{d}\frac{|\varphi(\gamma,\delta)-\varphi(\gamma,+0)|}{\delta}\,d\gamma\,d\delta < \frac{a_0}{\sin a_0}\left\{G\left|\int_0^d\left(\frac{1}{\sin\delta}-\frac{1}{\delta}\right)d\delta\right|\right.$$

$$\left. + \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{d}\left|\frac{F(x,y,2\gamma,2\delta)-F(x,y,2\gamma,+0)}{\delta}\right|d\gamma\,d\delta\right\}$$

$$\int_0^d\left(\frac{1}{\sin\delta}-\frac{1}{\delta}\right)d\delta = \lim_{\varepsilon=0}\left[\lg\frac{\tan\frac{\delta}{2}}{\delta}\right]_\varepsilon^d = \lg\left(\frac{\tan\frac{d}{2}}{d}\right) - \lg\frac{1}{2},$$

leibt daher $\int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^d \frac{|F(2\gamma,2\delta)-F(2\gamma,+0)|}{\delta}\,d\gamma\,d\delta$ endlich, so ist

Bedingung A) erfüllt. Ebenso Bedingung B), falls

$$\int_0^c\int_{d_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|F(2\gamma,2\delta)-F(+0,2\delta)|}{\gamma}\,d\gamma\,d\delta \quad \text{endlich ausfällt.}$$

Bedingung C) ist befriedigt, wenn $F(x,y,2\gamma,2\delta)$ sich in einer hinreichend kleinen Nachbarschaft von (x,y) in die Summe zweier Funktionen F_1 und F_2 zerlegen läßt, deren erste gleichsinnig monoton zu- die zweite abnimmt. Um dies einzusehen, schreiben wir:

$$\varphi = (F_1+F_2)\frac{\gamma}{\sin\gamma}\frac{\delta}{\sin\delta} = \varphi_1+\varphi_2$$

$$= (F_1+C)\frac{\gamma}{\sin\gamma}\frac{\delta}{\sin\delta} + (F_2-C)\frac{\gamma}{\sin\gamma}\frac{\delta}{\sin\delta},$$

wo C so groß gewählt sei, daß φ_1 immer positiv, φ_2 imme
negativ bleibt. Da $\frac{\gamma}{\sin\gamma} \cdot \frac{\delta}{\sin\delta}$ im betrachteten Bereich positi
ist und in beiden Variabeln gleichsinnig monoton wächst, s
können wir für φ_1 und φ_2 die vorher über F_1 und F_2 gemachte
Aussagen wiederholen. $\varphi(\gamma, \delta)$ genügt also unter obigen Voraus
setzungen über $F(x, y, 2\gamma, 2\delta)$ bezw. $f(x, y)$ sämtlichen Anfor
derungen des Hauptsatzes § 2, und wir erhalten unter Anwendung
auf (11):

$$s(x,y) = \lim_{m,n=\infty} s_m^n(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\varkappa,\lambda=\infty} I(\varkappa,\lambda) = \frac{1}{4}\varphi(+0,+0$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\gamma,\delta=0} \left\{ \frac{|\gamma|}{\sin|\gamma|} \cdot \frac{|\delta|}{\sin|\delta|} F(x,y,2|\gamma|,2|\delta|) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} F(x,y,+0,+0)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\gamma,\delta=0} \Big\{ f(x+|\gamma|, y+|\delta|) + f(x+|\gamma|, y-|\delta|$$
$$+ f(x-|\gamma|, y+|\delta|) + f(x-|\gamma|, y-|\delta|)$$

Zusammenfassend ergibt sich folgender Satz über die Entwicklung einer Funktion von zwei Variabeln in eine Fouriersche Doppelreihe:

Lehrsatz:

„Ist $f(x, y)$ eine in x und y mit 2π periodische, endliche und im Fundamentalquadrat

$$\left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq x \leq \pi \\ -\pi \leq y \leq \pi \end{array} \right\}$$

integrable Funktion, und definiert man:

$$F(x,y,\gamma,\delta) = f(x+\gamma, y+\delta) + f(x+\gamma, y-\delta) + f(x-\gamma, y+\delta) + f(x-\gamma, y-\delta)$$

so konvergiert die Fouriersche Doppelreihenentwicklung von $f(x,y)$

$$s(x,y) = \sum_0^\infty \mu,\nu \left[(a_\mu^\nu \cos\mu x + b_\mu^\nu \sin\mu x)\cos\nu y + (c_\mu^\nu \cos\mu x + d_\mu^\nu \sin\mu x)\sin\nu y \right]$$

gegen den Grenzwert:

$$\frac{1}{4} F(x,y,+0,+0) = \frac{1}{4} \lim_{\gamma,\delta=0} F(x,y,|\gamma|,|\delta|)$$

in jedem Punkte (x, y), wo folgende Bedingungen erfüllt sind:

(H_1) Es existieren die Grenzwerte: $F(x, y, +0, +0)$, $F(x, y, +0, \delta)$, $F(x\ y, \gamma, +0)$ für $0 \leqq \gamma \leqq \pi$, $0 \leqq \delta < \pi$, sowie die Integrale:

$$\int_0^{\pi} F(x, y, +0, \delta)\, d\delta \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} F(x, y, \gamma, +0)\, d\gamma.$$

(H_2) Man kann für jedes beliebig klein vorgeschriebene a_0 ein d so klein finden, daß

$$\int_{a_0}^{\pi} \int_0^{d} \frac{|F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, \gamma, +0)|}{\delta}\, d\gamma\, d\delta$$

endlich bleibt;

H_3) für jedes beliebig klein vorgeschriebene d_0 ein c so klein angeben, daß

$$\int_0^{c} \int_{d_0}^{\pi} \frac{|F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, +0, \delta)|}{\gamma}\, d\gamma\, d\delta$$

endlich bleibt;

H_4) a_0 und d_0 so klein bestimmen, daß $F(x, y, \gamma, \delta)$ in dem Bereich $\begin{cases} 0 < \gamma \leqq a_0 \\ 0 < \delta \leqq b_0 \end{cases}$ monotonoid ist, d. h. in die Summe zweier Funktionen zerlegt werden kann, von denen die eine nach beiden Axenrichtungen monoton zunimmt, die andere abnimmt."

Das Auftreten der Bedingungen H_2 und H_3 lehrt, daß die Entwickelbarkeit einer Funktion nicht nur von ihrem Verhalten in der unmittelbaren Umgebung des betrachteten Punktes abhängt, wie bei Funktionen von einer Variablen, sondern daß auch ihr Betragen in der Nähe des durch den Punkt gehenden Axenkreuzes in Frage kommt.

An Stelle von H_2 und H_3 hätten auch andere Bedingungen gesetzt werden können, welche gewisse Monotonie-Eigenschaften von $f(x, y)$ verlangen, ähnlich wie H_4, doch schienen mir H_2 und H_3 ebenso weitreichend und interessanter, weil sie das einzig

brauchbare sind, was man von der „Dini"schen Bedingung f Funktionen einer Variablen in die Theorie der Fourierschc Doppelreihen hinübernehmen kann. An die Stelle von H_4 würc man nämlich, dem Vorgange Dinis folgend, die Bedingung:

$$\int_0^a \int_0^b \frac{|F(\gamma, \delta) - F(+0, +0)|}{\gamma, \delta} \, d\gamma \, d\delta \text{ bleibt endlich}$$

zu setzen haben. Diese verlangt aber schon im einfachste Fall, dem der analytischen Funktion, das Verschwinden alle Differentialquotienten von höherer als der ersten Ordnung, w man durch eine Anwendung des Taylorschen Satzes auf

$$\{F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, +0, +0)\}$$

leicht sieht. Danach dürfte $f(x, y)$ nur eine lineare Funktio sein, was ein trivialer Fall.

Im Anschluß an H_4 will ich noch zeigen, daß die gewöhr licheren Funktionen, welche nach beiden Axenrichtungen monotor aber nicht gleichsinnig monoton sind, doch noch monotonoi sind.

Sei beispielsweise $f(x, y)$ nach der X-Richtung monoton at nehmend, nach der Y-Richtung zunehmend, so gelten für all $x, y, x + h, x + k$ des Bereichs

$$\begin{cases} x_0 \leqq x < x + h \leqq x_0 + a \\ y_0 \leqq y < y + k \leqq y_0 + b \end{cases}$$

die Ungleichungen:

$$f(x + h, y) - f(x, y) < 0; \qquad f(x, y + k) - f(x, y) > 0.$$

Es sei nun $\frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkte endlich und kleiner al $A - \delta$, ferner mögen die zweiten Differentialquotienten endlicl bleiben. Definiere ich $F(y) = A y$, so ist diese Funktion monotor zunehmend, $f(x, y) - F(y) = \psi(x, y)$ ist aber monoton ab nehmend, denn:

$$\psi(x + h, y + k) - \psi(x, y)$$

$$= f(x + h, y + k) - F(y + k) - f(x, y) + F(y)$$

$$= f(x + h, y + k) - f(x, y + k) + \{(f(x, y + k) - f(x, y)) - (F(y + k) - F(y))$$

$$< \quad 0,$$

da $f(x, y+k) - f(x, y) = k \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{k^2}{2!} M$, wo M endlich ist

$F(y+k) - F(y) = k \cdot A$

$f(x, y+k) - f(x, y) - F(y+k) + F(y) = k \left(\frac{\partial f}{\partial y} - A + \frac{k M}{2} \right) < 0,$

$$\text{wenn } 0 < k < \frac{2\delta}{M}.$$

Somit ist $f(x, y) = \varphi(x, y) + F(y)$ als Summe zweier entgegengesetzt monotoner Funktionen dargestellt, ist also monotonoid.

§ 4.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Diagonalreihe.

In § 1, Gleichung (13) fanden wir für die m^{te} Partialsumme der Diagonalreihe den Ausdruck:

$$\varphi_m(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \frac{\cos \varkappa\gamma \cos\gamma - \cos \varkappa\delta \cos\delta}{\cos 2\gamma - \cos 2\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

oder mit Hülfe von (12)

$$D_m(x, y) =$$

$$\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(2\gamma, 2\delta) \frac{\sin(m+1)(\gamma+\delta)\sin(m+1)(\gamma-\delta) + \sin m(\gamma+\delta)\sin m(\gamma-\delta)}{\sin(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)} \, d\gamma \, d\delta$$

In beiden Fällen verschwindet der Nenner für $\gamma = \delta$. Die Umgebung dieser Linie verlangt daher eine genauere Untersuchung. Wir führen die Substitution ein:

$$\begin{cases} \delta + \gamma = \xi; & \gamma = \frac{\xi - \eta}{2}; \\ \delta - \gamma = \eta; & \delta = \frac{\xi + \eta}{2}; \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial\xi} & \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\delta}{\partial\xi} & \frac{\partial\delta}{\partial\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Diese bedeutet geometrisch eine Rotation des Bezugsaxenkreuzes um 45°: $\begin{cases} \delta+\gamma=\alpha\sqrt{2} \\ \delta-\gamma=\beta\sqrt{2} \end{cases}$, verbunden mit einer Vergrößerung im Verhältnis $\frac{\sqrt{2}}{1}$; $\begin{cases} \alpha\sqrt{2}=\xi \\ \beta\sqrt{2}=\eta \end{cases}$

Die Integrationsgrenzen sind aus der Figur leicht zu entnehmen:

$$D_m(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\xi}^{+\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{-\pi+\xi}^{\pi-\xi}\right\} F(\xi-\eta,\xi+\eta)\,\frac{\sin(m+1)\xi\,\sin(m+1)\eta + \sin m\xi\,\sin m\eta}{\sin\xi\cdot\sin\eta}\,d\xi\,d\eta$$

$$D_m(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\pi-\xi}\right\} [F(\xi-\eta,\xi+\eta)+F(\xi+\eta,\xi-\eta)]\,\frac{\sin(m+1)\xi\sin(m+1)\eta+\sin m\xi\sin m\eta}{\sin\xi\cdot\sin\eta}\,d\xi\,d\eta$$

$$D_m(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\pi-\xi}\right\} \varphi(\xi,\eta)\left[\frac{\sin(m+1)\xi}{\xi}\,\frac{\sin(m+1)\eta}{\eta} + \frac{\sin m\xi}{\xi}\,\frac{\sin m\eta}{\eta}\right] d\xi\,d\eta$$

wenn wir $\varphi(\xi,\eta) = \frac{\xi}{\sin\xi}\cdot\frac{\eta}{\sin\eta}[F(\xi-\eta,\xi+\eta)+F(\xi+\eta,\xi-\eta)]$ setzen.

Dies sind wieder Integrale von der Natur des Dirichletschen. Wie zuvor können wir $D_m(x,y)$ in drei wesentlich verschiedene Gattungen von Teilintegralen zerlegen:

$$2\pi^2 D_m = \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} + \int_{a_0}^{\pi-a_0}\int_0^{a_0} + \int_{\pi-a_0}^{\pi}\int_0^{\pi-\xi} + \int_{a_0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a_0}^{\xi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{a_0}^{\pi-\xi}$$

$$= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5$$

Hier ist a_0 eine positive beliebig zu verkleinernde Konstante.

$$D_1 = \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \varphi(\xi,\eta)\,\frac{\sin(m+1)\xi}{\xi}\,\frac{\sin(m+1)\eta}{\eta}\,d\xi\,d\eta$$

$$+ \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \varphi(\xi,\eta)\,\frac{\sin m\xi}{\xi}\,\frac{\sin m\eta}{\eta}\,d\xi\,d\eta$$

icht im Charakter ganz dem früher im 4. Hülfssatz besprochenen egral $I_1(\varkappa,\lambda)$. Man beweist leicht unter derselben Voraus- zung wie dort, wonach $\varphi(\xi,\eta)$ in der Umgebung von $(0,0)$ in gegengesetzt monotone Komponenten zerlegbar sein soll[1]), daß

$$\left| D_1 - \frac{\pi^2}{4}\,\overline{\varphi}\,(+0,+0)\right| < \varepsilon_1$$

ein hinreichend klein gewähltes a_0 und $m > M_1$.

Der hierbei auftretende Grenzwert:

$$\lim_{p=\infty} \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \frac{\sin p\xi}{\xi}\,\frac{\sin p\eta}{\eta}\,d\xi\,d\eta$$ geht durch die Substitutionen

$$\begin{cases} p\eta = y \\ p\xi = x \end{cases} \qquad \text{über in} \int_0^{\infty}\int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{8},$$

swegen

$$\lim_{=\infty} \int_0^{a_0}\int_0^{\xi} \left[\frac{\sin(m+1)\xi}{\xi}\,\frac{\sin(m+1)\eta}{\eta} + \frac{\sin m\xi}{\xi}\,\frac{\sin m\eta}{\eta}\right] d\xi\,d\eta$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Unter dem in (19) auftretenden Symbol $(\overline{\varphi}+0,+0)$ ist ender Grenzwert zu verstehen:

$\overline{\varphi}\,(+0,+0) = \lim_{\xi,\eta=+0} \varphi(\xi,\eta)$ mit der Nebenbedingung:

$$0 \leqq \eta \leqq \xi$$

[1]) Deren jede für sich nach beiden Axenrichtungen ξ, η gleichsinnig oton ist.

Ebenso wie D_1 nimmt auch

$$D_3 = \int_{\pi-\alpha_0}^{\pi} \int_0^{\pi-\xi} \left[F(\xi-\eta, \xi+\eta) + F(\xi+\eta, \xi-\eta)\right] \frac{\sin(m+1)\xi \sin(m+1)\eta + \sin m\xi \sin m\eta}{\sin\xi \sin\eta} d\xi\, d\eta$$

durch die Transformation: $\xi = \pi - \xi'$; $d\xi = -d\xi'$ eine $I_1(\varkappa, \lambda)$ analoge Gestalt an:

$$D_3 = \int_0^{a_0} \int_0^{\xi} \Big\{ F(\pi-\xi-\eta, \pi-\xi+\eta) + F(\pi-\xi+\eta, \pi-\xi-\eta$$

$$\cdot \Big\{ \frac{(-1)^m \sin(m+1)\xi \sin(m+1)\eta}{\sin\xi \sin\eta} + \frac{(-1)^{m+1} \sin m\xi \sin m\eta}{\sin\xi \sin\eta} \Big\} d\xi\, d\eta$$

$$= (-1)^m \int_0^{a_0} \int_0^{\xi} \Big\{ F(\pi-\xi-\eta, \pi-\xi+\eta) + F(\pi-\xi+\eta, \pi-\xi$$

$$\frac{\sin(m+1)\xi \sin(m+1)\eta - \sin m\xi \sin m\eta}{\sin\xi \sin\eta} d\xi\, d\eta$$

Verlangt man also von $F(\xi-\eta, \xi+\eta) + F(\xi+\eta, \xi-\eta)$ d Zerlegbarkeit in entgegengesetzt monotone Komponenten au noch in der Umgebung der Stelle ($\xi = \pi$, $\eta = 0$), so läßt si durch hinreichend kleine Wahl von a_0 bewirken, daß

$$|D_3 - C\,\overline{\varphi}(\pi-0, +0)| = |D_3| < \varepsilon_3 \text{ für } m > M_3$$

Der Koeffizient C nämlich, der dem Faktor $\frac{\pi^2}{4}$ in (19) entsprich hat hier den Wert Null.

$$C = \lim_{m=\infty} \int_0^{a_0} \int_0^{\xi} \Big\{ \frac{\sin(m+1)\xi}{\xi} \frac{\sin(m+1)\eta}{\eta} - \frac{\sin m\xi}{\xi} \frac{\sin m\eta}{\eta} \Big\} d\xi\, d\eta = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} = 0$$

$|D_2| < \varepsilon_2$, wenn man wie in Hülfssatz 2 annimmt,

daß: $\int_0^{\pi} \int_0^{a} \left| \frac{\varphi(\xi,\eta) - \varphi(\xi, +0)}{\eta} \right| d\xi\, d\eta$ endlich bleibt.

Schließlich lassen sich D_4 und D_5 nach der Methode von ilfssatz 1 durch alleinige Vergrößerung von m beliebig ver- inern, da in diesen Integralen die Nenner niemals unter eine, nn auch kleine, positive Schranke hinabsinken.

Unter den angeführten Voraussetzungen ergibt sich als End- sultat:

$$\lim_{m=\infty} Dm\,(x, y) = \frac{1}{8}\,\overline{\varphi}\,(+0, +0)$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \lim_{\substack{\xi=+0 \\ \eta=+0}} \overline{F}\,(2\gamma, 2\delta) + \lim_{\substack{\xi=+0 \\ \eta=-0}} \overline{F}\,(2\gamma, 2\delta) \right\}$$

Aus der Art, wie dieses Resultat gewonnen wurde, erhellt, ß die Funktion $f(x, y)$ in dem betrachteten Punkte (x_0, y_0) vier listetigkeitsgeraden haben kann, die Winkel von 45° mit einander den und wovon zwei parallel zu den Koordinatenaxen $\overrightarrow{0X}$, $\overrightarrow{0Y}$ entiert sind. In jedem Oktanten muß sich die Funktion beim ergang in den Punkt (x_0, y_0) einem endlichen Grenzwert nähern. e Diagonalreihe gibt das arithmetische Mittel dieser acht Grenz- rte, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

) $f(x, y)$ ist endlich und integrabel,

) legt man durch den Punkt (x_0, y_0) ein unter $+45°$ gegen das ursprüngliche geneigtes Koordinatensystem mittels der Transformation:

$$\begin{cases} x = \xi - \eta - x_0 \\ y = \xi + \eta - y_0 \end{cases}$$

so existiert: $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+2\pi}\int_{-a}^{+a} \frac{|F(x_0, y_0, \xi, \eta) - F(x_0, y_0, \xi, +0)|}{\eta}\,d\xi\,d\eta$

) In der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) sowie des Punktes $(x_0 + \pi, y_0 + \pi)$ ist $f(x, y)$ in die Summe zweier entgegengesetzt monotonen Funktionen zerlegbar, welche in Richtung der Diagonalen der ursprünglichen Koordinatenaxen $(\overrightarrow{0X}, \overrightarrow{0Y})$ gleichsinnig zu- bezw. abnehmen.

§ 5.

Die Fejèrsche Summationsmethode.

Auf pag. 12 (Gl. 9) fanden wir folgende Formel für d Partialsumme s_m^n der Fourierschen Entwicklung von $f(x, y)$:

$$s_m^n(x, y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} \frac{\sin(2n+1)\delta}{\sin\delta} d\gamma\, d\delta.$$

Wir wollen beweisen, daß die Doppelfolge der arithme schen Mittel aus diesen Partialsummen, nämlich:

$$M_p^q = \frac{1}{p, q} \sum_0^{p-1} m \sum_0^{q-1} n\, s_m^n(x, y) = \frac{1}{p \cdot q} S_{p-1}^{q-1}(x, y), \quad \begin{cases} p = 1, 2, \\ q = 1, 2, \end{cases}$$

dem Grenzwerte $\frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$ zustrebt, falls dieser existie und die Funktion $f(x, y)$ als endlich und im Fundamentalquadr integrabel vorausgesetzt wird.

Es soll also gezeigt werden, daß:

$$\lim_{p, q = \infty} M_p^q(x\, y) = \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) \quad \text{ist.}$$

Wir haben

$$S_{p-1}^{q-1} = \sum_0^{p-1} m \sum_0^{q-1} n\, s_m^n$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta) \sum_0^{p-1} m \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} \sum_0^{q-1} n \frac{\sin(2n+1)\delta}{\sin\delta} d\gamma\, d$$

und da

$$\sum_0^{p-1} m \frac{\sin(2m+1)\gamma}{\sin\gamma} = \sum_0^{p-1} m \frac{2\sin\gamma \sin(2m+1)\gamma}{2\sin^2\gamma}$$

$$= \sum_0^{p-1} m \frac{\cos 2m\gamma - \cos 2(m+1)\gamma}{2\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos 2p\gamma}{2\sin^2\gamma} = \left(\frac{\sin p\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 = \sigma_p^2(\gamma)$$

geschrieben werden möge,

ist

$$S_p^q = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, 2\gamma, 2\delta)\ \sigma_p^2(\gamma)\, \sigma_q^2(\delta)\, d\gamma\, d\delta. \tag{1}$$

Erinnern wir uns nun der folgenden Formeln, die in der ıter [2]) p. 6 zitierten Arbeit von Fejèr näher begründet werden:

$$\frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma = \frac{\pi}{2}; \qquad p = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

).

$$\lim_{p=\infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \right\} = 0$$

I). $$\lim_{p=\infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^{a} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \right\} = \lim_{p=\infty} \left[\frac{1}{p} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \right\} \sigma_p^2(\gamma)\, d\gamma \right] = \frac{\pi}{2}$$

ergibt sich:

$$M_p^q = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(2\gamma, 2\delta)}{p \cdot q}\, \sigma_p^2(\gamma)\, \sigma_q^2(\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)}{p \cdot q}\, \sigma_p^2(\gamma)\, \sigma_q^2(\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$+ F(+0, +0) \cdot \frac{1}{p\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma)\, \delta\gamma \cdot \frac{1}{q\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_q^2(\delta)\, d\delta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)}{p \cdot q} \sigma_p^2(\gamma) \sigma_q^2(\delta) \, d\gamma \, d$$

$$+ \frac{1}{4} F(+0, +0)$$

und

$$M_p^q - \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^a \int_0^b + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \int_0^b + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \right\} \frac{F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)}{p \cdot q} \sigma_p^2(\gamma) \sigma_q^2(\delta) \, d\gamma \, d$$

Wegen der Existenz von $F(+0, +0)$ muß man a und b klein wählen können, daß

$$|F(2\gamma, 2\delta) - F(+0, +0)| < 4\varepsilon_1 \text{ für } \begin{cases} 0 < 2\gamma \leqq a \\ 0 < 2\delta \leqq b \end{cases}$$

Da ferner

$$|f(x, y)| < G \text{ also } |F(+0, +0)| < 4G,$$

so folgt unter Benutzung der Formeln II) und III)

$$\left| M_p^q - \frac{1}{4} F(+0, +0) \right| < 4\varepsilon_1 \frac{1}{\pi p} \int_0^a \sigma_p^2(\gamma) \, d\gamma \cdot \frac{1}{\pi q} \int_0^b \sigma_q^2(\delta) \, d\delta$$

$$+ \frac{8G}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{p} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma) \, d\gamma \cdot \frac{1}{q} \int_0^b \sigma_q^2(\delta) \, d\delta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_p^2(\gamma) \, d\gamma \cdot \frac{1}{q} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \sigma_q^2(\delta) \, d\delta \right\}$$

$$\left| M_p^q - \frac{1}{4} F(+0, +0) \right| < \varepsilon_1 + \frac{8G}{\pi^2} \left\{ \varepsilon_2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon_3 \right\}$$

$$< \varepsilon, \text{ wenn } p > P, \; q > Q$$

Also ist $\lim_{p,\,q=\infty} M_p^q(x,y) = \frac{1}{4} F(x,y,+0,+0)$

Q. E. D.

Wenn $f(x,y)$ stetig ist, so wird $F(x,y,+0,+0) = 4f(x,y)$ daher $\lim_{q=\infty} M_p^q(x,y) = f(x,y)$, ohne weitere Voraussetzungen über den Charakter der Stetigkeit.

Da eine in jedem Punkte eines abgeschlossenen Bereichs stetige Funktion dort gleichmäßig stetig ist, also ein allgemein gültiges ε_1 für alle (x,y) besitzt, so sieht man aus obigem ohneweitere sofort, daß die Annäherung von $M_p^q(x,y)$ an $f(x,y)$ eine gleichmäßige ist. Dann muß aber auch die aus der Folge M_p^q gebildete Doppelreihe gleichmäßig gegen $f(x,y)$ konvergieren.

Wir erhalten diese Doppelreihe durch den Ansatz:

$$M_p^q = M_1^1 + \sum_2^q{}_r (M_r^1 - M_{r-1}^1) + \sum_2^q{}_t (M_1^t - M_1^{t-1})$$
$$+ \sum_2^p{}_r \sum_2^q{}_t (M_r^t - M_r^{t-1} - M_{r-1}^t + M_{r-1}^{t-1})$$
$$= s_0^0 + \sum_1^{p-1}{}_r \frac{1}{r(r+1)} \left(r\, s_r^0 - (r+1)\, s_{r-1}^0 \right)$$
$$+ \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{t(t+1)} \left(t\, s_0^t - (t+1)\, s_0^{t-1} \right)$$
$$+ \sum_1^{p-1}{}_r \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{r\,t\,(r+1)(t+1)} \left(r\,t\, s_r^t - r(t+1)\, s_r^{t-1} \right.$$
$$\left. - (r+1)\, t\, s_{r-1}^t + (r+1)(t+1)\, s_{r-1}^{t-1} \right)$$
$$= s_0^0 + \sum_1^{p-1}{}_r \frac{1}{r(r+1)} \left(r\, s_r^0 - \sum_0^{r-1}{}_m s_m^0 \right)$$
$$+ \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{t(t+1)} \left(t\, s_0^t - \sum_0^{t-1}{}_n s_0^n \right)$$
$$+ \sum_1^{p-1}{}_r \sum_1^{q-1}{}_t \frac{1}{r\,t\,(r+1)(t+1)} \left(r\,t\, s_r^t - r \sum_0^{t-1}{}_n s_r^n \right.$$
$$\left. - t \sum_0^{r-1}{}_m s_m^t + \sum_0^{r-1}{}_m \sum_0^{t-1}{}_n s_m^n \right)$$

$$\text{Nun ist } r s_r^0 - \sum_0^{r-1 m} s_m^0 = r \sum_0^r{}_\mu B_\mu^0 - \sum_0^{r-1 m} \sum_0^m{}_\mu B_\mu^0$$

$$= r \sum_0^r{}_\mu B_\mu^0 - \sum_0^{r-1 r-1} \sum_\mu^m B_\mu^0$$

$$= r \sum_0^r{}_\mu B_\mu^0 - \sum_0^{r-1} (r-\mu) B_\mu^0$$

$$= r B_r^0 + \sum_1^{r-1} \mu B_\mu^0$$

$$= \sum_1^r{}_\mu \mu B_\mu^0$$

$$\text{ebenso } t s_0^t - \sum_0^{t-1} s_0^n = \sum_1^t{}_\nu \nu B_0^\nu$$

und

$$r t s_r^t - r \sum_0^{t-1} s_r^n - t \sum_0^{r-1} s_m^t + \sum_0^{r-1} \sum_0^{t-1} s_m^n$$

$$= r \sum_0^r{}_\mu \left(t \sum_0^t{}_\nu B_\mu^\nu - \sum_0^{t-1} \sum_0^n{}_\nu B_\mu^\nu \right) - \sum_0^{r-1} \sum_0^m{}_\mu \left(t \sum_0^t{}_\nu B_\mu^\nu - \sum_0^{t-1} \sum_0^n{}_\nu B_\mu^\nu \right)$$

$$= r \sum_0^r{}_\mu \left(\sum_1^t{}_\nu \nu B_\mu^\nu \right) - \sum_0^{r-1} \sum_0^m{}_\mu \left(\sum_1^t{}_\nu \nu B_\mu^\nu \right)$$

$$= \sum_1^r{}_\mu \mu \sum_1^t{}_\nu \nu B_\mu^\nu$$

weswegen:

$$M_p^q = B_0^0 + \sum_1^{p-1} r \frac{1}{r(r+1)} \sum_1^r{}_\mu \mu B_\mu^0 + \sum_1^{q-1} t \frac{1}{t(t+1)} \sum_1^t{}_\nu \nu B$$

$$+ \sum_1^{p-1} r \sum_1^{q-1} t \frac{1}{r \cdot t\,(r+1)\,(r+1)} \sum_1^r{}_\mu \mu \sum_1^t{}_\nu \nu B_\mu^\nu$$

für $p = 2, 3, 4 \ldots$
$q = 2, 3, 4 \ldots$

woraus sich für $\lim p, q = \infty$ die gewünschte Fejèrsche Doppelreih ergibt. Wir können nun als Ergebnis dieses Paragraphe folgenden Satz aussprechen:

„Ist $f(x,y)$ eine endliche, in x und y nach 2π periodisch und im Fundamentalquadrat integrable Funktion, so konvergier die Fejèrsche Doppelreihenentwicklung von $f(x,y)$:

$$22)\quad B_0^0 + \sum_1^{\infty r} \frac{1}{r(r+1)} \sum_1^r{}_\mu\, \mu\, B_\mu^0 + \sum_1^{\infty t} \frac{1}{t(t+1)} \sum_1^t{}_\nu\, \nu\, B_0^\nu$$
$$+ \sum_1^{\infty r} \sum_1^{\infty t} \frac{1}{r\,t\,(r+1)(t+1)} \sum_1^r{}_\mu\, \mu \sum_1^t{}_\nu\, \nu\, B_\mu^\nu$$

wo $B_\mu^\nu = \left(a_\mu^\nu \cos \mu x + b_\mu^\nu \sin \mu x\right) \cos \nu y$
$+ \left(c_\mu^\nu \cos \mu x + d_\mu^\nu \sin \mu x\right) \sin \nu y$

und a, b, c, d die Fourierschen Konstanten von $f(x, y)$ bedeuten, gegen den Grenzwert:

$$\frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) = \frac{1}{4} \Big\{ f(x+0, y+0) + f(x+0, y-0)$$
$$+ f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0) \Big\}$$

überall, wo dieser existiert. Sie konvergiert gleichmäßig gegen (x, y) in jedem abgeschlossenen Bereich, in welchem $f(x, y)$ stetig ist."

§ 6.

Über das Poissonsche Doppelintegral.

Führt man in die Fouriersche Doppelreihe:

$$(x, y) = \lim_{m, n = \infty} \Big[\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta) \Big\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_1^m{}_\mu \cos \mu (\alpha - x)$$
$$- \frac{1}{2} \sum_1^n{}_\nu \cos \nu (\beta - y) + \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu \cos \mu (\alpha - x) \cos \nu (\beta - y) \Big\} d\alpha\, d\beta \Big]$$

die Konvergenzfaktoren $r^\mu \cdot \varrho^\nu$ ein, so daß

$$(x, y, r, \varrho) = \lim_{m, n = \infty} \Big[\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta) \Big\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_1^m{}_\mu\, r^\mu \cos \mu (\alpha - x)$$
$$\frac{1}{2} \sum_1^n{}_\nu\, \varrho^\nu \cos \nu (\beta - y) + \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu\, r^\mu \varrho^\nu \cos \mu (\alpha - x) \cos \nu (\beta - y) \Big\} d\alpha\, d\beta \Big]$$

wird, so läßt sich mit Hülfe der Formel:

(23)

$$\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \mu\, r^\mu \cos\mu = \varphi\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi} = \frac{1}{2} P(r, \varphi) \quad \begin{matrix} r < \\ \varrho < \end{matrix}$$

die Doppelreihe summieren. Es ist nämlich:

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \lim_{m,\, n = \infty} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \left[\frac{1}{2} + \sum_1^m \mu\, r^\mu \cos\mu(\alpha - x) \right] \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \nu\, \varrho^\nu \cos\nu(\beta - y) \right] d\alpha\, d\beta \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta) \left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \mu\, r^\mu \cos\mu(\alpha - x) \right]$$

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \nu\, \varrho^\nu \cos\nu(\beta - y) \right] d\alpha\, d\beta$$

$$(24) \qquad = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta,$$

wo man Summation und Integration vertauscht hat. Das ist aber hier gestattet, weil die beiden Reihen vom Typus:

$$\sum_1^\infty \mu\, f(\alpha, \beta)\, r^\mu \cos\mu(\mu - x) < G \sum_1^\infty \mu\, r^\mu$$

für $\begin{cases} r < 1 \\ \varrho < 1 \end{cases}$ gleichmäßig (und auch absolut) konvergieren.

Wir sehen nun von allen früher, bei der Fourierschen Reihe über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen, mit Ausnahme der Endlichkeit, Periodizität und Integrabilität ab, definieren $\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, \beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta$$

und fragen nach dem Werte von $\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$ · Transformiert man $\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$ durch die Substitution

25) $$\begin{cases} \alpha - x = \gamma; & \alpha = x + \gamma; & d\alpha = d\gamma \\ \beta - y = \delta; & \beta = y + \delta; & d\beta = d\delta \end{cases}$$

so wird:

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{(-\pi-x)}^{\pi-x} \int_{(-\pi-y)}^{\pi-y} f(x+\gamma, y+\delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+\gamma, y+\delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

wegen der Periodizität von f und P.

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} \right\} f(x+\gamma, y+\delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

26) $$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} F(x, y, \gamma, \delta)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

wo $F(x, y, \gamma, \delta) = f(x+\gamma, y+\delta) + f(x+\gamma, y-\delta) + f(x-\gamma, y+\delta) + f(x-\gamma, y-\delta)$

Sei $a > 0, b > 0$; sonst aber beliebig klein konstant; so ist

$$\mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_0^{a}\int_0^{b} + \int_a^{\pi}\int_0^{b} + \int_0^{\pi}\int_b^{\pi} \right\} F(x, y, r, \varrho)\, P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

27) $$= \frac{1}{4\pi^2} (I_1 + I_2 + I_3)$$

Ich beweise zunächst, daß die zwei letzten Integrale für $\lim r, \varrho = 1$ verschwinden.

$$|I_2 + I_3| < G \left\{ \int_a^{\pi} |P(r, \gamma)|\, d\gamma \int_0^{b} |P(\varrho, \delta)|\, d\delta + \int_0^{\pi} |P(r, \gamma)|\, d\gamma \int_b^{\pi} |P(\varrho, \delta)|\, d\delta \right\}$$

wo $G > |F(x, y, r, \varrho)|$ eine endliche Zahl, wenn wir f (x, y) als endlich voraussetzen.

28) Nun ist $P(r, \gamma) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\gamma} \geq \frac{1 - r^2}{(1+r)^2} = \frac{1-r}{1+r} > 0$,

wenn $r < 1$, daher $|P(r, \gamma)| = P(r, \gamma)$

Bleibt ferner γ im Intervalle $0 < \xi \leqq \gamma \leqq \pi$, so ist

$$1 + r^2 - 2\,r\cos\gamma = (1-r)^2 + 2\,r\,(1-\cos\varphi) = (1-r)^2 + 4\,r\,\sin^2$$

$$> 4\,r\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$> 4\,r\sin^2\frac{\xi}{2}$$

also:

$$P(r,\gamma) < \frac{1-r^2}{4\,r\,\sin^2\frac{\xi}{2}} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 < r \leqq 1 \\ 0 < \xi \leqq \gamma \leqq \pi \end{cases} \tag{29}$$

Da zweitens

$$\int P(r,\gamma)\,d\gamma = \int \frac{1-r^2}{1+r^2-2\,r\cos\gamma}\,d\gamma$$

$$= 2\,\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + c$$

so folgt

$$\int_0^{\xi} P(r,\gamma)\,d\gamma = 2\,\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\right) \leqq \pi \tag{30}$$

$$\text{für} \quad \begin{cases} 0 \leqq \xi \leqq \pi \\ 0 < r < 1 \end{cases}$$

Aus den Ungleichungen (29) und (30) ergibt sich:

$$|I_2 + I_3| < G\left\{\frac{\pi}{4\,r}\cdot\frac{1-r^2}{\sin^2\frac{a}{2}} + \frac{\pi}{4\,\varrho}\cdot\frac{1-\varrho^2}{\sin^2\frac{b}{2}}\right\}$$

$$< (1-r^2)\,A + (1-\varrho^2)\,B$$

wo A und B Konstanten sind. Man hat also ohne weiteres:

$$\lim_{r,\,\varrho=1} |I_2 + I_3| = \lim_{r,\,\varrho=1}\left\{(1-r^2)\,A + (1-\varrho^2)\,B\right\} = 0 \tag{31}$$

Wir machen nun die weitere Annahme, daß $F(x,y,+0,+0)$ existiert und beweisen, daß durch hinreichende Verkleinerung von a, b:

$|I_1 - \pi^2 \cdot F(x,y,r,\varrho)| < \varepsilon$ wird, wenn $\begin{cases} 1-\delta_\varepsilon \leq r \leq 1 \\ 1-\eta_\varepsilon < \varrho \leq 1 \end{cases}$

und δ_ε, η_ε hinreichend klein.

$$I_1 - \pi^2 F(x, y, +0, +0)$$

$$= \int_0^a \int_0^b [F(x,y,\gamma,\delta) - F(x,y,+0,+0)] P(r,\gamma) P(\varrho,\delta) \, d\gamma \, d\delta$$

$$+ F(x, y, +0, +0) \left\{ \int_0^a P(r, \gamma) \, d\gamma \int_0^b P(\varrho, \delta) \, d\delta - \pi^2 \right\}$$

$$|I_1 - \pi^2 F(x,y, +0, +0)| <$$

$$\varepsilon_1 \pi^2 + G \left\{ 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{b}{2}\right) - \pi^2 \right\}$$

wenn a, b so klein genommen wird, daß

$$|F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, +0, +0)| < \varepsilon_1 \text{ für } \begin{cases} 0 < \gamma \leqq a \\ 0 < \delta \leqq b \end{cases}$$

Hat man aber erst a, b fixiert, so kann man

$$\delta_\varepsilon < \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{M}, \quad \eta_\varepsilon < \frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{N}$$

so klein wählen, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{a}{2} > \frac{1}{\delta_\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{a}{2} > M \\ \frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{b}{2} > \frac{1}{\eta_\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{b}{2} > N \end{aligned}\right\}, \quad \begin{aligned} &\text{wo } 1 - \delta_\varepsilon \leqq r \leqq 1 \\ &\text{und } 1 - \eta_\varepsilon \leqq \varrho \leqq 1 \\ &\text{und } M, N \text{ beliebig groß.} \end{aligned}$$

Folglich wird:

$$\left| 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{b}{2}\right) - \pi^2 \right| <$$

$$\left| 4 \operatorname{arctg} M \operatorname{arctg} N - \pi^2 \right| < \varepsilon_1$$

wenn M und N groß genug gewählt wurden.

Es ergibt sich:

32) $$|I_1 - \pi^2 F(x, y, +0, +0)| < \varepsilon_1 (\pi^2 + G) < \varepsilon,$$

wenn $1 - \delta_\varepsilon \leqq r \leqq 1$, $1 - \eta_\varepsilon \leqq \varrho \leqq 1$

Wir können nunmehr folgenden Satz aussprechen:

„Ist f (x, y) eine im Fundamentalquadrat $\begin{cases} -\pi \leqq x \leqq \pi \\ -\pi \leqq y \leqq \pi \end{cases}$

endliche, integrable Funktion, so ist der Grenzwert des Poissonschen Integrals:

$$\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho)$$

$$= \lim_{r,\varrho=1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha,\beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0)$$

$$= \frac{1}{4}\left[f(x+0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0)\right]$$

in jedem Punkte (x, y), wo der letzte Ausdruck existiert."

Denn aus der Zerlegung (27) folgt mit Hülfe von (31) und (32)

$$\left| \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) - \frac{1}{4} F(x, y, +0, +0) \right|$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left| I_1 - \pi^2 F(x, y, +0, +0) \right| + \frac{1}{4\pi^2} \left| I_2 + I_3 \right|$$

$$< \frac{\varepsilon'}{4\pi^2} + \frac{\varepsilon''}{4\pi^2} < \varepsilon$$

wenn a und b klein genug und r, ϱ nahe der Einheit.

Selbstverständlich gilt für einen Stetigkeitspunkt:

$$\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = f(x, y).$$

Wir wenden uns nun dem Falle zu, wo (x, y) auf einer beliebig gegen die Axen gerichteten Unstetigkeitsgeraden liegt. Die Gleichung der Geraden sei:

$\beta - y = p(\alpha - x)$, wenn α, β die laufenden Koordinaten

oder $\delta = p\gamma$, nach Einführung der Transformation (25).

Wir postulieren noch

$$0 < |p| < \infty$$

Es genügt, wenn wir das I_1 betrachten, denn hier ist wie zuvor in (31)

$$\lim_{r,\varrho=1} (I_2 + I_3) = 0$$

$$I_1 = \int_0^a \int_0^b F(x, y, \gamma, \delta)\ P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} f(x+\gamma, y+\delta)\ P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

33)
$$= \left\{ \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{p\gamma} + \int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{b} \right\} f(x+\gamma, y+\delta)\ P(r, \gamma,)\ P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta,$$

wo $b = pa$ sein soll. Wir nehmen die Fälle $p = 0$, $p = \infty$ aus, da sie durch den vorhergehenden Satz erledigt sind. Bei Annäherung an den festen Punkt (x, y) soll $f(x, y)$ zwei verschiedene Grenzwerte f_2 und f_1 annehmen, je nachdem der variable Punkt stets oberhalb oder unter der Unstetigkeitsgeraden liegt. In Zeichen:

34)
$$f_1(x, y) = \lim_{\gamma, \delta = 0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \begin{cases} -a \leqq \gamma \leqq a \\ -b \leqq \delta < p\gamma \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \lim_{\gamma, \delta = 0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \begin{cases} -a \leqq \gamma \leqq a \\ p\gamma < \delta \leqq b \end{cases}$$

Dann kann man schreiben:

$$I_1 = \int_{-a}^{a} d\gamma \int_{-b}^{p\gamma} d\delta \Big[f(x+\gamma, y+\delta) - f_1(x, y) \Big] P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)$$

$$+ f_1(x, y) \int_{-a}^{a} P(r, \gamma)\, d\gamma \int_{-b}^{p\gamma} P(\varrho, \delta)\, d\delta$$

$$+ \int_{-a}^{a} d\gamma \int_{p\gamma}^{b} d\delta \Big[f(x+\gamma, y+\delta) - f_2(x, y) \Big] P(r, \gamma)\ P(\varrho, \delta)$$

$$+ f_2(x, y) \int_{-a}^{a} P(r, \gamma)\, d\gamma \int_{p\gamma}^{b} P(\varrho, \delta)\, d\delta$$

35)
$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

Ist $\lambda^{(1)}(a, b)$ die obere Grenze der Funktion

$|f(x+\gamma, y+\delta) - f_1(x, y)|$ im Bereich $\begin{cases} -a \leqq \gamma \leqq a \\ -b \leqq \delta < p\gamma \end{cases}$

und $\lambda^{(2)}(a, b)$ diejenige von

$|f(x+\gamma, y+\delta) - f_2(x, y)|$ im Bereich $\begin{cases} -a \leqq \gamma \leqq a \\ p\gamma < \delta \leqq b \end{cases}$

so ist

$$(36) \qquad |J_1| + |J_3| < 2\pi^2 \lambda^{(1)}(a, b) + 2\pi^2 \lambda^{(2)}(a, b) < \varepsilon_1$$

wenn a klein genug, da b ja mit a verschwindet;

ferner:

$$|J_2 + J_4 - 2\pi^2 [f_1(x, y) + f_2(x, y)]|$$

$$< G \left| \int_{-a}^{a} P(r, \gamma)\, \delta\gamma \int_{-b}^{p\gamma} P(\varrho, \delta)\, d\delta - 2\pi^2 \right|$$

$$+ G \left| \int_{-a}^{a} P(r, \gamma)\, d\gamma \int_{p\gamma}^{b} P(\varrho, \delta)\, d\delta - 2\pi^2 \right|$$

Nun ist $\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{p\gamma} = \left\{ \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} \right\} \int_{-b}^{p\gamma} = \int_{0}^{a} \left\{ \int_{-b}^{-p\gamma} + \int_{-b}^{p\gamma} \right\} = \int_{0}^{a} \left\{ \int_{-b}^{-p\gamma} + \int_{-p\gamma}^{b} \right\} = \int_{0}^{a} \int_{-b}^{+}$

und $\int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{b} = \left\{ \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} \right\} \int_{p\gamma}^{b} = \int_{0}^{a} \left\{ \int_{-p\gamma}^{b} + \int_{p\gamma}^{b} \right\} = \int_{0}^{a} \left\{ \int_{-b}^{p\gamma} + \int_{p\gamma}^{b} \right\} = \int_{0}^{a} \int_{-}^{+}$

weil P eine gerade Funktion von γ resp. δ ist, und da

$$\lim_{r, \varrho = 1} \int_{0}^{a} \int_{-b}^{+b} P(r, \gamma)\, P(\varrho, \delta)\, d\gamma\, d\delta = 2\pi^2,$$

so hat man

$$(37) \qquad |J_2 + J_4 - 2\pi^2 \{ f_1(x, y) + f_2(x, y) \}| < \varepsilon_2$$

für r, ϱ nahe 1.

Schließlich ergibt sich noch:

$$\left| \frac{1}{4\pi^2} I_1 - \frac{1}{2} \{ f_1(x, y) + f_2(x, y) \} \right|$$

$$\leqq \frac{1}{4\pi^2} \left| (J_1 + J_3) \right| + \frac{1}{4\pi^2} \left| J_2 + J_4 - 2\pi^2 \{ f_1(x, y) + f_2(x, y) \} \right|$$

$$(38) \qquad < \frac{\varepsilon_1}{4\pi^2} + \frac{\varepsilon_2}{4\pi^2} < \varepsilon \text{ für a klein genug und r, } \varrho \text{ nahe}$$

der Einheit.

Verbindet man dieses Resultat mit den Gleichungen (27) und (31), so erhält man den Satz:

„Befindet sich der Punkt (x, y) auf einer beliebigen Unstetigkeitsgeraden, so konvergiert das Poissonsche Integral beim Grenzübergang lim $r, \varrho = 1$ zum arithmetischen Mittel der Grenzwerte

zu beiden Seiten dieser Geraden, welche die Funktion bei Annäherung an den Punkt (x, y) annimmt."

$$\lim_{r,\varrho=1} \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \frac{1}{2}\left\{f_1(x,y) + f_2(x,y)\right\}$$

Dieser Satz behält seine Gültigkeit, wenn man an Stelle der Unstetigkeitsgeraden eine stetig gekrümmte Kurve $\delta = \psi(\gamma)$ treten läßt, welche die Gerade $\delta = p\gamma$ $(0 < p < \infty)$ als Tangente im Nullpunkte hat. Es müssen dann aber unter $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ die Grenzwerte verstanden werden, welche $f(\gamma, \delta)$ beim Einrücken von γ, δ in den Punkt (x, y) annimmt, wenn der variable Punkt stets oberhalb (resp. unterhalb) der Kurve bleibt, ohne diese selbst zu erreichen.

Ist nämlich $0 < p < \infty$, so kann man I_1 nach dem Schema (35) in vier Teilintegrale $J_1 \ldots J_4$ zerlegen. Nur tritt dabei $\psi(\gamma)$ an die Stelle von $p\gamma$. Wie zuvor bleibt (36) gültig, während (37), also auch (38) erfüllt sind, wenn man zeigen kann, daß

$$\lim_{r,\varrho=1} \int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)\, d\gamma\, d\delta \text{ verschwindet.}$$

In der Tat ist nach (30):

$$\int_0^a \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= 2\int_0^a P(r,\gamma)\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}\right)\right\} d\gamma$$

und

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}\right)\right|$$

$$= \operatorname{arctg}\left|\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2} - \operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}}{1+\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\psi(\gamma)}{2}\operatorname{tg}\frac{p\gamma}{2}}\right|$$

weil arctg eine ungerade Funktion ist;

$$< \operatorname{arctg}\left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi(\gamma) - p\gamma)}{\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\cdot\sin\frac{p\gamma}{2}}\right|,$$

wenn a hinreichend klein, da dann $\psi(\gamma)$ und $p\gamma$ dasselbe Vo zeichen haben und das Produkt $\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\sin\frac{p\gamma}{2} > 0$ ist. Nu war $\psi(\gamma)$ nach Voraussetzung von stetiger Krümmung, d. mit einem stetigen zweiten Differentialquotienten versehen, somit i

$$\psi(\gamma) - p\gamma = \frac{\gamma^2}{2!}\psi''(\ominus\gamma) \qquad 0 < \ominus < 1$$

und

$$\frac{\psi(\gamma) - p\gamma}{\psi(\gamma)\cdot p\gamma} = \frac{\frac{1}{2!}\psi''(\ominus\gamma)}{p^2 + \frac{\gamma}{2!}\cdot p\cdot\psi''(\ominus\gamma)}$$

eine im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq a$ endliche und stetige Funktion. Dasselbe gilt dann von:

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi(\gamma)-p\gamma)}{\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\sin\frac{p\gamma}{2}}\right| = 2\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi(\gamma)-p\gamma)}{\frac{1}{2}(\psi(\gamma)-p\gamma)}\right|\cdot\left|\frac{\frac{\psi(\gamma)\cdot p\gamma}{2}\cdot\frac{p\gamma}{2}}{\sin\frac{\psi(\gamma)}{2}\sin\frac{p\gamma}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\psi(\gamma)-p\gamma}{\psi(\gamma)\cdot p\gamma}\right|$$

Bezeichnen wir mit $K(a)$ die obere Grenze dieser Funktio im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq a$, so ist:

$$\left|\int_0^a\int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P.\,P.\,d\gamma\,d\delta\right| < 2\operatorname{arctg}\left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right| K(a)\cdot\int_0^a P(r,\gamma)\,d\gamma, \text{ weil } \operatorname{arctg}|q$$

eine monoton zunehmende Funktion ihres Argumentes ist.

$$\left|\int_0^a\int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P.\,P.\,d\gamma\,d\delta\right| < 2\pi\operatorname{arctg}\left|\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\cdot K(a)\right|$$

$< \varepsilon$, wenn r, ϱ hinreichend weni von der Einheit verschieden, nachdem a genügend klein fixier

$$(39) \qquad \therefore \lim_{r,\,\varrho\,=\,1}\int_0^a\int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\,P(\varrho,\delta)\,d\gamma\,d\delta = 0$$

Es ist klar, daß man für das Integral:

$$\int_{-a}^{0}\int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} = \int_0^a\int_{-p\gamma}^{\varphi(-\gamma)}$$ diese Überlegung wörtlich wiederholen kann

weswegen:

$$40) \qquad \lim_{r,\varrho=1} \int_{-a}^{a} \int_{p\gamma}^{\psi(\gamma)} P(r,\gamma)\, P(\varrho,\delta)\, d\gamma\, d\delta = 0$$

Wir erhalten auf diese Weise den Lehrsatz:

„Liegt der Punkt (x, y) auf einer beliebigen, stetig gekrümmten Unstetigkeitskurve und versteht man unter $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ die beiden Grenzwerte, welche $f(\gamma,\delta)$ annimmt, wenn (γ,δ) von der einen oder anderen Seite der Kurve in den Punkt (x, y) einrückt, ohne diese selbst zu erreichen, so konvergiert das allgemeine Poissonsche Integral für $\lim r, \varrho = 1$ zum arithmetischen Mittel dieser beiden Grenzwerte, falls die Tangente der Kurve im Punkte (x, y) zu keiner der Koordinatenaxen parallel ist."

Hiermit wäre wohl im großen und ganzen die Leistungsfähigkeit des allgemeinen Poissonschen Integrals, worin r und ϱ unabhängig voneinander der Einheit zustreben, erschöpft. Etwas weiter zu gehen erlaubt uns das spezielle Poissonsche Integral, in welchem $r = \varrho$ genommen wird. Für $\mathfrak{P}(x,y,r,r)$ bleiben selbstverständlich alle vorhergehenden Entwicklungen dieses Paragraphen ohne Einschränkung bestehen. Wir fügen noch einige hinzu.

Sei z. B. (x, y) der Schnittpunkt zweier senkrecht aufeinander stehenden Unstetigkeitsgeraden. Ist $\delta = p\gamma$ die Gleichung der ersten Geraden, dann muß $\delta = -\frac{1}{p}\gamma$, resp. $\gamma = -p\delta$, diejenige der zweiten sein. Ich nehme $b = a$ und setze an der Hand der beigefügten Figur:

$$f_1(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -a < \gamma < 0 \\ p\gamma < \delta < -\frac{1}{p}\gamma \end{array} \right\}$$

$$f_2(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 < \delta < a \\ -p\delta < \gamma < \frac{1}{p}\delta \end{array} \right\}$$

$$f_3(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 < \gamma < a \\ -\frac{1}{p}\gamma < \delta < p\gamma \end{array} \right\}$$

$$f_4(x,y) = \lim_{\gamma,\delta=0} f(x+\gamma, y+\delta) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -a < \delta < 0 \\ \frac{1}{p}\delta < \gamma < -p\delta \end{array} \right\}$$

dann wird

$$I_1 = \Big\{\int_{-a}^{-pa} d\gamma \int_{0}^{a} d\delta + \int_{-a}^{0} d\gamma \int_{p\gamma}^{0} d\delta +$$

$$\int_{0}^{a} d\delta \int_{-pa}^{-p\delta} d\gamma \Big\} [f(x+\gamma, y+\delta) - f_1(x,y)]\, P(r,\gamma)\, P(\varrho,$$

$$+ \text{[drei weitere Integrale von derselben Art]}$$

$$+ f_1(x,y) \Big\{ \int_{-a}^{-pa} d\gamma \int_{0}^{a} d\delta + \int_{-a}^{0} d\gamma \int_{p\gamma}^{0} d\delta + \int_{0}^{a} d\delta \int_{-pa}^{-p\delta} d\gamma \Big\} P(r,\gamma)\, P(\varrho,$$

$$+ \text{[drei Integrale derselben Art]}$$

$$= J_1 + \text{[drei ähnliche Integrale]} + J_2 + \text{[drei ähnliche Integrale}$$

Offenbar können nun gerade wie in unseren früheren Be weisen die ersten vier Integrale durch Verkleinerung von a unte ein beliebig kleines ε_1 herabgedrückt werden.

$$\frac{1}{f_1(x,y)}\, J_2 = \Big\{ \int_{-a}^{-pa} d\gamma \int_{0}^{a} d\delta + \int_{-a}^{0} d\gamma \int_{p\gamma}^{0} d\delta + \int_{0}^{a} d\delta \int_{-pa}^{-p\delta} d\gamma \Big\} P(r,\gamma)\, P(\varrho,$$

$$= \int_{0}^{a} P(\varrho,\delta)\, d\delta \int_{pa}^{a} P(r,\gamma)\, d\gamma + \int_{0}^{a} P(r,\gamma)\, d\gamma \int_{0}^{p\gamma} P(\varrho,\delta)\, d\delta$$

$$(40) \qquad + \int_{0}^{a} P(\varrho,\delta)\, d\delta \int_{p\delta}^{pa} P(r,\gamma)\, d\gamma$$

Lasse ich nun noch $r = \varrho$ werden und vertausche in den mittleren Ausdruck von (40) γ mit δ, so wird

$$J_2 = f_1(x,y) \int_{0}^{a} P(r,\delta)\, d\delta \int_{0}^{a} P(r,\gamma)\, d\gamma, \quad \text{und}$$

$$\lim_{r=1} J_2 = \pi^2 f_1(x,y)$$

Man sieht, daß für den speziellen Fall $p = 0$, der frühe erledigt wurde, die Annahme $r = \varrho$ nicht gemacht zu werde braucht, da dann die zweite und dritte Komponente von J_2 in (40 verschwindet.

Die drei zu J_2 ähnlichen Integrale liefern in gleicher Weise die Grenzwerte $\pi^2 f_2(x, y) \ldots\ldots \pi^2 f_4(x, y)$. Man bekommt somit den Satz:

„Ist (x, y) der Schnittpunkt zweier aufeinander senkrechten Unstetigkeitsgeraden, so konvergiert das spezielle Poissonsche Integral, worin $r = \varrho$ gesetzt ist, gegen das arithmetische Mittel der vier Grenzwerte, welche $f(\gamma, \delta)$ bei Annäherung an (x, y) annimmt, wenn der variable Punkt jeweils im Innern eines der durch die Unstetigkeitsgeraden bestimmten Quadranten bleibt. In Zeichen: $\lim_{r=1} \mathfrak{P}(x, y, r, r) = \frac{1}{4}\left\{f_1 + f_2 + f_3 + f_4\right\}$."

Dasselbe Verfahren, durch welches Gl. (39) gewonnen wurde, gestattet uns folgende Ergänzung zu diesem Satze:

„Ist (x, y) der Schnittpunkt zweier orthogonalen regulären Kurven, deren Tangentenkreuz im Punkte (x, y) dem Koordinatenkreuz nicht parallel ist, so konvergiert das spezielle Poissonsche Integral $\mathfrak{P}(x, y, r, r)$ gegen das arithmetische Mittel der vier Grenzwerte, welche $f(\gamma, \delta)$ annimmt, wenn der variable Punkt (γ, δ), jeweils ganz im Innern eines der durch die Kurven bestimmten vier Zwickel bleibend, in den Punkt (x, y) einrückt."

Zum Schluß sei noch ein Satz angeführt, zu dessen Beweise wir kurz zeigen müssen, daß:

41)
$$\lim_{r=1} \int_0^a \int_0^\gamma P(r, \gamma)\, P(r, \delta)\, d\gamma\, d\delta = \frac{\pi^2}{2}$$

In der Tat ist:

$$\int_0^a \int_0^a = \left\{ \int_0^a \int_0^\gamma + \int_0^a \int_\gamma^a \right\} P(r, \gamma)\, P(r, \delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$\text{aber} \int_0^a P(r,\gamma)\, d\gamma \int_\gamma^a P(r,\delta)\, d\delta = \int_0^a P(r, \delta)\, d\delta \int_0^\delta P(r, \gamma)\, d\gamma$$

$$= \int_0^a P(r, \gamma)\, d\gamma \int_0^\gamma P(r, \delta)\, d\delta$$

$$\therefore \int_0^a \int_0^a = 2 \int_0^a \int_0^\gamma P(r,\gamma)\, P(r,\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

und $$\lim_{r=1} \int_0^a \int_0^\gamma P(r,\gamma)\, P(r,\delta)\, d\gamma\, d\delta$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{r=1} \int_0^a \int_0^a P(r,\gamma)\, P(r,\delta)\, d\gamma\, d\delta = \frac{\pi^2}{2}$$

Eine einfache Zerlegung im Sinne von (27), (35) gibt dann den Satz:

„Existiert in jedem der acht um den Punkt (x, y) gelegenen, durch Parallelen zu den Koordinatenaxen und deren Winkel halbierenden gebildeten Oktanten ein bestimmter Grenzwert von $f(\gamma, \delta)$ beim Einrücken in den Punkt (x, y), so konvergiert $\mathfrak{P}(x, y, r, r)$ zum arithmetischen Mittel dieser acht Grenzwerte."

---

§ 7.

Vergleich der verschiedenen Darstellungsmethoden durch Anwendung auf ein Beispiel.

Um die Anwendbarkeit unserer Untersuchungen an einem Beispiel zu erproben und die verschiedenen Darstellungsmethoden unter einander zu vergleichen, wählen wir eine Funktion, die zwar alle für unsere analytischen Darstellungen erforderlichen Bedingungen erfüllt, jedoch durch einen einfachen analytischen Ausdruck für die ganze Ebene einheitlich nicht definiert werden kann. Eine solche Funktion ist z. B. die folgende, deren geometrisches Abbild durch die Oberfläche einer regulären Pyramide von der Höhe π über dem Fundamentalquadrat gegeben ist.

1) für $\left.\begin{array}{c} -\pi \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq -x \end{array}\right\}$ ist $f(x, y) = \pi + x$,

2) für $\left.\begin{matrix} 0 \leq x \leq \pi \\ -x \leq y \leq x \end{matrix}\right\}$ ist $f(x, y) = \pi - x$,

3) „ $\left.\begin{matrix} -\pi \leq y \leq 0 \\ y \leq x \leq -y \end{matrix}\right\}$ „ $f(x, y) = \pi + y$,

4) „ $\left.\begin{matrix} 0 \leq y \leq \pi \\ -y \leq x \leq y \end{matrix}\right\}$ „ $f(x, y) = \pi - y$.

Da diese Funktion überall stetig und integrabel ist, so genügt sie der Bedingung H_1 p. 27. Die geometrische Anschauung zeigt klar, ohne daß man auf den analytischen Beweis einzugehen braucht, daß sie in jedem Punkte, speziell auch auf den Diagonalen und der Berandung die Bedingung H_4 befriedigt. Schließlich erkennen wir noch, daß H_2 und H_3 erfüllt sind, mit Hülfe der folgenden Überlegungen.

Sei zunächst unter (x, y) ein weder auf der Berandung noch den Diagonalen des Fundamentalquadrates gelegener Punkt verstanden. Er liegt dann ganz im Inneren eines der Bereiche (1) . . . (4), nehmen wir etwa an (1). Wir zeigen, daß für einen solchen inneren Punkt H_2 befriedigt ist. Diese Bedingung verlangt die Endlichkeit von

$$\int_{a_0}^{\pi} \int_{0}^{d} \frac{|F(x, y, \gamma, \delta) - F(x, y, \gamma, +0)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta,$$

was sicherlich der Fall, wenn

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} \int_{0}^{d} \frac{|f(x+\gamma, y+\delta) - f(x+\gamma, y+0) + f(x+\gamma, y-\delta) - f(x+\gamma, y-0)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

endlich ist.

Man zerlege dieses Integral gemäß der beigefügten Figur in die Summe von elf Teilintegralen. (Figur siehe Seite 54.) Vier davon wollen wir hier auswerten, die übrigen sieben lassen sich ganz analog behandeln. Für unsere Figur gilt $x < 0, y > 0$, daher hat man:

$$\int_{-\pi-x}^{-x-y-d} \int_{0}^{d} \frac{|(\pi - x+\gamma) - (\pi-x+\gamma) + (\pi - x+\gamma) - (\pi-x+\gamma)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta = 0$$

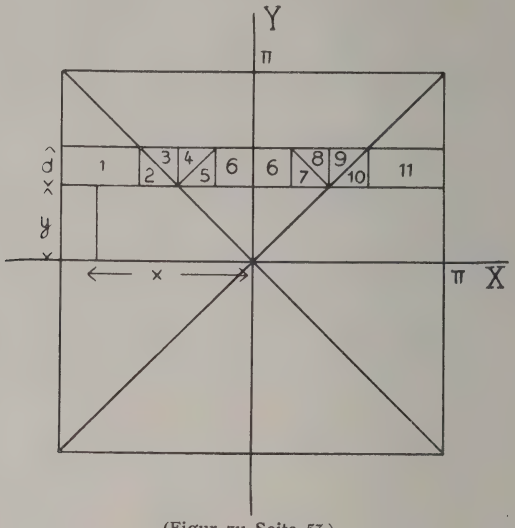
$$\int_{x-y-d}^{-x-y} \int_{d-(\gamma+x+y+d)}^{d} \frac{|(\pi-y-\delta) - (\pi+x+\gamma) + (\pi+x+\gamma) - (\pi+x+\gamma)|}{\delta} \, d\gamma \, d\delta$$

$$= \int_{0}^{d} d\xi \int_{\xi}^{d} \frac{|\xi-\delta|}{\delta} \, d\delta$$

$$\leqq \int_0^d d\xi \int_\xi^d \left(\frac{\xi}{\delta}+1\right) d\delta \leqq \int_0^d \xi \left[\lg\frac{d}{\xi}+d+\xi\right] d\xi = \text{endlich}$$

wobei $\xi = -(\gamma + x + y)$ gesetzt wurde.

2. $$\int_{-x-y-d}^{-x-y} \int_0^{\gamma-(x+y+d)} \frac{|(\pi - x+\gamma) - (\pi-x+\gamma) + (\pi - x+\gamma) - (\pi - x+\gamma)|}{\delta} d\gamma\, d\delta \leqq$$



(Figur zu Seite 53.)

4. $$\int_{-x-y}^{-x-y+d} \int_{\gamma+x+y}^{d} \frac{|(\pi-y-\delta)-(\pi-y)+(\pi+x+\gamma)-(\pi-y|}{\delta} d\gamma\, d\delta$$

$$= \int_0^d d\eta \int_\eta^d \frac{|\eta-\delta|}{\delta} d\delta$$

$$\leqq \int_0^d d\eta \int_\eta^d \frac{\eta+\delta}{\delta} d\delta = \text{endlich, wo } \eta = \gamma + x + y.$$

Sämtliche Integrale sind endlich, also befriedigen sie H_2; auch wenn $y = 0$, so daß der betreffende Punkt auf der X-axe liegt, denn das hierbei neu auftretende Integral ergibt wieder:

$$\int_{-x}^{x+d} d\gamma \int_{\gamma+x}^{d} \frac{|(\pi-\delta)-(\pi-\gamma-x)+(\pi-\delta)-(\pi-\gamma-x)|}{\delta} d\delta$$

$$\leqq 2\int_0^d d\zeta \int_\zeta^d \frac{\zeta+\delta}{\delta} d\delta$$

$$= \text{endlich; } \zeta = \gamma + x \text{ gesetzt.}$$

Die Gültigkeit von H_2 für Punkte der Berandung und der Diagonalen läßt sich in genau derselben Weise zeigen. Aus der Symmetrie der darzustellenden Funktion, sowie der Bedingungen H_2 und H_3 folgt dann, daß für jeden Punkt des Fundamentalquadrates sämtliche Bedingungen unseres Lehrsatzes von § 3 erfüllt, so daß die Fourier'sche Doppelreihe dort die Funktion sicherlich darstellt.

Wir wenden uns nun zur expliziten Herstellung der betreffenden Doppelreihe. Für die Fourierschen Konstanten erhält man aus 2) p. 8 die Werte:

$a_0^0 =$ Mittelwert der Funktion

$$= \frac{\text{Volumen der Pyramide}}{\text{Basis}} = \frac{\frac{4}{3}\pi^3}{4\pi^2} = \frac{\pi}{3}$$

$$h_0^0 = c_0^0 = d_0^0 = 0$$

$$\pi^2 a_\mu^0 = \int_{-\pi}^{0} \cos\mu\alpha(\pi+\alpha)\,d\alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} d\beta + \int_{0}^{\pi}(\pi-\alpha)\cos\mu\alpha\,d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} d\beta$$

$$+ \int_{-\pi}^{0}(\pi+\beta)d\beta \int_{\beta}^{-\beta} \cos\mu\alpha\,d\alpha + \int_{0}^{\pi}(\pi-\beta)d\beta \int_{-\beta}^{\beta} \cos\mu\alpha\,d\alpha$$

$$= 2\left\{\int_{0}^{\pi}(\pi-\alpha)\cos\mu\alpha\,d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} d\beta + \int_{0}^{\pi}(\pi-\beta)\,d\beta \int_{-\beta}^{\beta} \cos\mu\alpha\,d\alpha\right\}$$

$$= 4\int_{0}^{\pi}(\pi-\alpha)\left(\alpha\cos\mu\alpha + \frac{1}{\mu}\sin\mu\alpha\right)d\alpha$$

$$= \frac{4\pi}{\mu^2}(-1)^{\mu+1}$$

$$\therefore\ a_\mu^0 = \frac{2}{\pi\mu^2}(-1)^{\mu+1};\quad b_\mu^0 = c_\mu^0 = d_\mu^0 = 0,\ \text{wenn}\ \mu > 0.$$

Ebenso findet man:

$$a_0^\nu = \frac{2}{\pi\nu^2}(-1)^{\nu+1};\quad b_0^\nu = c_0^\nu = d_0^\nu = 0,\ \text{wenn}\ \nu > 0.$$

$$\pi^2 a_\mu^\nu = 2\left\{\int_0^\pi (\pi-\alpha)\cos\mu\alpha\, d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\nu\beta\, d\beta \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi (\pi-\beta)\cos\nu\beta\, d\beta \int_{-\beta}^{\beta} \cos\mu\alpha\, d\alpha \right\}$$

$$= 4\int_0^\pi (\pi-\alpha)\left\{\frac{\cos\mu\alpha\sin\nu\alpha}{\nu} + \frac{\cos\nu\alpha\sin\mu\alpha}{\mu}\right\} d\alpha$$

$$= 2\int_0^\pi (\pi-\alpha)\left\{\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right)\sin(\nu+\mu)\alpha \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\mu}\right)\sin(\nu-\mu)\alpha\right\} d\alpha$$

$$= -2\pi\left\{\frac{1}{\nu(\mu+\nu)} + \frac{1}{\mu(\mu+\nu)} - \frac{1}{\nu(\mu-\nu)} + \frac{1}{\mu(\mu-\nu)}\right.$$

$$= 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq \nu,$$

$$\therefore\ a_\mu^\nu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu.$$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu^\nu &= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{(\pi-\alpha)}{\nu}\sin 2\nu\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi\nu^2} \\ b_\mu^\nu &= c_\mu^\nu = d_\mu^\nu = 0 \end{aligned}\right|\ \mu > 0,\ \nu > 0$$

Hiermit ergibt sich als Fouriersche Entwicklung der Pyramiden-oberfläche die Doppelreihe:

$$(42)\quad f(x,y) = \frac{2}{\pi}\left|\begin{array}{llllll}
\frac{\pi^2}{6} & +\ \cos x & -\ \frac{1}{4}\cos 2x & +\ldots+ & \frac{(-1)^{\mu+1}}{\mu^2}\cos\mu x & +\ldots \\
+\cos y & +\ \cos x\cos y\ + & 0 & +\ldots+ & 0 & +\ldots \\
-\frac{1}{4}\cos 2y\ + & 0 & +\ \frac{1}{4}\cos 2x\cos 2y & +\ldots+ & 0 & +\ldots \\
+\frac{1}{9}\cos 3y\ + & 0 & +\ \ 0 & +\ldots+ & 0 & +\ldots \\
+\ldots\ldots & & & & & \\
+\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^2}\cos\nu y\ + & 0 & +\ \ 0 & +\ldots\ldots & & \\
+\ldots\ldots & & & & &
\end{array}\right.$$

Sie ist eine absolut konvergente Reihe, da die Reihe der absoluten Beträge der Koeffizienten konvergiert.

Nach Pringsheim[1]) p. 133 (7) und p. 142 (1) konvergiert dann auch die Diagonalreihe, doch könnte man berechtigte Zweifel hegen, ob ihre Summe wirklich die vorgeschriebene Funktion darstellt. Wir müssen also nachweisen, daß die Bedingungen des Lehrsatzes p. 33 erfüllt sind. Von D_1 und D_2 liegt das nach den Untersuchungen über H_1 und H_2 klar auf Hand. Von D_3 lehrt es die Anschauung für alle Punkte ausgenommen die Ecken des Fundamentalquadrates. Betrachten wir als Beispiel die Ecke (π, π):

$$f(\pi+\gamma, \pi+\delta) = \gamma \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 < \gamma \leqq a \\ \gamma < \delta \leqq a \end{cases}$$

$$f(\pi+\gamma, \pi+\delta) = -\gamma \quad \text{für} \quad \begin{cases} -a \leqq \gamma < 0 \\ -\gamma < \delta \leqq a \end{cases}$$

und transformieren wir auf ein unter 45° geneigtes Koordinatensystem, so wird:

$$f\left(\pi+\frac{\xi-\eta}{2}, \pi+\frac{\eta-\xi}{2}\right) = \frac{\xi-\eta}{2}, \text{ wenn} \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ 0 < \eta < \xi \end{cases}$$

$$f\left(\pi+\frac{\xi-\eta}{2}, \pi+\frac{\eta-\xi}{2}\right) = \frac{\eta-\xi}{2}, \text{ wenn} \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ \xi < \eta \leqq a \end{cases}$$

Wählt man nun:

$$f_+(\xi, \eta) = \frac{\xi}{2}, \text{ wenn} \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ 0 < \eta \leqq \xi \end{cases}$$

$$f_+(\xi, \eta) = \frac{\eta}{2}, \text{ wenn} \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ \xi < \eta \leqq a \end{cases}$$

als monoton zunehmende Funktion

und

$$f_-(\xi, \eta) = \frac{-\eta}{2}, \text{ wenn} \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ 0 < \eta < \xi \end{cases}$$

$$f_-(\xi, \eta) = \frac{-\xi}{2}, \text{ wenn} \begin{cases} 0 < \xi \leqq a \\ \xi < \eta \leqq a \end{cases}$$

als monoton abnehmende,

so ist $f_+(\xi, \eta) + f_-(\xi, \eta) = f\left(\pi + \frac{\xi-\eta}{2}, \pi + \frac{\eta-\xi}{2}\right)$ die von D_3 verlangte Zerlegung im Eckpunkte (π, π). $f_+(\xi, \eta)$ und $f_-(\xi, \eta)$ sind in der Tat gleichsinnig monotone Funktionen, weil $\frac{\partial f_+}{\partial \xi}$

[1]) loco cit. p. 5 [3]).

und $\frac{\partial f_+}{\partial \eta}$ (resp. $\frac{\partial f_-}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial f_-}{\partial \eta}$) gleiches Vorzeichen haben, und weil sie auf der Linie $\xi = \eta$ stetig sind. Dies ist wesentlich!

Wir können nun ohne Bedenken unsere Fouriersche Reihe nach Diagonalen summieren und erhalten:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{2}{\pi}\Big\{ & 1 + (\cos x + \cos y) - \frac{1}{4}(\cos 2x - 4\cos x \cos y + \cos 2y) \\
& + \frac{1}{9}(\cos 3x + \cos 3y) - \frac{1}{16}(\cos 4x - 4\cos 2x \cos 2y + \cos 4y) \\
& + \frac{1}{25}(\cos 5x + \cos 5y) - \frac{1}{36}(\cos 6x - 4\cos 3x \cos 3y + \cos 6y) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big\} \qquad (43) \\
= \frac{2}{\pi}\Big\{ & 1 + \sum_1^\infty \nu \Big[\frac{1}{(2\nu-1)^2}(\cos(2\nu-1)x + \cos(2\nu-1)y) \\
& - \frac{1}{4\nu^2}(\cos 2\nu x - 4\cos \nu x \cos \nu y + \cos 2\nu y)\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Die Fejèrsche Summationsmethode auf (42) angewandt, liefert folgende Doppelreihe:

$$
f(x,y) = \frac{2}{\pi}\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{1\cdot 2}\cos x + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + \cdots \\
+ \frac{1}{1\cdot 2}\cos y + \frac{\cos x \cdot \cos y}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} + \frac{\cos x \cdot \cos y}{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} + \cdots \\
+ \frac{1}{2\cdot 3}\left(\cos y - \frac{1}{2}\cos 2y\right) + \frac{\cos x \cdot \cos y}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} + \frac{\cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3} + \cdots \\
+ \frac{1}{3\cdot 4}\left(\cos y - \frac{1}{2}\cos 2y + \frac{1}{3}\cos 3y\right) + \frac{\cos x \cdot \cos y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right. \qquad (44)
$$

Diese Reihe ist unübersichtlicher und umständlicher zu summieren als (42).

Schließlich wollen wir noch das Poissonsche Integral für diese Funktion aufstellen. Wir finden mit Hülfe der Definitionsgleichungen von f(x, y) auf pp. 52—53:

$$4\pi^2 \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \int_{-\pi}^{0} d\alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} (\pi + \alpha)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$+ \int_{0}^{\pi} d\beta \int_{-\beta}^{\beta} (\pi - \beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha$$

$$+ \int_{-\pi}^{0} d\beta \int_{\beta}^{-\beta} (\pi + \beta)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha$$

$$+ \int_{0}^{\pi} d\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} (\pi - \alpha)\, P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$4\pi^2 \mathfrak{P}(x, y, r, \varrho) = \pi \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \alpha - x)\, P(\varrho, \beta - y)\, d\alpha\, d\beta$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} \alpha \cdot P(r, \alpha - x) \cdot P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \int_{\beta}^{-\beta} \beta \cdot P(r, \alpha - x) \cdot P(\varrho, \beta - y)\, d\beta$$

$$= 4\pi \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\pi + x}{2}\right) \right\}$$

$$\times \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\pi - y}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\pi + y}{2}\right) \right\}$$

$$- 2 \int_{-\pi}^{\pi} \alpha P(r, \alpha - x) \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\alpha + y}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho} \operatorname{tg} \frac{\alpha - y}{2}\right) \right\} d\alpha$$

$$- 2 \int_{-\pi}^{\pi} \beta P(\varrho, \beta - y) \left\{ \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\beta + x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{\beta - x}{2}\right) \right\} d\alpha,$$

wo $P(r, \alpha - x) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\alpha - x)}$, gemäß (23).

Die beiden letzten Integrale auszuwerten ist mir nicht gelungen, trotzdem die darzustellende Funktion f (α, β) recht einfach ist. Jedenfalls scheint mir das Poissonsche Integral, so kurz und übersichtlich in Form und so anpassungsfähig an Singularitäten der Funktion es auch sein mag, für zahlenmäßige Berechnung der Funktionswerte wenig geeignet. In dieser Hinsicht ist ihm die Fouriersche Doppelreihe weit überlegen.

Das mächtigste aber für die Darstellung von Funktionen zweier Variablen uns zu Gebote stehende Hülfsmittel ist ohne Frage die Fejèrsche Doppelreihe. Wenn ihre Aufstellung auch mühseliger als die der Fourierschen Reihe, so erspart sie uns andrerseits die lästige und häufig resultatlos verlaufende Untersuchung, ob die darzustellende Funktion die zur Konvergenz der Fourierschen Reihe erforderlichen Eigenschaften hat.

Lebenslauf.

Am 10. Juli 1888 als Sohn Walter des Kaufmanns Robert Küstermann und seiner Gattin Emma in Green Bay, Wisconsin, U. S. A., geboren und protestantischer Konfession, wurde ich mit sechs Jahren nach Detmold (Fürstentum Lippe) in die Realschule geschickt. Im April 1904 bestand ich die Einjährigenprüfung an dieser Anstalt, kehrte dann nach Amerika zurück und bestand im Dezember desselben Jahres mit Hülfe von Privatunterricht die Aufnahmeprüfung an der „University of Wisconsin“ in Madison, Wis., U. S. A., wo ich bis Juni 1909 immatrikuliert blieb. In 1908 erhielt ich von dieser Universität den Grad eines „Bachelor of Arts.“ Im Wintersemester 1909/10 bezog ich die Universität München, an der ich vier Jahre lang Vorlesungen der Herren Professoren Pringsheim, Voss, Lindemann, Sommerfeld, v. Seeliger und Graetz besuchte.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondere Herrn Geheimrat Pringsheim, spreche ich für das liebenswürdige Entgegenkommen mit Rat und Beistand meinen herzlichsten Dank aus.

Programm

des

Evangel. Fürstlich Bentheim'schen

GYMNASII ARNOLDINI

zu

Burgsteinfurt.

Ostern 1859.

Inhalt:

1. Einige Sätze aus der niederen Analysis von R. Kysäus.
2. Schulnachrichten von dem Director Rohdewald.

Münster,

Druck und Papier von Friedrich Regensberg.

1859.

Einige Sätze aus der niedern Analysis.

1. Eine Zahlenreihe, welche mit Eins beginnt und worin jedes Glied als Product aus der reellen, von Null verschiedenen Zahl a und aus dem vorhergehenden Gliede erscheint, läßt sich, da nun auch umgekehrt jedes Glied mittelst Division des nächstfolgenden durch a erhalten wird, über Eins hinaus nach der andern Seite hin unbegrenzt fortsetzen, und es erscheinen alsdann auf der einen Seite von Eins Producte, worin die Anzahl der gleichen Factoren a stets zunimmt, auf der andern Seite die reciproken Werthe dieser Producte. Setzt man unter jedes Glied, welches a als Faktor enthält, die für eine solche Potenz von a schon durch Carteſius eingeführte kürzere Bezeichnung, so nehmen die Exponenten dieser Potenzen nach der einen Seite hin beſtändig um 1 zu, also nach der andern, nämlich nach der Eins hin, bei jedem Gliede um Eins ab, und es hindert nichts, auch diejenigen Glieder, worin die Grundzahl a selbst nicht mehr als Faktor erscheint, durch Potenzen von a zu bezeichnen, deren Exponenten das Gesetz jener Abnahme befolgen, so daß z. B. noch a durch a^1, aber 1 durch a^0, $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} u. s. f. bezeichnet wird. Man erhält auf diese Weise die beiden Reihen:

$$\text{I.} \begin{cases} \ldots . \frac{1}{aaaa}, \frac{1}{aaa}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a}, \quad 1, \; a, \; aa, \; aaa, \; aaaa \ldots . \\ \ldots . \; a^{-4}, \; a^{-3}, \; a^{-2}, \; a^{-1}, \; a^0, \; a^1, \; a^2, \; a^3, \; a^4 \ldots . \end{cases}$$

und erkennt aus ihrer Betrachtung sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$\text{II.} \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

wenn a eine beliebige, von Null verschiedene reelle Zahl und m und n positive oder negative ganze Zahlen oder Null sind.

2. Jede Potenz einer positiven reellen Zahl a mit ganzem positivem Exponenten m nimmt stetig zu, wenn die Grundzahl a stetig zunimmt. Denn bezeichnet man den positiven Zuwachs von a durch x und entwickelt $(a + x)^m$ nach dem Binomialtheorem, so wird $(a + x)^m = a^m + ma^{m-1} . x + x . S$, indem man unter xS das positive Aggregat aller auf das zweite Glied folgenden Glieder versteht. Nun kann man aber x immer klein genug nehmen, daß $ma^{m-1} . x + x . S$ oder $x(ma^{m-1} + S)$ kleiner als jede noch so kleine Zahl wird. Daher wächst a^m stetig zugleich mit a. Denkt man

einander gleich setzt, wodurch man die zur Bestimmung der Coefficienten nöthigen Bedingungsgleichungen erhält. Es bleibt nur unbestimmt der Coefficient A; für die übrigen aber schließt man auf das Bildungsgesetz, daß jeder Coefficient aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man diesen mit A multiplicirt und das Product durch den Exponenten der zugehörigen Potenz von x dividirt. Hienach wird

$$a^x = 1 + \frac{A}{1}x + \frac{A^2}{1.2}x^2 + \frac{A^3}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Es ist nunmehr die Aufgabe, den Coefficienten A als eine Function von a zu bestimmen, ferner nachzuweisen, daß diese Reihe für jedes ganze reelle x convergirt und die durch die Grundgleichung II ausgesprochene Eigenschaft wirklich besitzt; denn alles dieses folgt noch nicht aus der vorhergehenden Ableitung.

8. Betrachtet man die gefundene Reihe für sich und bezeichnet sie in dem einfachsten Falle, wo $A = 1$ ist, durch $\varphi(x)$, so hat man

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots\ldots$$

und in gleicher Weise

$$\varphi(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Multiplicirt man die Glieder der einen Reihe nach einander mit den Gliedern der andern Reihe und addirt die für sich zu Summen zusammengefaßten Producte, in welchen x und y zusammen als Factoren in gleicher Anzahl vorkommen, so erhält man mit Anwendung des Binominaltheorems für ganze positive Exponenten die Reihe

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \ldots\ldots,$$

welche mithin durch $\varphi(x+y)$ zu bezeichnen ist. Kann man nun zeigen, daß die Reihe $\varphi(x)$ für jeden Werth von x convergirt, so werden auch die Reihen $\varphi(y)$ und $\varphi(x+y)$ convergiren, und es wird

$$\text{III.} \quad \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

sein nach Lehrsatz VI in der Abhandlung von Abel (Crelle's Journal, I, S. 313). Aus dieser Gleichung folgt, wenn man $-x$ statt y setzt: $\varphi(x) \cdot \varphi(-x) = \varphi(0) = 1$; folglich wird die Reihe $\varphi(x)$, wenn sie für jeden Werth von x convergirt, niemals Null, und es ist

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Setzt man ferner in Gl. III statt y nach und nach $x, 2x, 3x \ldots (m-1)x$, so erhält man zuletzt

$$\text{IV.} \quad (\varphi(x))^m = \varphi(mx),$$

wenn m positiv ganz ist; aber auch

$$(\varphi(x))^{-m} = \frac{1}{(\varphi(x))^m} = \frac{1}{\varphi(mx)} = \varphi(-mx).$$

Die Gleichung IV gilt also überhaupt, wenn m positiv oder negativ ganz oder Null ist; denn im letzteren Falle ist die Potenz der Definition gemäß $= 1$ und auch $\varphi(0) = 1$.

9. Die in der vorigen Nummer gemachten Schlüsse gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Reihe $\varphi(x)$ für jeden Werth von x convergire. Dieses ist der Fall, wenn x reell ist. Denn bezeichnet man den absoluten Zahlenwerth von x durch a, so ist $\frac{a^{m+1}}{(m+1)!} : \frac{a^m}{m!} = \frac{a}{m+1}$, und dieser Quotient nähert sich für stets wachsende Werthe von m der Grenze Null, folglich muß (nach Lehrsatz II in der angeführten Abhandlung von Abel) die Reihe $\varphi(x)$ für jeden reellen Werth von x convergiren. Ist $x = 1$, so wird der Werth der Reihe oder ihre Summe durch e bezeichnet, und man erhält

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots = 2{,}718281828459\ldots,$$

ferner nach Gl. IV

$$e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \frac{m^4}{4!} + \ldots\ldots,$$

wenn m positiv oder negativ ganz oder Null ist. Für solche Werthe von x erscheint demnach die Summe der Reihe $\varphi(x)$ als eine Potenz von e mit dem Exponenten x. Da aber bisher für die Potenz e^x noch keine Bedeutung festgesetzt ist, wenn x in der allgemeinen Form $p + iq$ gedacht wird, so kann man auch in diesem Falle die Summe der Reihe $\varphi(x)$ durch e^x bezeichnen und damit zugleich e^x definiren, vorausgesetzt, daß die Reihe auch für imaginäre Werthe von x wirklich eine Summe hat. Zunächst erhält man, für beliebige reelle x und y, aus den Gleichungen III und IV die folgenden:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \text{ und } (e^x)^m = e^{mx}.$$

10. Setzt man iq für x in der Reihe $\varphi(x)$ und nimmt q reell, so wird (4)

$$\varphi(iq) = 1 + iq - \frac{q^2}{2!} - i\frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + i\frac{q^5}{5!} - \ldots\ldots$$

Sondert man den imaginären Theil von dem reellen ab und bezeichnet die Reihe

$$1 - \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} - \frac{q^6}{6!} + \ldots\ldots \text{ durch } Cq,$$

ferner die Reihe

$$q - \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} - \frac{q^7}{7!} + \ldots\ldots \text{ durch } Sq,$$

so wird $\varphi(iq) = Cq + i \cdot Sq$, indem man unter C und S bloße Functionszeichen versteht.

Die beiden Reihen Cq und Sq sind für jeden reellen Werth von q convergent, weil sowohl der Quotient $\frac{q^{2n}}{2n!} : \frac{q^{2n-2}}{(2n-2)!} = \frac{q^2}{2n(2n-1)}$, als auch der Quotient $\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!} : \frac{q^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{q^2}{2n(2n+1)}$ für stets wachsende positive ganze n sich der Grenze Null nähert; folglich convergirt auch die Reihe $\varphi(iq)$, und man kann ihre Summe nunmehr durch e^{iq} bezeichnen (9), so daß

$$e^{iq} = Cq + i \,.\, Sq$$

ist. Da, wenn r reell ist, auch die Reihe $\varphi(iq + ir)$ oder $\varphi(i(q + r))$ convergirt, so hat man nach Gl. III und IV

$$\varphi(iq) \,.\, \varphi(ir) = \varphi(iq + ir) \text{ und } (\varphi(iq))^m = \varphi(imq), \text{ oder}$$

$$\text{V.} \qquad e^{iq} \,.\, e^{ir} = e^{iq+ir} \text{ und } (e^{iq})^m = e^{imq},$$

also auch $(Cq + i \,.\, Sq) \,.\, (Cr + i \,.\, Sr) = Cq \,.\, Cr - Sq \,.\, Sr + i\,(Sq \,.\, Cr + Cq \,.\, Sr) = C(q + r) + i \,.\, S(q + r)$ und $(Cq + i \,.\, Sq)^m = C(mq) + i \,.\, S(mq)$,
wenn m zuvörderst positiv oder negativ ganz oder Null ist. Aus der vorletzten Gleichung ergibt sich (3)

1. $C(q + r) = Cq \,.\, Cr - Sq \,.\, Sr$ und 2. $S(q + r) = Sq \,.\, Cr + Cq \,.\, Sr.$

Ferner erkennt man aus den Reihen Cq und Sq sofort, daß

$$C(-q) = Cq \text{ und } S(-q) = -Sq$$

ist, mithin, wenn man $-q$ für r in Gl. 1. setzt, $C(0) = Cq \,.\, Cq + Sq \,.\, Sq$ oder, da $C(0) = 1$ ist,

$$\text{VI.} \qquad 1 = (Cq)^2 + (Sq)^2.$$

Die Werthe von Cq und Sq sind zugleich mit q reell und müssen nach der letzten Gleichung zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegen. Da ferner die Reihen Cq und Sq für jedes reelle q convergent und eindeutig sind, so sind sie stetige Functionen von q, und deshalb ist auch e^{iq} eine stetige Function von q (Erklärung und Lehrsatz IV a. a. O.). Faßt man in der Reihe Cq je zwei durch das Minuszeichen verbundene Glieder für sich zusammen, so sind diese Differenzen positiv, wenn q positiv und $\leqq +1$ ist; folglich sind auch die Werthe von Cq für solche q positiv. Schreibt man dagegen die Reihe in dieser Weise

$$Cq = 1 - \frac{q^2}{2!}\left(1 - \frac{q^2}{3 \,.\, 4}\right) - \frac{q^6}{6!}\left(1 - \frac{q^2}{7 \,.\, 8}\right) - \frac{q^{10}}{10!}\left(1 - \frac{q^2}{11 \,.\, 12}\right) - \ldots,$$

so sieht man, daß für $q = +2$ der Werth von Cq negativ wird; also liegt zwischen $+1$ und $+2$ mindestens ein Werth von q, für welchen $Cq = 0$ ist. Der kleinste positive Werth von q, für welchen $Cq = 0$ wird, sei daher durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet, so daß $C\frac{\pi}{2} = 0$ ist.

Aus der Betrachtung der Reihe

$$Sq = q\left(1 - \frac{q^2}{3!}\right) + \frac{q^5}{5!}\left(1 - \frac{q^2}{6.7}\right) + \frac{q^9}{9!}\left(1 - \frac{q^2}{10.11}\right) + \ldots\ldots$$

geht unmittelbar hervor, daß die Werthe von Sq positiv sind für alle positiven q, welche $\leqq +2$ sind. Da nun $+2 > \frac{1}{2}\pi > +1$, so ist $S\frac{\pi}{2}$ positiv, und nach Gl. VI. $1 = \left(S\frac{\pi}{2}\right)^2$, folglich $S\frac{\pi}{2} = +1$.

11. Hiernach wird

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = C\frac{\pi}{2} + i.S\frac{\pi}{2} = +i \text{ und nach Gl. V. } \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^m = e^{im\frac{\pi}{2}} = (+i)^m.$$

Ist daher k eine positive oder negative ganze Zahl oder Null und $m = 4k$, so wird (4) $e^{ik2\pi} = i^{4k} = +1$. Die Function e^{iq} ist also eine periodische und wird jedesmal gleich 1, wenn $q = k2\pi$ ist. Sie wird aber auch nur für solche Werthe von q gleich $+1$. Denn wenn $\frac{1}{2}\pi > q > 0$, so sind Cq und Sq beide positiv, folglich $Cq + iSq$ oder e^{iq} imaginär. Wenn $q > \frac{1}{2}\pi$, so sei $\frac{1}{2}\pi > \alpha > 0$ und $q = n\frac{\pi}{2} + \alpha$, wobei n positiv ganz ist. Dann hat man nach Gl. V.

$$e^{iq} = e^{in\frac{\pi}{2} + i\alpha} = e^{in\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha} = i^n.(C\alpha + i.S\alpha),$$

ein Product, welches, da $C\alpha$ und $S\alpha$ beide positiv und < 1 sind, von der Form $p + iq$ ist (4) und für keinen Werth von n gleich $+1$ wird. Ist endlich q negativ, $= -\beta$, so wird $e^{iq} = e^{-i\beta} = \frac{1}{e^{i\beta}}$.

Da nun $e^{i\beta}$ für keinen von $k2\pi$ verschiedenen Werth von β gleich $+1$ wird, so kann auch e^{iq} für keinen solchen Werth von q gleich $+1$ werden.

12. Nimmt man zwei unter rechten Winkeln im Punkte O sich schneidende Coordinatenaxen in einer Ebene an und bestimmt in derselben einen Punkt K, dessen Abscisse Cq und dessen Ordinate Sq ist, so liegt der Punkt K nach Gl. VI. in dem Umfange eines um O beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser gleich dem Längenmaße ist.

Die Länge und Richtung einer von P nach Q gerichteten Strecke PQ in der angenommenen Ebene ist vollständig bestimmt durch die absolute Zahl q, nach welcher die Strecke von der Linien-Einheit gemessen wird und welche ihr absoluter Zahlenwerth heißen möge, ferner durch die vom Radius gemessene Länge $\varkappa$ desjenigen Kreisbogens, welchen der Endpunkt R einer zur Abscissenaxe parallelen und nach der positiven Seite derselben hin gerichteten Strecke PR beschreibt, wenn dieselbe um ihren Anfangspunkt P

nach der positiven Seite der Ordinatenaxe hin so lange in einerlei Sinne gedreht wird, bis ihre Richtung mit der Richtung der Strecke PQ identisch wird. Projicirt man die Strecke PQ rechtwinkelig in die beiden Coordinatenaxen, so sind $q \cdot \cos\varkappa$ und $q \cdot \sin\varkappa$ die Zahlenwerthe der Projectionen bezüglich in der ersten und zweiten Axe.

Zieht man von O nach dem vorhin bestimmten Punkte K die Strecke OK, so ist ihr absoluter Zahlwerth 1, und wenn die Zahl z die Länge des zugehörigen, in vorstehender Weise bestimmten Kreisbogens bezeichnet, so sind die Zahlwerthe der Projectionen der Strecke OK in den beiden Axen $\cos z$ und $\sin z$. Zugleich ist aber $Cq = \cos z$ und $Sq = \sin z$, ferner $e^{iq} = Cq + i \cdot Sq = \cos z + i \sin z$.

Bezeichnet man der Kürze halber $\cos z + i \sin z$ durch $f(z)$, oder noch einfacher durch fz, indem man unter f nur das Fuctionszeichen versteht, so hat man

$$e^{iq} = f(z) = fz,$$

und es handelt sich nun darum, den Bogen z als Function von q darzustellen.

13. Zu diesem Zwecke betrachte man das Dreieck OAB in der angenommenen Ebene (12). Die absoluten Zahlwerthe der Strecken OA, AB und OB seien a, c und b, die Längen ihrer zugehörigen Kreisbogen α, γ und β, so sind die Zahlwerthe der Projectionen jener Strecken in der Abscissenaxe bezüglich $a \cos\alpha$, $c \cos\gamma$ und $b \cos\beta$, in der Ordinatenaxe $a \sin\alpha$, $c \sin\gamma$ und $b \sin\beta$. Für diese Werthe gelten nun die beiden Gleichungen

$$a \cos\alpha + c \cos\gamma = b \cos\beta \quad \text{und} \quad a \sin\alpha + c \sin\gamma = b \sin\beta,$$

welche sich in eine einzige zusammenziehen lassen, nämlich in die Gleichung

$$b \cos\beta + ib \sin\beta = a \cos\alpha + c \cos\gamma + i(a \sin\alpha + c \sin\gamma)$$

oder $b(\cos\beta + i \sin\beta) = a(\cos\alpha + i \sin\alpha) + c(\cos\gamma + i \sin\gamma)$

oder, mit Anwendung der kürzeren Bezeichnungsart (12), in die Gleichung

$$\text{VII.} \qquad b \cdot f\beta = a \cdot f\alpha + c \cdot f\gamma.$$

Den Werth des Ausdrucks $a \cdot f\alpha$ nennt Möbius den **complexen** Werth der Strecke OA (Crelle's Journal, LII, S. 231 ff.). Demnach drückt die vorstehende Gleichung aus, daß die Summe der complexen Werthe zweier beliebig gerichteten Strecken, bei denen der Endpunkt der ersten den Anfangspunkt der zweiten bildet, gleich ist dem complexen Werthe der vom Anfangspunkt der ersten an den Endpunkt der zweiten gezogenen und dahin gerichteten Strecke.

Man findet nun $f(o) = \cos o + i \sin o = 1$ und, wenn π die Länge des vom Radius gemessenen Halbkreisbogens, also die Ludolphische Zahl bedeutet,

$$f\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i, \text{ ferner}$$

$$f(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + 2k\pi) + i \cdot \sin(\alpha + 2k\pi) = \cos a + i \sin\alpha = f\alpha,$$

wenn k positiv ganz oder Null ist.

14. Wenn die Strecke AB in dem Dreiecke OAB (13) eine solche Richtung hat, daß $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist das Dreieck OAB rechtwinkelig bei A, und $\beta - \alpha = \delta$ ist positiv und $< \frac{1}{2}\pi$, so lange c einen endlichen Zahlwerth behält. Man hat alsdann $a = b \cos\delta$ und $c = b \sin\delta$, folglich nach Gl. VII.

$$b \,.\, f(\alpha + \delta) = b \cos\delta \,.\, f\alpha + b \sin\delta \,.\, f\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{oder}$$

$$1. \quad f(\alpha + \delta) = \cos\delta \,.\, fa + \sin\delta \,.\, f\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Diese Gleichung gilt für beliebige positive α und für jedes positive δ, welches $< \frac{1}{2}\pi$ ist, und für $\delta = 0$. Nun erkennt man aus der Betrachtung der Figur (12), daß, wenn k positiv ganz oder Null, allgemein

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin k\frac{\pi}{2} \text{ und } \sin\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos k\frac{\pi}{2},$$

also auch $f\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin k\frac{\pi}{2} + i\cos k\frac{\pi}{2} = i\left(\cos k\frac{\pi}{2} + i\sin k\frac{\pi}{2}\right) = if\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

ist. Setzt man daher $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ in Gl. 1, so wird

$$f\left(k\frac{\pi}{2}+\delta\right) = \cos\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \sin\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right) = f\delta \,.\, f\left(k\frac{\pi}{2}\right).$$

Hieraus erhält man, wenn $k = m + 1$ ist,

$$f\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \delta\right) = f\delta \,.\, f\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = i \,.\, f\delta \,.\, f\left(m\frac{\pi}{2}\right) = i \,.\, f\left(m\frac{\pi}{2} + \delta\right).$$

Da nun $m\frac{\pi}{2} + \delta$ jedem beliebigen positiven Bogen α gleich werden kann, so gibt die letzte Gleichung $f\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = i \,.\, f\alpha$, wodurch Gl. 1 in folgende übergeht:

$$f(\alpha + \delta) = \cos\delta \,.\, f\alpha + i\sin\delta \,.\, f\alpha = f\delta \,.\, f\alpha.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung nmal nach einander mit $f\delta$, so erhält man schließlich

$$f(\alpha + n\delta) = f(n\delta) \,.\, f\alpha.$$

Da auch $n\delta$ jedem beliebigen positiven Bogen β gleich werden kann, so hat man also für beliebig große positive α und β die Gleichung:

$$f(\alpha + \beta) = f\alpha \,.\, f\beta,$$

aus welcher man mit Rücksicht auf die Bedeutung des Zeichens $f\alpha$ (12) leicht die bekannten Gleichungen

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \text{ und } \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

erhält. Außerdem findet man, wenn man nach und nach α, 2α, 3α . . . $(m-1)\alpha$ statt β setzt, zuletzt die für positive ganze m geltende Gleichung

$$\text{VIII.} \qquad f(m\alpha)=(f\alpha)^m.$$

15. Wenn die absoluten Werthe a und b der Strecken OA und OB in dem Dreiecke OAB (13) beide gleich 1, also diese Strecken Halbmesser des um O beschriebenen Kreises (12) sind, so ist das Dreieck OAB gleichschenkelig und die Strecke AB zugleich Sehne des zwischen den Punkten A und B befindlichen Kreisbogens. Ist ferner

$$\alpha=0 \text{ und } \beta<\frac{1}{2}\pi, \text{ so wird } \gamma=\beta+\frac{\pi-\beta}{2}=\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}, \text{ folglich}$$

$$f\gamma=f\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=f\frac{\beta}{2}\,.\,f\frac{\pi}{2}=i\,.\,f\frac{\beta}{2}, \text{ und nach Gl. VII.}$$

$$f\beta=f(0)+c\,.\,f\gamma=1+ic\,.\,f\frac{\beta}{2}, \text{ also } f\beta-1=ic\,.\,f\frac{\beta}{2}.$$

Da die Zahl β die Länge des Bogens angibt, dessen Sehne die Strecke AB mit dem absoluten Werthe c ist, und da das Verhältniß des Bogens zu seiner Sehne bei Abnahme des Bogens sich der Grenze 1 nähert: so ist auch $\lim.\frac{c}{\beta}=1$, wenn β beständig kleiner wird, also der Punkt B in der Kreislinie zum Punkte A hinrückt. Daher hat man

$$\text{IX.} \qquad \lim.\frac{f\beta-1}{\beta}=i\lim\left(\frac{c}{\beta}\,.\,f\frac{\beta}{2}\right)=i$$

für beständig abnehmende β.

16. Man kann nun zur Lösung der Aufgabe, den stets kleiner als 2π angenommenen Bogen z in der Gleichung $e^{iq}=fz$ (12) durch q auszudrücken, übergehen. Nach früheren Erklärungen ist fz der complexe Werth der Strecke OK, welche vom Mittelpunkte des Kreises um O (12) an den Punkt K in seinem Umfange gezogen ist, also der complexe Werth des Halbmessers OK, bei welchem man zugleich die Richtung von O nach K festhält. Wenn $+1\gtreqless q>0$, so sind Cq und Sq beide positiv (10), folglich auch cos z und sin z, da $Cq=\cos z$ und $Sq=\sin z$ ist. In diesem Falle ist also fz oder e^{iq} der complexe Werth eines Halbmessers im ersten Quadranten, und $z<\frac{1}{2}\pi$. Wenn m eine positive ganze Zahl, so sind auch $C\frac{q}{m}$ und $S\frac{q}{m}$ beide positiv, und es gibt einen Bogen $\delta<\frac{1}{2}\pi$, für welchen $e^{i\frac{q}{m}}=f\delta$ ist. Potenzirt man

diese Gleichung mit der positiven ganzen Zahl n, so wird nach Gl. V. und VIII. $e^{i\frac{n}{m}q} = f(n\delta)$. Wenn nun $n\delta < \frac{1}{2}\pi$, so ist auch, weil $\delta < \frac{1}{2}\pi$, $n\delta + \delta < \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi$ oder $(n+1)\delta < \pi$. So lange aber $n+1 \lessgtr m$ ist, ist auch $\frac{n+1}{m} q \lessgtr q \lessgtr +1$, folglich $e^{i\frac{n+1}{m}q}$ oder $f((n+1)\delta)$ der complexe Werth eines Halbmessers im ersten Quadranten, und weil schon $(n+1)\delta < \pi$ ist, so muß nunmehr $(n+1)\delta < \frac{1}{2}\pi$ sein. Ist also $n+1 \lessgtr m$ und $n\delta < \frac{1}{2}\pi$, so ist auch $n\delta + \delta < \frac{1}{2}\pi$. Nun ist $\delta < \frac{1}{2}\pi$, folglich $2\delta, 3\delta, 4\delta \ldots\ldots n\delta < \frac{1}{2}\pi$ und $(n+1)\delta < \frac{1}{2}\pi$, mithin, wenn $n+1 = m$ ist, auch $m\delta < \frac{1}{2}\pi$. In dem letztern Falle hat man aber $e^{iq} = f(m\delta)$ oder $fz = f(m\delta)$, und da sowohl $z < \frac{1}{2}\pi$, als auch $m\delta < \frac{1}{2}\pi$ ist, so muß $z = m\delta$ und $\delta = \frac{z}{m}$ sein.

Wenn demnach $+1 \gtrless q > 0$ und $e^{iq} = fz$, so ist auch $e^{i\frac{q}{m}} = f\frac{z}{m}$ für jedes beliebige positive ganze m. Um die Beziehung zwischen q und z vollständig zu erkennen, muß man noch die Gleichung IX. zu Hülfe nehmen. Wenn m beständig größer wird, so nähert sich $\frac{z}{m} = \delta$ und $\frac{q}{m} = \alpha$ der Grenze Null, dagegen behält $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{q}{z}$ einen constanten Werth. Nun ist

$$\text{IX}^*. \qquad \frac{f\delta - 1}{\delta} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{\delta} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\delta} = \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \frac{q}{z}.$$

Aus der Reihe, welcher $e^{i\alpha}$ gleich ist (10), findet man

$$\frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{4!} - \frac{\alpha^5}{6!} + \ldots\ldots + i\left(1 - \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} - \frac{\alpha^6}{7!} + \ldots\ldots\right).$$

Die beiden Reihen, sowohl die vordere, als auch die eingeklammerte, convergiren für jeden reellen Werth von α, Null mitbegriffen, was sich wie früher (10) darthun läßt. Erwägt man ferner, daß die Reihen stetige Functionen sind, und läßt m beständig größer werden, also α sich der Grenze Null nähern, so erhält man $\lim \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} = i$. Zugleich wird $\lim . \frac{f\delta - 1}{\delta} = i$ und $\lim\left(\frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} . \frac{q}{z}\right) = \frac{q}{z} . \lim \frac{e^{i\alpha} - 1}{\alpha} = i\frac{q}{z}$, daher in Folge der Gl. IX*. $i = i\frac{q}{z}$, woraus sich $\frac{q}{z} = 1$ und $q = z$ ergibt.

Wenn also $+1 \gtrless q > 0$, so ist $e^{iq} = fq = \cos q + i \sin q$. Man hat aber auch für jedes positive γ, wenn man die ganze positive Zahl n so bestimmt, daß $\frac{\gamma}{n} < 1$ wird, nach Gl. V. und VIII.

$$e^{i\gamma} = \left(e^{i\frac{\gamma}{n}}\right)^n = \left(f\frac{\gamma}{n}\right)^n = f\gamma.$$

17. Aus der letzten Gleichung erhält man (10) $C\gamma + i \cdot S\gamma = \cos\gamma + i \sin\gamma$, folglich $C\gamma = \cos\gamma$ und $S\gamma = \sin\gamma$, das heißt

$$\cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \ldots\ldots$$

$$\sin\gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \ldots\ldots$$

für beliebig große positive γ und, wie man sogleich sieht, für $\gamma = 0$. Da aber bisher $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ für negative γ noch nicht definirt sind, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch für solche Werthe von γ gelten lassen und $C\gamma$ und $S\gamma$ durch die gebräuchlicheren Zeichen $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$, auch in der früheren Entwickelung, nunmehr ersetzen. Insbesondere ist der durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnete Werth von q (10. 11) der Bogen des ersten Quadranten, also bedeutet auch dieses π die Ludolphische Zahl.

Sollen die reellen Werthe von μ bestimmt werden, welche die Gleichung $e^{i\alpha} = e^{i\mu}$ befriedigen, so setze man $\mu = \alpha + \beta$, und es wird $e^{i\alpha} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ nach Gl. V. Da $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ von der Form $p + iq$ und niemals Null sind (8), so wird auch das Product $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ niemals Null und stets von $e^{i\alpha}$ verschieden sein, wenn $e^{i\beta}$ nicht $= 1$ ist (4). Nun wird aber $e^{i\beta}$ nur $= 1$, wenn $\beta = 2k\pi$ (11), folglich muß $\mu = \alpha + 2k\pi$ sein, und nur diese reellen Werthe von μ befriedigen die Gleichung $e^{i\alpha} = e^{i\mu}$.

Wenn α und k positiv sind und $k2\pi > \alpha$, so ist

$$e^{-i\alpha} = e^{-i\alpha + ik2\pi} = e^{i(k2\pi - \alpha)}$$

und $k2\pi - \alpha$ positiv, folglich $e^{-i\alpha}$ der complexe Werth eines Halbmessers im Kreise um O (16), dessen Lage der vom Nullpunkte an im entgegengesetzten Sinne wie früher (12) gezählte Bogen von der Länge α bestimmt. Daher bezeichnet auch $ae^{i\alpha}$ für jedes reelle α den complexen Werth einer Strecke von der absoluten Länge a, welche man sich aus ihrer zur Abscissenaxe parallelen und nach der positiven Seite derselben hin gerichteten Lage um ihren Anfangspunkt durch einen Bogen von der Länge α gedreht denken kann, und zwar nach der positiven oder negativen Seite der Ordinatenaxe hin, je nachdem α positiv oder negativ ist.

18. Nach der zweiten Gleichung V. erhält man für positive ganze m

$$e^{i\alpha} = e^{i\alpha + ik2\pi} = e^{im\frac{\alpha}{m} + imk\frac{2\pi}{m}} = \left(e^{i\frac{\alpha}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}\right)^m,$$

folglich sind die Werthe des Ausdrucks $e^{i\frac{\alpha}{m}+ik\frac{2\pi}{m}}$ zugleich Werthe von $\sqrt[m]{e^{i\alpha}}$, und da, wie sogleich gezeigt wird, jener Ausdruck immer und nur m verschiedene Werthe hat, $\sqrt[m]{e^{i\alpha}}$ oder $\sqrt[m]{\cos\alpha + i\sin\alpha}$ aber nicht mehr als m verschiedene Werthe haben kann (6),

so ist X. $\sqrt[m]{e^{i\alpha}} = e^{i\frac{\alpha}{m}+ik\frac{2\pi}{m}} = e^{i\frac{\alpha}{m}} . e^{ik\frac{2\pi}{m}}$.

Um zu zeigen, daß das zweite Glied der Gleichung wirklich m deutig ist, nehme man unter den verschiedenen Werthen von k einen beliebigen $\varkappa$ heraus; gibt es dann einen andern Werth λ von k, für welchen

$$e^{i\frac{\alpha}{m}+i\varkappa\frac{2\pi}{m}} = e^{i\frac{\alpha}{m}+i\lambda\frac{2\pi}{m}}$$

ist, so muß $\frac{\alpha}{m}+\varkappa\frac{2\pi}{m} = \frac{\alpha}{m}+\lambda\frac{2\pi}{m}+2k\pi$ (17) oder $\frac{\varkappa}{m} = \frac{\lambda}{m}+k$ oder $\lambda = \varkappa + km$ sein. Da nun für k jede positive oder negative ganze Zahl oder Null gesetzt werden kann, so gibt es unter den Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ für $\varkappa$ nicht zwei solche, $\varkappa$ und λ, welche der Bedingungsgleichung $\lambda = \varkappa + km$ genügten; folglich sind auch die m Werthe des Ausdrucks $e^{i\frac{\alpha}{m}+i\varkappa\frac{2\pi}{m}}$ für jene Werthe von $\varkappa$ alle von einander verschieden. Hätte der Ausdruck noch andere, als jene m verschiedenen Werthe, so müßte es einen Werth von λ geben, welcher nicht gleich $\varkappa + km$ wäre, wenn für $\varkappa$ die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ gesetzt werden. Dieses ist, da λ positiv oder negativ ganz oder Null sein soll, nicht der Fall; folglich hat der fragliche Ausdruck nur jene m verschiedenen Werthe. Dieselben lassen sich nun leicht als die compleren Werthe von m verschiedenen Halbmessern im Kreise um O (17) nachweisen.

19. Bestimmt man in der Ebene des Kreises um O (12) einen Punct M, dessen Abscisse die reelle Zahl p und dessen Ordinate die reelle Zahl q ist, und bezeichnet r den absoluten Werth der Strecke OM, so gibt es immer einen positiven Bogen $\alpha < 2\pi$, für welchen $r\cos\alpha = p$ und $r\sin\alpha = q$, also $p + iq = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r . e^{i\alpha}$ ist. Hiernach wird $r^2 = p^2 + q^2$, $\cos\alpha = \frac{p}{r}$ und $\sin\alpha = \frac{q}{r}$, und diese Gleichungen dienen zur Bestimmung von r und α, wenn man die allgemeine Zahl $p + iq$ durch $re^{i\alpha}$ ausdrücken will.

Wenn nun $p + iq = re^{i\alpha}$ ist, so findet man $(p + iq)^m = r^m . e^{im\alpha}$ für ganze m und für $m = o$ (1 und Gl. V.); ferner, wenn $(\sqrt[m]{r})$ den einzigen positiven reellen Werth (2) von $\sqrt[m]{r}$ bezeichnet, wobei m natürlich nur positiv ganz ist, nach Gl. X.

XI. $\sqrt[m]{p+iq} = \sqrt[m]{re^{i\alpha}} = (\sqrt[m]{r}) . \sqrt[m]{e^{i\alpha}} = (\sqrt[m]{r}) . e^{i\frac{\alpha}{m}+ik\frac{2\pi}{m}} = (\sqrt[m]{r}) . e^{i\frac{\alpha}{m}} . e^{ik\frac{2\pi}{m}}$;

denn der letzte Ausdruck ist m deutig und umfaßt also alle m Werthe, welche $\sqrt[m]{p+iq}$ überhaupt haben kann (6).

Wenn $q=0$, und a den absoluten Werth von p bezeichnet, so wird $r=a$, $\cos\alpha=\pm 1$, $\sin\alpha=0$, folglich $\alpha=0$ oder $\alpha=\pi$, je nachdem p positiv oder negativ ist, und man erhält aus Gl. XI.

$$\sqrt[m]{a}=(\sqrt[m]{a})\,.\,e^{ik\frac{2\pi}{m}} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{-a}=(\sqrt[m]{a})\,.\,e^{i\frac{\pi}{m}+ik\frac{2\pi}{m}},$$

woraus sich von selbst die Werthe für $\sqrt[m]{+1}$ und $\sqrt[m]{-1}$ ergeben.

20. Setzt man $x=p+iq=re^{i\alpha}$ in der Reihe $\varphi(x)$ (8), so erhält man

XII.
$$\begin{cases}\varphi(x)=1+re^{i\alpha}+\frac{r^2}{2!}e^{i2\alpha}+\frac{r^3}{3!}e^{i3\alpha}+\frac{r^4}{4!}e^{i4\alpha}+\ldots\ldots \text{ oder}\\ \varphi(x)=1+r\cos\alpha+\frac{r^2}{2!}\cos 2\alpha+\frac{r^3}{3!}\cos 3\alpha+\frac{r^4}{4!}\cos 4\alpha+\ldots\ldots\\ \qquad +i(r\sin\alpha+\frac{r^2}{2!}\sin 2\alpha+\frac{r^3}{3!}\sin 3\alpha+\frac{r^4}{4!}\sin 4\alpha+\ldots\ldots)\end{cases}$$

Die beiden Reihen, sowohl die vordere, als auch die eingeklammerte, convergiren für jedes reelle r und α, weil $\cos n\alpha$ und $\sin n\alpha$ die Einheit nicht übersteigen und der Quotient $\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{r^n}{n!}=\frac{r}{n+1}$ für stets wachsende Werthe von n kleiner als 1 wird und sich der Null nähert; folglich convergirt auch die Reihe $\varphi(x)$ und hat eine Summe, für jedes x von der allgemeinen Form $p+iq$ (Lehrsatz II. a. a. O.). Diese Summe wird der früheren Erklärung gemäß (9) durch e^{p+iq} zu bezeichnen sein, und damit ist die Potenz e^x definirt, wenn der Exponent von der allgemeinen Form $p+iq$ ist. Wenn r und s reell und $y=r+is$ ist, so wird $x+y=(p+r)+i(q+s)$, und es convergiren auch die Reihen $\varphi(y)$ und $\varphi(x+y)$. Daher kommen die Gleichungen III. und IV. zu allgemeiner Geltung und mit ihnen zugleich die folgenden:

XIII. $e^x\,.\,e^y=e^{x+y}$ und $(e^x)^m=e^{mx}$.

Insbesondere wird aber hienach $e^{p+iq}=e^p\,.\,e^{iq}$.

Nun ist (9) $e^p=1+p+\frac{p^2}{2!}+\frac{p^3}{3!}+\frac{p^4}{4!}+\ldots\ldots$ eine eindeutige stetige Function von p, welche von 1 an beständig positiv und unbegrenzt zunimmt für positive, von Null an wachsende p, dagegen von 1 bis zur Grenze Null beständig abnimmt, wenn p von Null an negativ größer wird. Ferner hat man $e^p=e^{m\frac{p}{m}}=\left(e^{\frac{p}{m}}\right)^m$, folglich ist $e^{\frac{p}{m}}$ oder die Summe der Reihe $\varphi\left(\frac{p}{m}\right)$ (8) der einzige positive reelle Werth

von $\sqrt[m]{e^p}$, wenn m positiv ganz ist (2). Nach Gl. XI. erhält man daher

XIV. $$\sqrt[m]{e^{p+iq}} = \sqrt[m]{e^p \cdot e^{iq}} = e^{\frac{p}{m}} \cdot e^{i\frac{q}{m}} e^{ik\frac{2\pi}{m}} = e^{\frac{p}{m}+i\frac{q}{m}} \cdot e^{ik\frac{2\pi}{m}},$$

also auch für jedes x von der Form $p + iq$

$$\sqrt[m]{e^x} = e^{\frac{x}{m}} \cdot e^{ik\frac{2\pi}{m}} = e^{\frac{x}{m}+ik\frac{2\pi}{m}}.$$

21. In der Form, wie die Reihe XII. zuerst geschrieben ist, bedeuten ihre Glieder die complexen Werthe von Strecken, deren absoluter Werth $\frac{r^n}{n!}$ bei zunehmendem n zuletzt immer kleiner wird und der Grenze Null sich nähert, während die Richtung jeder Strecke von der Richtung der vorhergehenden um den constanten Bogen α abweicht. Die Summe der Reihe ist daher (13) der complexe Werth einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung. Da $x = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so ist diese Summe gleich $e^{r\cos\alpha + ir\sin\alpha} = e^{r\cos\alpha} \cdot e^{ir\sin\alpha}$ (20), folglich $e^{r\cos\alpha}$ der absolute Werth jener Strecke und $r\sin\alpha$ die Länge des Bogens, welcher ihre Richtung bestimmt (17). Vergleicht man dagegen den letzten Ausdruck für die Summe der Reihe, nämlich $e^{r\cos\alpha} \cdot e^{ir\sin\alpha} = e^{r\cos\alpha} \cdot \cos(r\sin\alpha) + ie^{r\cos\alpha} \cdot \sin(r\sin\alpha)$ mit der Reihe XII. in ihrer zweiten Form, so erhält man (3)

$$e^{r\cos\alpha} \cdot \cos(r\sin\alpha) = 1 + r\cos\alpha + \frac{r^2}{2!}\cos 2\alpha + \frac{r^3}{3!}\cos 3\alpha + \frac{r^4}{4!}\cos 4\alpha + \ldots.$$

$$e^{r\cos\alpha} \cdot \sin(r\sin\alpha) = r\sin\alpha + \frac{r^2}{2!}\sin 2\alpha + \frac{r^3}{3!}\sin 3\alpha + \frac{r^4}{4!}\sin 4\alpha + \ldots.$$

Diese Reihen finden sich weiter erörtert in einer Abhandlung von Dienger (Crelle's Journal, XXXIV, S. 221).

22. Die Summe der Reihe $\varphi(x)$ kann jeder von Null verschiedenen Zahl von allgemeiner Form gleich werden, wenn x ebenfalls allgemein und in der Form $p + iq$ gedacht wird, so daß $\varphi(x) = e^{p+iq}$ ist (20). Jede gegebene Zahl a läßt sich nämlich auf den Ausdruck $r \cdot e^{i\alpha}$ bringen (19). Soll alsdann a oder $re^{i\alpha} = e^{p+iq} = e^p \cdot e^{iq}$ oder $r\cos\alpha + ir\sin\alpha = e^p\cos q + ie^p\sin q$ werden, so muß $r\cos\alpha = e^p\cos q$ und $r\sin\alpha = e^p\sin q$, folglich $r^2 = (e^p)^2$ und, da e^p für reelle p stets positiv ist, $e^p = r$ sein. Nun gibt es aber immer einen und nur einen reellen Werth von p, für welchen $e^p = r$ ist (20), und dieser Werth heißt der natürliche reelle Logarithmus von r und soll durch lr bezeichnet werden. Aus der Gleichung $re^{i\alpha} = e^p \cdot e^{iq}$ folgt ferner, weil $r = e^p$ und nicht Null ist, daß $e^{i\alpha} = e^{iq}$, mithin $q = \alpha + 2k\pi$ sein muß (17). Versteht man nun unter log a jede Zahl x, für welche $a = e^x$ ist, so hat man im vorliegenden Falle

$$\log a = \log(re^{i\alpha}) = p + iq = lr + i(\alpha + 2k\pi)$$

Unter diesen unendlich vielen Werthen von $\log(re^{i\alpha})$ heißt derjenige der einfachste, für welchen $k = 0$ ist. Bezeichnet man ihn durch $L(re^{i\alpha})$, so wird

$$L(re^{i\alpha}) = lr + i\alpha,$$

$$\log a = \log(re^{i\alpha}) = L(re^{i\alpha}) + i2k\pi = La + i2k\pi.$$

Wenn $\alpha = 0$, so wird $Lr = lr$. Der einfachste Werth Lr von $\log r$ ist also zugleich der reelle natürliche Logarithmus lr, mithin

$$\log(re^{i\alpha}) = Lr + i(\alpha + 2k\pi) \quad \text{und} \quad L(re^{i\alpha}) = Lr + i\alpha.$$

Wenn $\alpha = 0$ und $r = e$, so wird hiernach

$$\log e = Le + i2k\pi = 1 + i2k\pi$$

23. Da auch die Werthe von $\log a$ in der Form $p + iq$ erscheinen, ebenso wie die Werthe von a^m und $\sqrt[m]{a}$ (19), wenn a in dieser Form gedacht wird, so erhält man nach Gl. XIII.

XV. $$a^m = (e^{\log a})^m = e^{m \log a} = e^{m\,La + im\,2k\pi} = e^{m\,La} \cdot e^{im\,2k\pi} = e^{m\,La},$$

wenn m positiv oder negativ ganz oder Null ist. Für solche Werthe von x erscheint demnach die Summe der Reihe $\varphi(x \log a)$, nämlich $e^{x \log a}$ als eine Potenz von a mit dem Exponenten x. Da aber bisher für die Potenz a^x noch keine Bedeutung festgesetzt ist, wenn x in der allgemeinen Form $p + iq$ genommen wird, so kann man auch in diesem Falle

$$a^x = e^{x \,.\, \log a}$$

setzen und dadurch zugleich a^x definiren für jedes von Null und e verschiedene a. Denn für $\log o$ läßt sich kein endlicher Werth angeben (22), und e^x erscheint bereits in der ganzen vorangehenden Entwicklung als eindeutige Summe der Reihe $\varphi(x)$ für jedes beliebige x von der Form $p + iq$. Diese Bedeutung soll e^x auch ferner behalten. Hienach wird

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2(\log a)^2}{2!} + \frac{x^3(\log a)^3}{3!} + \frac{x^4(\log a)^4}{4!} + \ldots\ldots,$$

wobei man jeden der unendlich vielen Werthe von $\log a$ hiefür setzen kann, jedoch in jedem Gliede denselben. Die allgemeine Potenz a^x wird also nach jener Definition im Allgemeinen vieldeutig. Nur wenn x positiv oder negativ ganz oder Null ist, erhält $e^{x \log a}$ den einzigen Werth des $e^{x\,La}$ nach Gl. XV., und dieser stellt zugleich den Werth der Potenz a^x dar, welche in diesem Falle nach den Definitionen 1 nur eindeutig sein kann.

24. Rechnet man die allgemeine Potenz aus, so erhält man

$$(r \,.\, e^{i\alpha})^{p+iq} = e^{(p+iq)\log(re^{i\alpha})} = e^{(p+iq)(Lr + i\alpha + ik\,2\pi)}$$
$$= e^{p\,Lr - q(\alpha + k\,2\pi)} \times e^{i(q\,Lr + p\alpha + pk\,2\pi)}.$$

Für $q = 0$ wird

$$(re^{i\alpha})^p = e^{p\,Lr} \,.\, e^{ip(\alpha + k\,2\pi)}.$$

Wenn p hierin gleich der positiven oder negativen ganzen Zahl n ist, so wird

$$(re^{i\alpha})^n = e^{nLr} \cdot e^{in(\alpha + k\,2\pi)} = r^n \cdot e^{in\,\alpha} \qquad (23).$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der früher gefundenen (19); zugleich erhält man nach Gl. XIV.

$$\sqrt[m]{(re^{i\alpha})^n} = \sqrt[m]{e^{n\,Lr} \cdot e^{in\,\alpha}} = e^{\frac{nLr}{m}} \cdot e^{i\frac{n\alpha}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}$$

und, wenn $n = 1$ ist,

$$\sqrt[m]{re^{i\alpha}} = e^{\frac{Lr}{m} + \frac{i\alpha}{m} + \frac{ik\,2\pi}{m}} = e^{\frac{1}{m}\log(re^{i\alpha})} = (re^{i\alpha})^{\frac{1}{m}} \qquad (22, 23).$$

Im Allgemeinen bezeichnet also der Ausdruck $a^{\frac{1}{m}}$ jeden der m verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{a}$, wenn a von der Form $p + iq$ ist, und alsdann hat man auch nach Gl. XIII.

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(e^{\frac{1}{m}\log a}\right)^n = e^{\frac{n}{m}\log a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Läßt man also nach der Definition der allgemeinen Potenz alle Werthe von $a^{\frac{n}{m}}$ gelten, so sind diese identisch mit den Werthen von $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$.

25. Legt man der Entwickelung von $\sqrt[m]{a^n}$ und $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$ bloß die Gleichung XI. zu Grunde, so erhält man

$$\sqrt[m]{(re^{i\alpha})^n} = \sqrt[m]{r^n \cdot e^{in\,\alpha}} = \left(\sqrt[m]{r^n}\right) \cdot e^{i\frac{n\alpha}{m} + ik\frac{2\pi}{m}}$$

$$\left(\sqrt[m]{re^{i\alpha}}\right)^n = \left(\sqrt[m]{r}\right)^n \cdot e^{i\frac{n\alpha}{m} + ikn\frac{2\pi}{m}},$$

wobei man für $\sqrt[m]{r}$ nur den einzigen positiven reellen Werth zu nehmen hat. Es läßt sich dann leicht beweisen, daß $(\sqrt[m]{r^n}) = (\sqrt[m]{r})^n$ ist (2) und der zweite Ausdruck genau dieselben m Werthe umfaßt, welche der erste darstellt, so lange m und n theilerfremd sind. Im entgegengesetzten Falle hat der zweite Ausdruck weniger als m Werthe, und zwar jedesmal nur so viele, als der Nenner des in den kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruches $\frac{n}{m}$ Einheiten enthält. Man findet nämlich alle Werthe des ersten Ausdrucks, wenn man für k nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots m-1$ setzt. Bezeichnet man diese Werthe von k durch $\varkappa$ und ein beliebiges k im zweiten Ausdrucke durch λ, so drückt die Gleichung $e^{i\varkappa\frac{2\pi}{m}} = e^{i\lambda n\frac{2\pi}{m}}$ oder $\varkappa\frac{2\pi}{m} + 2k\pi = \lambda n\frac{2\pi}{m}$ oder $\varkappa + mk = \lambda n$ die Bedingung aus, daß der erste Ausdruck alle Werthe des zweiten umfasse (18). Da $\varkappa + mk$ der Null und jeder positiven oder negativen ganzen Zahl gleich werden kann,

so wird die Bedingung für jedes λ erfüllt. Sollen die Werthe des zweiten Ausdrucks für $k = \lambda$ und $k = \mu$ einander gleich werden, so muß $e^{i\lambda n\frac{2\pi}{m}} = e^{i\mu n\frac{2\pi}{m}}$ oder $\lambda n\frac{2\pi}{m} + k2\pi = \mu n\frac{2\pi}{m}$ oder $\lambda n + mk = \mu n$ oder $mk = (\mu - \lambda)n$ sein. Sind m und n relative Primzahlen, so wird der Gleichung genügt, wenn $\mu - \lambda = mk$, also $\mu = \lambda + \mu k$ ist. Aus dieser Gleichung erkennt man, wie früher (18), daß der zweite Ausdruck in diesem Falle m verschiedene Werthe hat, welche man erhält, wenn man für k nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots m-1$ setzt. Haben aber m und n den größten gemeinschaftlichen Theiler q, und ist $m = \alpha q$, $n = \beta q$, so wird die Bedingungsgleichung $\alpha k = (\mu - \lambda)\beta$ erfüllt, wenn $\mu = \lambda + \alpha k$ ist; daher stellt der zweite Ausdruck in diesem Falle nur α verschiedene Werthe dar, welche man erhält, wenn man für k nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \alpha - 1$ setzt.

Die Werthe von $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$, für welche $k = 0$ ist, also die einfachsten, sind einander gleich. Rechnet man also nur mit den einfachsten Werthen der Wurzelausdrücke, so lassen sich $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$ unbedingt mit einander vertauschen, mögen nun m und n theilerfremd oder theilerverwandt sein.

26. Da nach Gl. XV. $r^n = e^{nLr}$, so wird nach Gl. XIV. $\sqrt[m]{r^n} = e^{\frac{n}{m}Lr + ik\frac{2\pi}{m}}$, also der reelle positive Werth $(\sqrt[m]{r^n}) = e^{\frac{n}{m}Lr}$, und, wenn $n = 1$, $(\sqrt[m]{r}) = e^{\frac{Lr}{m}}$. Hiernach erhält man für den einfachsten Werth von $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$ den Ausdruck

$$e^{\frac{n}{m}Lr} \cdot e^{i\frac{n}{m}\alpha} = e^{\frac{n}{m}(Lr + i\alpha)} = e^{\frac{n}{m}L\alpha},$$

insofern $La = L(re^{i\alpha}) = Lr + i\alpha$ ist (22). Versteht man nun noch unter dem einfachsten Werthe der allgemeinen Potenz

$$a^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{n}{m}\log a} = e^{\frac{n}{m}La + ikn\frac{2\pi}{m}}$$

denjenigen, für welchen $k = 0$ ist, so zeigt sich dieser einfachste Werth der allgemeinen Potenz $a^{\frac{n}{m}}$ zugleich als der einfachste Werth der Wurzelausdrücke $\sqrt[m]{a^n}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$. Berücksichtigt man also bei der Rechnung keine anderen als die einfachsten Werthe, so darf man die letzteren Ausdrücke überall durch $a^{\frac{n}{m}}$ ersetzen. Hält man dagegen alle Werthe der Wurzelausdrücke fest und nimmt zugleich $a^{\frac{n}{m}}$ in seiner allgemeinen Bedeutung (23), so kann man sich des Ausdrucks $a^{\frac{n}{m}}$ unbedingt für $(\sqrt[m]{a})^n$ bedienen, für $\sqrt[m]{a^n}$ aber nur, wenn m und n theilerfremd sind (24).

27. Für die vorhergehende Entwickelung wurde der binomische Lehrsatz als erwiesen vorausgesetzt, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist. Es soll nun noch die Binominalreihe

$$1 + x_1 z + x_2 . z^2 + x_3 . z^3 + x_4 . z^4 + \ldots\ldots = F(x),$$

worin $x_{n+1} = \frac{x_n . (x - n)}{n + 1}$, also $x_0 = 1$ und $x_1 = x$ ist, für den Fall untersucht werden, daß x eine beliebige reelle Zahl bedeute. Eine zweite solche Reihe sei F(y), worin y ebenfalls beliebig reell ist. Kann man nun zeigen, daß die Reihe, deren allgemeines Glied

1. $(y_n + y_{n-1} . x_1 + y_{n-2} . x_2 + y_{n-3} . x_3 + \ldots\ldots y_1 . x_{n-1} + x^n) . z^n$

ist, identisch ist mit der als convergent vorausgesetzten Reihe F(x + y), so hat man (Lehrsatz VII, a. a. O.)

2. $$F(x) . F(y) = F(x + y).$$

Jene Reihen sind aber identisch, wenn das allgemeine Glied $(x + y)_n . z^n$ in F(x + y) durch den Ausdruck 1. dargestellt wird, also auch, wenn

3. $y_{n+1} + y_n . x_1 + y_{n-1} . x_2 + y_{n-2} . x_3 + \ldots\ldots y_1 x_n + x_{n+1} = (x + y)_{n+1}$

ist, d. h. wenn der Ausdruck 3. aus dem Coefficienten von z^n im Ausdruck 1. hervorgeht, sobald man diesen mit $\frac{x + y - n}{n + 1}$ multiplicirt. Dieses ist in der That der Fall, wovon man sich durch Ausführung der Multiplication überzeugt; folglich ist die Reihe, deren allgemeines Glied der Ausdruck 1. darstellt, identisch mit der Reihe F(x + y), und daraus folgt die Gültigkeit der Gleichung 2., so lange die Reihen convergiren.

28. Es sei z eine allgemeine Zahl $= re^{i\alpha}$, dann wird

$$F(x) = 1 + x_1 re^{i\alpha} + x_2 r^2 e^{i2\alpha} + x_3 r^3 e^{i3\alpha} + \ldots\ldots$$

Diese Reihe convergirt, wenn $1 + x_1 r + x_2 r^2 + x_3 r^3 + \ldots\ldots$ convergirt, also wenn der Quotient $\frac{x_{n+1} . r^{n+1}}{x_n . r^n} = \frac{(x - n)r}{n + 1}$ sich bei beständig zunehmendem n einer Grenze nähert, welche absolut < 1 ist. Dieses ist immer der Fall, so lange $r < 1$ ist; mithin convergirt die durch F(x) bezeichnete Reihe, und die Gleichung 2. hat Geltung für jedes beliebige reelle x und y, so lange $r < 1$ ist.

Man setze $F(y) = 1 + de^{i\delta} = ce^{i\gamma}$ und nehme für γ nur den kleinsten positiven oder negativen Bogen, so ist

$$de^{i\delta} = y_1 re^{i\alpha} + y_2 r^2 e^{i2\alpha} + y_3 r^3 e^{i3\alpha} + \ldots\ldots,$$

und die Binominal-Coefficienten sowohl, wie ihre durch η_1, η_2, η_3 .... bezeichneten absoluten Zahlenwerthe sind stetige Functionen von y; daher ist auch die Reihe

$$t = \eta_1 r + \eta_2 r^2 + \eta_3 r^3 + \ldots\ldots,$$

welche stets convergirt für $r < 1$, eine stetige Funetion von y (Lehrsatz V. a. a. O.).

Für $y = 0$ wird $d = 0$, $c = 1$ und $\gamma = 0$. Da nun d niemals größer sein kann als t, so nimmt d stetig zu, wenn y von Null an wächst, und deshalb sind auch c und γ stetige Functionen von y.

Ist also $F(x) = be^{i\beta}$, so wird

$$F(x+y) = F(x) \cdot F(y) = be^{i\beta} \cdot ce^{i\gamma} = bc \cdot e^{i(\beta+\gamma)},$$

woraus hervorgeht, daß die Größen b und β nicht nur stetige Functionen von x sind, sondern daß auch für jedes beliebige x der zugehörige Bogen β bei gleicher Aenderung von x immer um gleichviel sich ändert.

29. Wenn die positive Zahl b eine stetige Function von x ist, so ist auch Lb eine solche (20), folglich kann man setzen $b = e^{f(x)}$ und $\beta = \varphi(x)$, also $F(x) = e^{f(x)} \cdot e^{i\varphi(x)}$ und $F(y) = e^{f(y)} \cdot e^{i\varphi(y)}$. Hieraus erhält man $F(x) \cdot F(y) = e^{f(x)+f(y)} \cdot e^{i\varphi(x)+i\varphi(y)}$ und, da $F(x) \cdot F(y) = F(x+y) = e^{f(x+y)} \cdot e^{i\varphi(x+y)}$ ist, durch Substitution $e^{f(x)+f(y)} = e^{f(x+y)}$ und $e^{i\varphi(x)+i\varphi(y)} = e^{i\varphi(x+y)}$, folglich

4. $$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

5. $$\varphi(x) + \varphi(y) + 2m\pi = \varphi(x+y),$$

wo m als ganze Zahl unbestimmt bleibt. Wenn aber $\varphi(x)$ z. B. bei stetiger Zunahme von x um eine kleine Quantität sich ändert, so erfährt $\varphi(x+y)$ dieselbe Aenderung (28), folglich ist m eine von x und y unabhängige Constante.

Setzt man in Gl. 5. nach und nach x, 2x, 3x . . . . . $(n-1)x$ statt y, so erhält man schließlich

6. $$\varphi(nx) = n\varphi(x) + (n-1)2m\pi.$$

Hieraus folgt $\varphi(n) = n(\varphi(1) + 2m\pi) - 2m\pi$ oder, wenn man $\varphi(1) + 2m\pi = v$ setzt,

7. $$\varphi(n) = nv - 2m\pi.$$

Wenn in Gl. 6 $x = \frac{\mu}{n}$, und μ eine ganze positive Zahl ist, so wird $n\varphi\left(\frac{\mu}{n}\right) + (n-1)2m\pi = \varphi(\mu) = \mu v - 2m\pi$, folglich

$$\varphi\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{\mu}{n} v - 2m\pi.$$

Die Gleichung 7. findet daher für alle positiven und rationalen Werthe von n statt. Ferner folgt aus Gl. 6., wenn $x = 0$,

$$\varphi(0) = -2m\pi,$$

und aus Gl. 5., wenn $y = -x$ ist, $\varphi(x) + \varphi(-x) + 2m\pi = \varphi(0) = -2m\pi$, mithin, so lange x rational und positiv ist,

$$\varphi(-x) = -xv - 2m\pi.$$

Die Gleichung $\varphi(x) = xv - 2m\pi$ findet also allgemein für alle rationalen Werthe von x und folglich für alle reellen Werthe von x statt. Ebenso erhält man aus der Gl. 4., wenn man f(1) durch h bezeichnet, die für jedes reelle x gültige Gleichung

$$f(x) = xh.$$

Hienach wird

8. $$F(x) = e^{xh} \cdot e^{ixv} = e^{x(h+iv)}$$

9. $$F(1) = e^{h} \cdot e^{iv} = e^{h+iv} = 1 + re^{i\alpha}$$

30. Mittels der Gleichung 8. läßt sich nun der Werth von $h + iv$ bestimmen, wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch die entsprechenden Reihen ersetzt und deren Grenzwerthe sucht für verschwindende x. Zunächst ist

$$\frac{F(x)-1}{x} = z + \frac{x-1}{1.2}z^2 + \frac{x-1.x-2}{1.2.3}z^3 + \frac{x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4}z^4 + \ldots\ldots = \frac{e^{x(h+iv)}-1}{x}.$$

Da diese Reihe für jeden Werth von x, auch für $x = 0$, convergirt, wenn $r < 1$, und die Coefficienten der Potenzen von z continuirliche Functionen von x sind, so ist die Summe der Reihe eine stetige Function von x (Lehrsatz V. a. a. O.), ebenso wie die Summe der Reihe, welche für den letzten Ausdruck rechts kann gesetzt werden (20). Läßt man also x beständig abnehmen, so müssen die Werthe beider Reihen sich derselben Grenze nähern, und da

$$\lim \frac{e^{x(h+iv)}-1}{x} = h + iv = \lim \frac{F(x)-1}{x}$$

ist, so wird

$$h + iv = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots\ldots,$$

woraus man

10. $$h = r\cos\alpha - \frac{1}{2}r^2\cos 2\alpha + \frac{1}{3}r^3\cos 3\alpha - \frac{1}{4}r^4\cos 4\alpha + \frac{1}{5}r^5\cos 5\alpha - \ldots.$$

11. $$v = r\sin\alpha - \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha + \frac{1}{3}r^3\sin 3\alpha - \frac{1}{4}r^4\sin 4\alpha + \frac{1}{5}r^5\sin 5\alpha - \ldots.$$

findet. Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß h und v stetige Functionen von r sind (Lehrsatz IV. a. a. O.), und zwar sind beide Größen Null, wenn $r = 0$ ist; ferner aus der Gleichung 9., daß v positiv oder negativ von Null an mit r stetig zunimmt und absolut kleiner bleibt als $\frac{1}{2}\pi$, so lange $r < 1$ ist. Versteht man jetzt unter $L(1+z)$ nur denjenigen Werth von $\log(1+z)$, welcher den kleinsten positiven oder negativen Bogen enthält (22), so ist $h + iv$ nach Gl. 9. dieser Werth von $\log(1+z)$; hält man ferner unter den Werthen der allgemeinen Potenz $(1+z)^x$ nur den Werth $e^{xL(1+z)}$ fest (23), so ergibt sich nach Gl. 8.

$$(1+z)^x = e^{xL(1+z)} = e^{x(h+iv)} = F(x) \quad \text{oder}$$

$$(1+re^{i\alpha})^x = 1 + x_1 re^{i\alpha} + x_2 r^2 e^{i2\alpha} + x_3 r^3 e^{i3\alpha} + \ldots\ldots,$$

für jedes reelle r, wenn $x < 1$ ist.

31. Wenn $\alpha = 0$, so wird $v = 0$ nach Gl. 11. und $e^h = 1 + r$ nach Gl. 9., folglich $h = L(1+r)$ und nach Gl. 10.

$$12.\quad L(1+r) = r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 + \ldots\ldots$$

Setzt man dagegen $\alpha = \pi$, so wird $v = 0$ und $e^h = 1 - r$ nach Gl. 9., folglich $h = L(1-r)$ und nach Gl. 10.

$$13.\quad L(1-r) = -r - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 - \ldots\ldots$$

Subtrahirt man diese Gleichung von Gl. 12., so wird

$$14.\quad L\frac{1+r}{1-r} = 2\left(r + \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{5}r^5 + \frac{1}{7}r^7 + \ldots\ldots\right),$$

weil $L(1+r) - L(1-r) = L\frac{1+r}{1-r}$ ist. Setzt man $\frac{1+r}{1-r} = a$, so wird $r = \frac{a-1}{a+1}$, und wenn $r < 1$ sein soll, so kann a jede positive, die Eins übertreffende Zahl bedeuten. Man erhält dann leicht die bekannte Reihe für La aus Gl. 14.

Setzt man endlich $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so folgt aus Gl. 9., daß $h^2 = 1 + r^2$ und $r = \operatorname{tang} v$ ist, und man erhält aus Gl. 11.

$$15.\quad v = \operatorname{tang} v - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 v + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 v - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 v + \ldots\ldots,$$

wenn $\operatorname{tang} v < 1$ ist. Da aber die Reihe auch für $\operatorname{tang} v = 1$ convergirt, so nimmt v mit $\operatorname{tang} v$ von Null an stetig zu und wird gleich $\frac{1}{4}\pi$, wenn $\operatorname{tang} v = 1$ ist (Lehrsatz IV. a. a. O.). Man hat also

$$16.\quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$$

Uebrigens findet man leicht mittels Gl. 15. eine zur Berechnung von π schneller convergirende Reihe auf bekannte Weise.

Schulnachrichten.

Mit dem neuen Schuljahre, dem siebenten seit der Wiedereröffnung der Anstalt, tritt das Gymnasium Arnoldinum durch Errichtung seiner Prima in den Kreis der vollständigen höheren Bildungs-Anstalten der Provinz. Hiermit ist der vor 6 Jahren mit den beiden untersten Klassen begonnene und durch successive Vermehrung der Klassen und Lehrkräfte fortgesetzte Ausbau seinem Ziele entgegen geführt. Das Gymnasium besteht aus 9 Klassen, drei gemeinschaftlichen unteren und je drei oberen in sämmtlichen Unterrichtsgegenständen getrennten Gymnasial- und Real-Klassen. Der demselben bei seiner Einrichtung zu Grunde gelegte Plan, nach welchem die 3 unteren Klassen den ins bürgerliche Leben übergehenden Schülern ein abgeschlossenes Wissen geben und die übrigen zum Eintritt in die Real- und Gymnasial-Klassen in gleicher Weise befähigen, hat durch die Verlegung des Griechischen aus G. III. nach IV., welche durch den in dem verflossenen Schuljahre bereits befolgten Normalplan vom 7. Januar 1856 geboten ist, eine geringe Modification erhalten, indem nun die Schüler der IV. nicht mehr an sämmtlichen Unterrichtsgegenständen gemeinschaftlich Theil nehmen und ihnen bereits in IV. die Entscheidung darüber auferlegt wird, ob sie weiterhin die Real- oder Gymnasialklassen besuchen wollen. Doch ist in Berücksichtigung der Bedürfnisse unserer Doppelanstalt von dem Herrn Cultusminister genehmigt worden, daß das Griechische statt mit 6 nur mit 4 Stunden in IV. begonnen wird und die übrigen 2 Stunden nach wie vor der Naturgeschichte zufallen: ferner ist durch je 2 den vom Griechischen dispensirten Schülern der IV. besonders ertheilte Stunden im Französischen und im Rechnen für das Bedürfniß der ins bürgerliche Leben oder zur Realschule übergehenden Schüler gesorgt worden.

I. Lehrverfassung.

A. Lectionsplan für das Schuljahr von Ostern 1858 bis dahin 1859.

a. Allgemeiner Lectionsplan.

Lehrfächer.	VI.	V.	IV.	R. III.	G. III.	R. II.	G. II.
Religion	3	3	2	2	2	2	2
Latein	9	9	10	4	10	4	10
Deutsch	3	3	2	3	2	3	2
Französisch	—	3	2(+2)	4	2	4	2
Griechisch	—	—	4	—	6	—	6
Englisch	—	—	—	4	—	4	—
Hebräisch	—	—	—	—	—	—	2
Geschichte	—	—	2	2	2	2	3
Geographie	2	2	1	1	1	1	
Mathematik	—	—	2	4	3	4	4
Rechnen	4	3	1(+2)	2	—	—	—
Physik	—	—	—	2	—	4	—
Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	2	—
Schreiben	3	3	—	—	—	—	—
Zeichnen	2	2	2	2	—	2	—
Singen	2	1	1	1	1	1	1
Gymnast. Uebungen.	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)
Summa	30	31	31	33	31	33	32

— bezeichnet Combination.
Die (+) bezeichnet die den vom Griechischen dispensirten Quartanern besonders gegebenen Stunden.

Mit Genehmigung des Herrn Cultusministers ist in Rücksicht auf die elementare Vorbildung der Schüler von den in den unteren Klassen für den lateinischen Unterricht bestimmten 10 Stunden wöchentlich eine in VI. u. V. dem Deutschen zugelegt, sowie die durch den Normalplan für den Gymnasial-Unterricht der IIda zugewiesene vereinzelte Stunde in der Physik in Wegfall gebracht worden.

b. Vertheilung der Fächer auf die einzelnen Lehrer.

Lehrer.	Ord.	VI.	V.	IV.	G. III.	R. III.	G. II.	R. II.	
Director **Rohdewald**	G. II.			1 Geogr.			7 Latein. 2 Deutsch 2 Franz. 3 Gesch. u. Geographie	4 Franz. 4 Engl.	23
2. Oberlehrer **Heuermann**	G. III.	2 Naturbeschreib. 2 Zeichnen	2 Zeichnen		8 Latein 2 Deutsch 2 Franz.		4 Griech.	2 Gesch. 1 Geogr.	25
3. Oberlehrer **Kysäus**	R. II.			2 Naturbeschreib.	2 Naturgeschichte	2 Algebra	4 Mathem.	2 Zeichnen 3 Deutsch 4 Mathem. 2 Naturg. 4 Physik	25
1. Gymn.-Lehrer Dr. **Wilms**	IV.			2 Deutsch 10 Latein	6 Griech. III a.	2 Physik	2 Griech.	4 Latein	26
2. Gymn.-Lehrer **Klostermann**	R. III		2 Geogr.	4 Griech. 4 G. III b.	2 Griech. III b. 2 Gesch. 1 Geogr.	3 Deutsch 4 Latein 4 Franz. 2 Geogr.	3 Latein		26
3. Gymn.-Lehrer **Orth**	V.		3 Deutsch 9 Latein 3 Franz. 2 Naturg.	2 Mathem. 1 Rechnen d. ganze IV.	2 Geometrie 1 Algebra	4 Engl.			27
5. Gymn.-Lehrer Dr. **Kleine**	VI.	3 Deutsch 9 Latein 2 Geogr.		4 Franz. 2 Gesch.	2 Latein	2 Gesch.	2 Hebräisch		26
Gymn.-Elem.-Lehrer **Lefholz**		3 Religion 3 Schreiben 4 Rechnen 2 Singen	3 Schreiben 3 Rechnen 1 Singen	2 Zeichnen 2 Rechnen	1 Singen	2 Rechnen 2 Zeichnen			28
Evangelischer Relig. Lehrer Pastor **Schimmel**				2 Religion	2 Religion		2 Religion		6

c. Specieller Lehrplan.

Gymnasial-Secunda. Ordinarius: Der Director.

1. Sprachen. Deutsch 2 Stunden. Lectüre: die größeren Balladen und einige culturhistorische Gedichte von Schiller, desselben Wallenstein's Lager, die Piccolomini, Wallensteins Tod (letzteres stataristh.) und die Braut von Messina. 4 w. Aufsatz. Der Ordinarius.

Latein 10 St. Grammatik 3 St.: Wiederholung der Syntax mit Eingehen auf die Besonderheiten; dazu die Syntaxis ornata nach Zumpt. 8tägl. Exercitien nach Süpfle II. 14tägl. Extemporalien. Lectüre: Sallustius de bello Catilin.; Cic. orat. pro Archia poeta, pro Murena, pro Ligario, pro rege Dejotaro; Cato major. 4 St. Der Ord.

Virgil. Aeneis IV. V. VI. Zusammenhängende Abschnitte wurden memorirt. 2 St.

Metrische Uebungen 1 St. Der Hexameter und das Distichon eingeübt nach Seyffert Pal. Mus. Klostermann.

Griechisch 6 St. Grammatik 2 St. Die unregelmäßigen Verba systematisch, Syntax des Artikels, des Pronomens, der Genera und Tempora des Verbums nach Buttm. §. 122—134. Schriftliche und mündliche Einübung nach Halm Elementarb. I. 14tägl. Exercitien; 4wöchentl. Extemporalien.

Lectüre 2 St. Xenoph. Memorabil. I. II. III. Heuermann.

Homeri Odyss. X—XIV. Lib. X. zum Theil memorirt. Dr. Wilms.

Französisch 2 St. Grammatik 1 St. Syntax des Zeitworts, der Inversion und der Partikeln nach Knebel. Uebungsbuch von Propst. Lectüre 1 St. aus Schütz Lesebuch: le Squatter, le Facteur de Canton, la Troque und einzelnes Poetisches. 14tägl. Exercitien, 4wöchentl. Extemporalien. D. O.

Hebräisch. Einübung der Formenlehre bis zu den Verbis prim. rad. Nun nach Gesenius. Lectüre nach Gesenius Lesebuch p. 1—20. Dr. Kleine.

2. Wissenschaften. Religion 2 St. Lectüre der apostolischen Briefe und der Apokalypse 1—3. Wiederholung der früher gelernten Kirchenlieder. Pastor Schimmel.

Geschichte und Geographie 3 St. Geschichte der Römer mit Berücksichtigung der Cultur. Geschichtstabelle von Cauer. Wiederholung der Geographie der außereuropäischen Erdtheile. D. O.

Mathematik 4 St. Geometrie 2 St. Wiederholung des Wichtigsten aus dem Cursus der Tertia, Berechnung des Inhalts ebener Figuren und Anwendung der Algebra auf die Geometrie, Anfangsgründe der Stereometrie. Arithmetik 2 St.

Wurzelberechnung, Logarithmen, Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren unbekannten Größen. Uebungsbeispiele aus M. Hirsch. 14tägl. Ausarbeitung geometr. Sätze. Kyſäus.

3. **Fertigkeiten.** Singen 1 St. 4stimmiger Chorgesang aus Erk's Sängerhain.
Gymnastische Uebungen 4 St. Dr. Kleine.
Schwimmunterricht unter Oberleitung des G.-L. Klostermann.

Die für die deutschen Aufsätze behandelten Themata waren:

1. Gedankenfolge in dem Gedichte: der Spaziergang von Schiller.
2. Ueber Schiller's Ballade: Hero und Leander (Stoff, Behandlung, Idee.)
3. Darstellung der Verhandlungen im Römischen Senate über die Bestrafung der Theilnehmer an der Catilinarischen Verschwörung (nach Sallust und Cicero).
4. Zusammenstellung und Erklärung von sprichwörtlichen Redensarten über Theile des menschlichen Körpers (Kopf, Hand, Fuß).
5. Trahimur omnes studio laudis et optimus quisque maxime gloria ducitur. (Chrie).
6. Der juristische Theil der Rede Cicero's für den Dichter Archias.
7. Characteristik der Hauptpersonen in Wallenstein's Lager.
8. Wer war würdiger, das Consulat zu erlangen, Sulpicius oder Murena? (nach Cicero's Rede.)
9. Frei geht das Unglück durch die ganze Erde. (Wallensteins Tod Act. 4, Sc. 11) Chrie.
10. Durch welche Motive wird Wallenstein (bei Schiller) bewogen, vom Kaiser abzufallen?
11. Characteristik Buttlers.

Die für die lateinischen Aufsätze (im 2. Semester der Ober-Secunda) behandelten Themata waren:

1. Hannibal Saguntum oppidum oppugnat.
2. Unus cunctando Romanam restituit rem.
3. Roma urbs a Gallis incendio deleta a Camillo refecta.
4. Africanus et Petrejus a Caesare ad Ilerdam superantur.
5. Fructus senectutis est ante partorum bonorum memoria. Cic. Cato M. §. 71.
6. Agamemnon Homericus non ut Ajacis similes habeat decem, sed ut Nestoris optat: quod si sibi acciderit, non dubitat quin brevi Troja sit peritura. Cat. M. §. 31.

Letztere beiden Arbeiten Chrien.

Real-Secunda. Ordinarius: Oberlehrer Kyſäus.

1. **Sprachen.** Deutſch 3 St. Lectüre: Balladen und culturhiſtoriſche Gedichte Schillers; Wilhelm Tell und Wallenſtein. Abſchnitte aus Schiller's 30jährigem Kriege. 3wöchentl. Aufſatz. D. O.

Latein 4 St. Grammatik 1 St. Syntax der Caſus, Tempora und Modi nach Zumpt's Auszug. Exercitien 4wöchentl. Lectüre: Caesar de bello Gall. IV. V. VI. VII. Einige Abſchnitte aus Ovid. Dr. Wilms.

Franzöſiſch 4 St. Syntax des Pronomens, des Verbums, der Inverſion und Partikeln nach Knebel. Wöchentl. ein Exercitium nach Propſt Uebungsb.; Extemp. 14tägl. Dazu im 2. Semeſter der Ober-Secunda freie Arbeiten 4wöchentl. 2 St. Lectüre: im Sommer aus Schütz franz. Leſebuch: Colomba und Poetiſches; im Winter l'Avare und les Fourberies de Scapin p. Molière, Michel Perrin p. Mélesville, Bertrand et Raton p. Scribe. Der Director.

Engliſch 4 St. Grammatik 2 St. Die Syntax mit Vergleichung des Franzöſiſchen und Lateiniſchen nach Wagner's Schulgrammatik. 14tägl. Exercitien nach Herrig's Uebungsbuch, im 2. Semeſter der Ober-Sec. eine freie Arbeit 4wöch.; Extemporalien 4wöchentl. Lectüre aus Schütz Engliſches Leſebuch: The Abencerrage, The Slaveship, Sketches from Syria and Egypt, The Three Cutters, Story of Captain X —, Adventures of a Pirate, The Skirmish of Drumclog, Rich and Poor, The Spring-tide und einzelnes Poetiſches. Der Director.

2. **Wiſſenſchaften.** Religion 2 St. comb. mit G. II.

Geſchichte 2 St. Geſchichte der morgenländiſchen Völker und der Griechen bis zu den Diadochen, mit Berückſichtigung der Cultur. Geſchichtstabelle v. Cauer. Heuermann.

Geographie 1 St. Wiederholung der topiſchen und politiſchen Geographie Europa's. Heuermann.

Mathematik 4 St. wie in G. II. D. O.

Phyſik 4 St. Das Wichtigſte aus der Statik und Dynamik, die Lehre von der Wärme und Electricität. D. O.

Naturgeſchichte 2 St. Im Sommer reſp. bis zum Ende der günſtigen Jahreszeit Erweiterung der botaniſchen Syſtemkunde; im Winter daſſelbe für die Zoologie, ausführlich für Inſecten. D. O.

3. **Fertigkeiten.** Zeichnen 2 St. Zeichnen von Landſchaften und Köpfen, nach dem „Berliner Zeichenlehrer"; perſpectiviſches Zeichnen mit Schlagſchatten und Tuſche. D. O.

Singen 1 St. Einübung 4stimmiger Gesänge aus Erk's Sängerhain. Lefholz.

Gymn. Uebungen 4 St. comb. mit G. II.

Die Themata für die deutschen Arbeiten waren:

1. Ueber den Nutzen des Eisens.
2. Entwickelung des Gedankengangs in Schillers Lied von der Glocke.
3. Ueber den Grundgedanken in Schiller's Gedichte: das verschleierte Bild zu Sais.
4. Erster Zug Cäsar's nach Britannien. (Caesar de bello Gall. IV, 20—38.)
5. Der Schleusenmeister des Westens. Erzählung nach der gleichnamigen Erzählung von Souvestre (in Schütz franz. Lesb.)
6. Entwickelung des Gedankenganges in Schiller's Gedichte: Kassandra.
7. a. Eine Schilderung aus dem Leben. b. Peters Rückkehr, ein Gespräch.
8. Ueber Tell's Monolog. (Wilh. Tell A. 4. Sc. 3.)
9. Characteristik Ruodi's in Schiller's Wilhelm Tell.
10. Die Luftpumpe.
11. Gang der Handlung in Wallenstein's Tod von Schiller.
12. Das Reiterlied in Wallenstein's Lager — ein treffliches Zeitgemälde.
13. Ueber den Kunsttrieb der Insecten.
14. Wallenstein in der Geschichte und im Drama.

Die Themata der frvnzösischen freien Arbeiten waren:

1. Tracer le sujet du drame: La Berline de l'Emigré.
2. Riche et Pauvre. (nach Sam. Warren in Schütz engl. Lesb.)
3. Exposition de l'Acte premier de la comédie: L'Avare par Molière.
4. La découverte de l'Amérique (nach Washington Irving).
5. Exposer le sujet de la Comédie-Vaudeville: Michel Perrin p. Mélesville.
6. La mort de Walstein.

Die Themata für die englischen freien Arbeiten waren:

1. The expedition of Xerxes against Greece.
2. The principal facts in the story of the maid of Orleans.
3. A faithful friend is a strong defence. (Die Erzählung zu erfinden.)
4. Adventures of a smuggler. (nach Marryat's „The Three cutters.")
5. The ring of Polycrates by Schiller.
6. Tell and Gessler.

Gymnasial-Tertia. Ordinarius: Oberlehrer Heuermann.

1. **Sprachen.** Deutsch 2 St. Balladen und kleinere Lesestücke nach Spieß. Benutzung des Lehrstoffs zu mündlichen und schriftlichen Uebungen. Unterscheidung der Dichtungsarten. 3wöchentl. Aufsatz. Memoriren klassischer Balladen.

Latein 10 Stunden. Grammatik 3 St.: Syntax von Zumpt §. 362—670. mit Beschränkung auf den normalen Stoff. Mündliche und schriftliche Uebungen nach Süpfle I. Exercitien wöchentlich, Extemp. 14tägl. — Lectüre: Caesar de bello Gall. VII.; de bello Civili I.—III. 5 St. D. O.

Ausgewählte Stücke aus Ovid. Metam. I. IX. X. XI. Metr. Uebungen.

Dr. Kleine.

Griechisch 6 St. G. III. a. Grammatik nach Buttmann: Verba auf μι, unregelmäßige Verba nach der Uebersicht v. Krüger. Pensa nach Schmidt und Wensch 8tägl. Extemp. 14tägl. Xenophon Anab. I. II. III. Hom. Od. I. II. Einübung der homer. Formenlehre. Dr. Wilms.

G. III. b. Formenlehre nach Buttmann bis zu den Verbis contractis (incl.) Uebungsb. zum Uebersetzen: Schmidt und Wensch 1. Cursus. Exercitien 8tägl., Extemp. 14tägl. Klostermann.

Französisch 2 St. Wiederholung der unregelm. Verba. Lehre v. Artikel und Pronomen, nach Plötz 1 St. 14tägl. Exercitien, 4wöchentl. Extemporalien. Charles XII. Buch 3. 4. 5. z. Theil. D. O.

2. **Wissenschaften.** Religion 2 St. Die Lehre vom christlichen Glauben und den Sakramenten nach dem Heidelberger Katechismus 1 St. im S. Lectüre ausgewählter Abschnitte des alten Testaments, Memoriren von Psalmen und ausgewählten Stellen. 1 St. im S. 2 St. im W. Pastor Schimmel.

Geschichte 2 St. Preußische Geschichte bis 1815. Deutsche von 1648 bis ebendahin. Cauer, Tabellen. Klostermann.

Geographie 1 St. Repetition der topischen und Einübung der politischen Geographie von den außereurop. Erdtheilen. Chartenzeichnen 1 St. Klostermann.

Mathematik 3 St. Geometrie 2 St.: die Planimetrie bis zur Lehre vom Kreise (incl.) nach Matthias 1—220. Schriftliche Ausarbeitung geometrischer Sätze 14tägl. Arithmetik: die 4 Grundoperationen, Potenzen und Proportionen. Aufgaben nach Meier Hirsch. 1. St. Orth.

Naturgeschichte 2 St. Systemkunde (künstl. System). Im Sommer Pflanzen, im Winter Säugethiere. Die Pflanzen wurden eingelegt. Kysäus.

3. **Fertigkeiten.** Singen 1 St. comb. mit G. II. Gymnast. Uebungen w. o.

Real-Tertia. Ordinarius: Gymnasiallehrer Klostermann.

1. Sprachen. Deutsch 3 St. Repetition und Erweiterung des zusammengesetzten Satzes. Satzverbindung, Satzgefüge. Lectüre und Memoriren aus Spieß. Vortrag selbstgewählter Abschnitte aus der Privatlectüre. Aufsätze 3wöchentl. D. O.

Latein 4 St. Grammatik nach Zumpt's Auszug. Casuslehre, Moduslehre, Participium, Gerundium, Supinum. Exercitien 14tägl., Extemporalien 4w. 2 St. Lectüre aus Jacobs und Döring Thl. II.; im Sommer Auszüge aus Justin, im Winter Abschnitte aus Cicero. Von letzteren wurde ein Theil memorirt. D. O.

Französisch 4 St. Grammatik nach Plötz II. §. 39—45. 58. 75. und die unregelmäßigen Zeitwörter. Exercitien 14tägl. Extempor. 3wöchentl. 2 St. Lectüre prosaischer und poetischer Abschnitte aus Lüdeking. Memoriren einiger Gedichte und Erzählungen. 2 St. D. O.

Englisch 4 St. Formenlehre nach Callin's Elementarbuch. Lesen, Uebersetzen und Memoriren der Lesestücke. 14tägl. Extemporalien, im 2. Sem. dazu 14tägl. Exercitien. Orth.

2. Wissenschaften. Religion. 2 St. comb. mit G. III.

Geschichte 2 St. Deutsche Geschichte bis 1648, dann brandenburgisch-preußische bis 1640; preußische Geschichte von 1640—1786, mit Berücksichtigung der gleichzeitigen deutschen und die Jahre 1813 bis 15. Dr. Kleine.

Geographie 1 St. Im S. politische Geographie von Deutschland, im Winter von Preußen. Chartenzeichnen. D. O.

Mathematik 4 St. Geometrie comb. mit G.-III. 2 St. Orth.
Arithmetik 2 St. Die 4 Grundoperationen, Potenzen und Proportionen. Aufgaben nach Meier Hirsch. Kysäus.

Rechnen 2 St. Wiederholung der zusammengesetzten Rechnungsarten nach Diesterweg; Quadrat- und Cubikrechnung und Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel nach Bosse. Kap. 43. 44. 46. 47. Lefholz.

Naturgeschichte 2 St. comb. mit G. III. Kysäus.

Physik 2 St. Beobachtung und Beschreibung von Naturerscheinungen; dann die allgemeinen Eigenschaften der Körper. Dr. Wilms.

3. Fertigkeiten. Zeichnen 2 St. Ausgeführtes Zeichnen der früher nur in Umrissen dargestellten Körper mit Kreide. Die Elemente der Linearperspective und perspectivisches Zeichnen mittelst Construction bei rechtwinkliger Abweichung nach Soldan. Lefholz.

Singen 1 St. comb. mit G.-II. Gymnast. Uebungen w. o.

Quarta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Wilms.

1. Sprachen. Deutsch 2 St. Satz- und Periodenlehre mit Vergleichung des lateinischen Satzbaues. Lesen und Erklären von poetischen und prosaischen Erzählungen, Fabeln, Beschreibungen und leichten Balladen. 14tägl. Aufsätze. D. O.

Lateinisch 10 St. Repetition des ersten Lehrgangs der Casuslehre, zweiter Lehrgang Scheele II., §. 1—47., Moduslehre §. 47—60. Uebersetzen der deutschen und lateinischen Lesestücke. Nach Jacobs und Döring II. und Süpfle I. Exercitien 8tägl. Extemporalien 14tägl. D. O.

Griechisch 4 St. comb. mit G. III. b. Dasselbe Pensum, mit Ausschluß der verba contracta und der Uebungsbeispiele des zweiten Lehrgangs in Schmidt und Wensch. Klostermann.

Französisch. a) Gymnasial-Abtheilung 2 St. Wiederholung des Pensums der V., hierauf Einübung von Plötz 1. Cursus, Abschnitt 4. 5. 6. 14tägl. Exercitien. 4wöchentl. Extemporalien. b) Real-Abtheilung 4 St. in 2 St. combinirt in G. IV. dasselbe Pensum; in den 2 besonderen Stunden Wiederholung des Pensums der gesammten IV., dazu Plötz 2. Cursus Lect. 1—12. Memorir- und schriftliche Uebungen.

2. Wissenschaften. Religion 2 St. Bibelkatechismus von Krummacher; die leichteren Abschnitte des heidelberger Katechismus. Memoriren von Bibelstellen und Kirchenliedern. Pastor Schimmel.

Geschichte 2 St. Geschichte der Griechen und Römer ethnographisch mit steter Berücksichtigung der Geographie des alten Griechenlands und Italiens. Dr. Kleine.

Geographie 1 St. Topische und politische Geographie Europa's. Chartenzeichnen. Der Director.

Mathematik 2 St. Die Elemente der Geometrie. Euclid I., Satz 1—24. Orth.

Rechnen 1 St. Die Zins- und Gesellschaftsrechnung. Decimalbrüche, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel nach Bosse III. Orth.

Real-Abtheilung 2 St. Rabatt-, Zins-, Gesellschafts-, Mischungs-, Münz-, Wechsel- und Dezimalrechnung, zum Theil mit Anwendung des Kettensatzes nach Bosse III., K. 31—42. 45. Lefholz.

3. Fertigkeiten. Zeichnen 2 St. Die Elemente des perspectivischen Zeichnens und der Schattirung an gerad- und krummflächigen Körpern eingeübt. Lefholz.

Singen 1 St. Treffübungen nach Schulz Nr. 63—100., Einübung der gebräuchlichsten Dur und Moll Tonleitern, der Choralmelodien von Natorp und von zwei- und dreistimmigen Liedern aus Erk's Sängerhain. Lefholz.

Gymnast. Uebungen comb. mit G.-II. s. o.

Quinta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Orth.

1. Sprachen. Deutsch 3 St. Der zusammengesetzte Satz nebst Präposition und Conjunction. Uebungen im mündlichen Vortrag. 14tägl. Aufsätze. Lesebuch von Graßmann und Langbein. D. O.

Lateinisch 9 St. Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre, Einübung der unregelmäßigen nach Scheele I. Aus der Casuslehre die Regeln des ersten Lehrgangs und die Lehre vom Accus. cum Infin. nach Schele II. Wöchentlich ein Pensum, Extemporal. 14tägl. D. O.

Französisch 3 St. Die regelmäßige Formenlehre einschl. avoir und être bis an die Conjugat. nach Plötz I., 1—60. Im 2. Sem. 14tägl. Extemporal. D. O.

2. Wissenschaften. Religion 3 St. Biblische Geschichte des A. T. nach Zahn. Memoriren von Kirchenliedern und Bibelsprüchen. Lefholz.

Geographie 2 St. Topische Geographie der außereuropäischen Erdtheile nach der zeichnenden Methode. Klostermann.

Rechnen 3 St. Wiederholungsaufgaben über die 4 Species in Brüchen. Die einfache und zusammengesetzte Regel de tri. Zinsrechnung mit Anwendung des Proportionssatzes nach Bosse II. und III., Cap. 23—30. Lefholz.

Naturgeschichte 2 St. Individuenkunde. Beschreibung von Pflanzen, Säugethieren, Vögeln und Insecten. D. O.

3. Fertigkeiten. Zeichnen 2 St. Linearzeichnen zur Fortsetzung der Uebungen für VI., und Zeichnen nach Vorlegeblättern (nach Franke). Heuermann.

Singen 1 St. comb. mit IV. Lefholz.

Gymnast. Uebungen comb. mit G.-II.

Sexta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Kleine.

1. Sprache. Deutsch 3 St. Lehre vom einfachen Satze mit seinen Redetheilen in analytischer Weise. Einübung der Orthographie und des Gebrauchs der Interpunction, schriftlich und mündlich. Uebungen im mündlichen Vortrage. Lesebuch von Graßmann und Langbein. D. O.

Latein 9 St. Regelmäßige Formenlehre eingeübt nach Scheele I. §. 1—29. im 2. Semester wöchentlich ein Extemporale. D. O.

2. **Wissenschaften.** Religion 3 St. comb. mit V. Lefholz.

Geographie 2 St. Allgemeine Einleitung und die topische Geographie der außereuropäischen Erdtheile nach der zeichnenden Methode. D. O.

Naturbeschreibung 2 St. Individuenkunde; Beschreibung einiger Pflanzen, Vögel, Säugethiere und Insecten. Heuermann.

3. **Fertigkeiten.** Zeichnen 2 St. Elemente des Linearzeichnens und Formenlehre. Heuermann.

Singen 2 St. Treffübungen nach Schulz 1—61. Einübung von ein- und zweistimmigen Liedern aus Erk's Sängerhain und von Choralmelodien nach Natorp. Lefholz.

Gymnast. Uebungen comb. G.-II. s. o.

d. Verzeichniß der mit Genehmigung der Behörde beim Unterricht gebrauchten Lehrbücher und Hülfsmittel.

Sexta.

Zahn's biblische Historien. Deutsches Lesebuch von Graßmann und Langbein. Vorschule zu den lateinischen Klassikern von Scheele, 1. Theil. Leitfaden beim Unterricht in der Erdkunde, von Nieberding. Rechenbuch für die Volksschule von Bosse, Heft 1. u. 2. Sängerhain von Erk, 1. Heft. Theoretisch-praktische Gesangschule von Schulz. Choralmelodien von Natorp.

Quinta.

Vorschule zu den lateinischen Klassikern von Scheele, 2. Theil. Elementarbuch der französischen Sprache von Plötz, 1. Cursus. Lateinisches Vocabularium von Bonnell. Rechenbuch von Bosse, Heft 2 u. 3. Das Uebrige wie in Sexta.

Quarta.

Bibel-Katechismus von Krummacher. Der Heidelberger Katechismus. Lateinische Vorschule von Scheele, 2. Theil. Lateinisches Elementarbuch (Chrestomathie) von Jacobs und Döring. Vocabularium von Bonnell. Deutsches Lesebuch für mittlere Gymnasial-Klassen von Spieß. Französisches Elementarbuch von Plötz, 2. Theil. Geschichtstabellen von Cauer. Geographischer Leitfaden von Nieberding. Rechnen und Singen wie in Quinta.

Gymnasial-Tertia.

Deutsches Lesebuch wie in Quarta. Lateinische Grammatik von Zumpt. Lenz, lat. Vocabularium. Aufgaben zu lateinischen Stilübungen von Süpfle, 1. Theil. Buttmann's griechische (mittlere) Grammatik. Elementarbuch der griechischen Sprache von Schmidt und Wensch. Französische Schulgrammatik von Knebel. Uebungsbuch zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Französische von Probst. Leitfaden für den heuristischen Schulunterricht in der Mathematik von Matthias. Sammlung von algebraischen Aufgaben von Meier Hirsch. Geschichte und Geographie wie in Quarta. Die Flora Westfalens von Jüngst. Erk's Sängerhain, 2. Heft.

Real-Tertia.

Deutsch, Geschichte, Geographie, Botanik, Mathematik und Singen wie in G. III. Auszug aus der lateinischen Grammatik von Zumpt. Stilübungen von Süpfle, 1. Thl. Chrestomathie von Jacobs und Döring. Französisches Elementarbuch von Plötz, 2. Thl. Französisches Lesebuch von Lüdeking. Elementarbuch der englischen Sprache von Callin. Rechenbuch von Bosse, Heft 3.

Gymnasial-Secunda.

Lateinische Grammatik von Zumpt. Aufgaben zu lateinischen Stilübungen von Süpfle, 2. Theil. Lenz, latein. Vocabularium. Französische Grammatik von Knebel. Uebungsbuch zum Uebersetzen von Probst. Französisches Lesebuch für obere Classen von Schütz. Griechische Grammatik von Buttmann, wie G. III. Elementarbuch der griechischen Syntax zum Uebersetzen von Halm, 1. Cursus. Für Mathematik Leitfaden von Matthias und Meier Hirsch und Logarithmentafeln von August. Geschichte, Geographie, Singen wie in G. III.

Real-Secunda.

Für das Lateinische Zumpt, Süpfle und Lenz wie in G. III. Für das Französische Knebel, Probst und Schütz wie in G. II. Englische Schulgrammatik von Wagner. Aufgaben zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Englische von Herrig. Englisches Lesebuch für obere Classen von Schütz. Für Mathematik, Geschichte, Geographie und Singen wie G. II. Flora Westfalens von Jüngst.

B. Auszug aus den Verordnungen der vorgesetzten Behörden.

1. Vom 27. März 1858. Uebertragung der commissarischen Directoratverwaltung an den Unterzeichneten.

2. Vom 1. April. Verfügung, die Befreiung der Söhne der hiesigen evangelischen Elementarlehrer vom Schulgeld betr.

3. Vom 7. April. Genehmigung des Lectionsplans für das Schuljahr $18^{58}/_{59}$.

4. Vom 9. April. Auftrag zur Berichterstattung über die Verwendung der von dem Herrn Cultusminister zur Vermehrung der Bibliothek und des physikalischen Apparats für das Jahr 1858 angewiesenen 200 Thlr.

5. Genehmigung der beantragten Theilung der Herbstferien.

6. Vom 17. Mai. Die Beförderung des Gymnasiallehrers Klostermann zum 2. Gymnasiallehrer betr.

7. Vom 30. Juni. Empfehlung der vom Seminarlehrer Fix herausgegebenen Wandkarte zur Geschichte des Preußischen Staats.

8. Vom 2. Juli. Ermächtigung des Dirigenten und eines Lehrers zur Theilnahme an der Jubelfeier zu Bielefeld.

9. Vom 13. Juli. Verfügung, nach welcher den Schülern der 3 obern Gymnasial-Klassen die freiwillige Theilnahme am Zeichenunterricht der entsprechenden Real-Klassen gestattet ist und die Stunden für den obligatorischen Zeichenunterricht so zu legen sind, daß die Theilnahme aller Schüler der obern Klassen Statt finden kann.

10. Vom 23. August. Mittheilung, daß der Herr Cultusminister dem Lehrercollegium die Summe von 220 Thlr. als außerordentliche Unterstützung überwiesen habe.

11. Vom 21. October. Uebersendung von 3 Exemplaren des Protocolles der 13. Westfälischen Directoren-Conferenz nebst Auftrag, betr. die der nächsten Directoren-Conferenz vorzulegenden Gegenstände.

12. Vom 8. November. Die vom 25. bis 30. October abgehaltene Revision des Gymnasiums betr.

13. Vom 8. November. Verfügung, die Beförderung des bisherigen wissenschaftlichen Hülfslehrers Orth zum 3. Gymnasiallehrer betr.

14. Vom 9. November. Desgl. die Anstellung des Schulamts-Candidaten Dr. Kleine als 5. Gymnasiallehrer betr.

15. Vom 9. November. Ministerial-Erlaß, der unter den Schülern sich mehrenden Kurzsichtigkeit und Augenschwäche zu wehren.

16. Vom 3. December. Die Ferienordnung betr.

17. Vom 18. December. Genehmigung des Antrags, daß der Gymnasiallehrer Dr. Wilms mit 1. Mai 1859 aus seiner hiesigen Stellung ausscheidet.

18. Vom 31. December. Verfügung, betr. den Eintritt des Gymnasiallehrers Schütz in Minden als Oberlehrer bei hiesigem Gymnasium zu Ostern 1859.

19. Vom 7. Januar. Empfehlung des vom Geh. Ober-Regierungsrath Stiehl herausgegebenen Centralblatts für die gesammte Unterrichts-Verwaltung in Preußen.

20. Vom 10. Januar. Vom Prov. Schul-Collegium, Mittheilung des Ministerial-Erlasses vom 27. November 1858, die Vorschriften über das Probejahr der Schulamts-Candidaten betr.

21. Vom 20. Januar. Einsetzung der Prüfungs Commission für Immaturi, zu deren Mitgliedern der Unterzeichnete, O.-L. Heuermann und O.-L. Kysäus ernannt sind.

22. Vom 27. Januar. Verfügung, durch welche der vom Pfarrer Schimmel seither gegebene Religionsunterricht in den oberen Klassen dem Pfarrer Grevel übertragen wird (von Ostern 1859 ab).

23. Vom 22. März. Die Ernennung des Unterzeichneten zum Director des Gymnasiums betr.

24. Vom 24. März. Genehmigung des Lehrplans für den lateinischen Unterricht im G. und R. I.

Schließlich sei bemerkt, daß von den Schülern der oberen Gymnasial-Klassen im Ganzen 4 am Zeichenunterrichte der Real-Klassen Theil genommen haben; indeß machten es die besonderen Schwierigkeiten, die hauptsächlich wegen der beschränkten Klassenlocale bei der Entwerfung des diesjährigen Lehrplanes obwalteten, unmöglich, ihnen mehr als eine Stunde wöchentlich zuzuweisen, in der sie ohne Versäumniß anderer Stunden am Zeichenunterrichte Theil nehmen konnten.

II. Chronik des Gymnasiums.

1. Das neue Schuljahr $18^{58}/_{59}$ wurde am Donnerstag den 15. April mit einer Morgenandacht eröffnet, nachdem Tags vorher im Beisein des gesammten Lehrer-Collegiums die Prüfung der neuen Schüler Statt gefunden hatte. Sodann wurden die Versetzungen und die Rangordnung, wie sie nach den Gesammtleistungen in der Conferenz bestimmt worden war, den Schülern bekannt gemacht.

Die fünfwöchentlichen Herbstferien wurden diesmal auf den durch Verfügung vom 15. Mai genehmigten Antrag des Lehrer-Collegiums in der Weise getheilt, daß die eine Hälfte auf die Zeit vom 19. Juli bis 8. August, die andere auf die vom 13. bis zum 27. September fiel. Das Schuljahr wurde am 19. April mit der Vertheilung der Censuren geschlossen.

2. Noch vor Schluß des Schuljahrs $18^{57}/_{58}$ hatte die Schule durch den plötzlichen am 24. März erfolgten Tod ihres Directors, des Dr. Bromig, einen schweren Verlust erlitten. Er war am 19. März an einer Unterleibsentzündung erkrankt. Die Heftigkeit, mit der die Krankheit auftrat, erregte gleich anfangs große Besorgnisse, und obgleich am Sonntag den 21. März auf kurze Zeit Besserung eintrat, so erneuerte sich am folgenden Tage das alte Uebel bei zunehmender Entkräftung des Kranken. Schon am 24. März Morgens 6 Uhr verschied er, nachdem er alle Schmerzen, die namentlich in der ersten Zeit sehr heftig waren, mit Geduld und christlicher Ergebung ertragen hatte. Dieser plötzliche Todesfall erregte bei der gesammten Bevölkerung Steinfurts die innigste Theilnahme; noch an demselben Morgen begab sich das Lehrer-Collegium, das seines Führers beraubt war, nach dem Sterbehause, um der Wittwe und den übrigen Angehörigen, vor allen dem alten den einzigen Sohn überlebenden Vater sein tiefgefühltes Beileid auszusprechen: am Freitag den 27. Nachmittags fand die Beerdigung auf dem evangelischen Kirchhofe Statt. — Gustav Hermann Bromig war am 2. Februar 1821 zu Elberfeld geboren: er besuchte das dortige Gymnasium bis Michaelis 1838, studirte dann von Ostern 1839 an auf den Universitäten Marburg, Bonn und Berlin, promovirte zu Halle, hielt sein Probejahr am Gymnasium seiner Vaterstadt ab und versah ebendaselbst eine ordentliche Lehrstelle bis Ostern 1845. Nach einem Aufenthalte von etwa einem halben Jahre in Paris trat er von Neuem als Hülfslehrer an dem Gymnasium zu Elberfeld ein, wurde Michaelis 1847 Gymnasiallehrer in Minden, 1849 Oberlehrer, und war von Michaelis 1851 ab Oberlehrer an der Realschule zu Düsseldorf. Aus dieser Stellung führte ihn Ostern 1853 der ehrenvolle Auftrag der Behörde, an die

Spitze des seit 50 Jahren eingegangenen und am 4. April 1853 wieder eröffneten Gymnasii Arnoldini illustris zu treten, nach Burgsteinfurt. Durch Patent Sr. Majestät des Königs vom 25. Mai 1857 wurde er zum Director des Gymnasiums ernannt, und am 8. Juli durch Herrn Provinzial-Schulrath Dr. Suffrian als solcher in das Lehrer-Collegium eingeführt. Bromig verband mit großer Klarheit des Denkens vielseitige Kenntnisse, die er unablässig zu erweitern und tiefer zu begründen bemüht war. Die von ihm für das Programm dieser Anstalt v. Jahre 1854 verfaßte wissenschaftliche Abhandlung handelt von der Plautinischen Aulularia und Moliere's Avare: außerdem zeugen viele in seinem Nachlasse aufgefundene Schriften, theils Auszüge aus größeren Werken, theils eigene Arbeiten, von seinem rastlosen Streben. Zu seiner Stellung als Dirigent der Anstalt befähigte ihn neben Pünktlichkeit und Ordnungsliebe ein bedeutendes Organisationstalent; er besaß zugleich große Lehrgabe, Hingebung an seinen Beruf und ein warmes Herz für die Jugend, die er zu gründlicher Bildung, zu christlicher Frömmigkeit und Gesittung führte. So ist es ihm denn gelungen, die junge Anstalt, der sich anfangs manche unerwartete Hemmnisse in den Weg stellten, über alle Schwierigkeiten hinweg mit sicherer Hand ihrer Vollendung entgegenzuführen und die Worte der Aufmunterung, die bei seiner Einführung der Herr Prov. Schulrath an ihn richtete, „er möge darnach streben, als der erste in der langen Reihe der Directoren der neueröffneten Anstalt für die nachfolgenden in Allem ein Muster zu sein," haben ihre volle Wahrheit erhalten, wenngleich Gott so früh seiner segensreichen Wirksamkeit auf Erden ein Ziel gesetzt hat. Friede seiner Asche!

Mit dem Ende des Schuljahres 1858 schied der Schulamts-Candidat Neumann von der Anstalt, an der er nach Abhaltung seines Probejahres von Ostern 1857 ab als wissenschaftlicher Hülfslehrer mit vielem Erfolge gearbeitet hatte, um einem ehrenvollen Rufe an die Realschule zu Barmen zu folgen.

3. Durch den Tod des Dir. Bromig und den Abgang des Cand. Neumann traten folgende Veränderungen im Lehrer-Collegium ein: Durch Verfügung des Prov.-Schul-Collegiums v. 27. März wurde dem Unterzeichneten die commissarische Wahrnehmung der Directionsgeschäfte bis auf Weiteres übertragen.

Mit Genehmigung des Herrn Cultusministers v. 17. Mai wurde der bisherige fünfte Gymnasiallehrer Klostermann in die Stelle des zweiten Gymnasiallehrers befördert, und die Schulamts-Candidaten Orth und Dr. Kleine, welche beide an dieser Anstalt ihr Probejahr gemacht haben und ersterer seit Michaelis 1857, letzterer seit Ostern 1858 als wissenschaftliche Hülfslehrer beschäftigt waren, wurden durch die Verfügungen vom 8. und 9. November Orth als dritter, Dr. Kleine als fünfter ordentlicher Lehrer angestellt und am 14. November von dem Unterzeichneten vereidet.

4. Von den von dem Herrn Cultusminister durch Erlaß vom 20. Januar 1857 zur Vervollständigung der Lehrmittel außerordentlich bewilligten 600 Thlr. wurden in diesem Jahre 200 Thlr., 94 Thlr. 25 Sgr. für die Bibliothek und das Uebrige für den physikalischen Apparat, verwandt. Außerdem ist von dem Herrn Minister als außerordentliche Unterstützung die unter die Lehrer der Anstalt zu vertheilende Summe von 220 Thlr. bewilligt worden.

5. Der Unterricht begann wie früher im Sommersemester um 7 Uhr Morgens, im Wintersemester um 8 Uhr; doch wurde hauptsächlich wegen der Confirmanden, die durch den Confirmanden-Unterricht von 11—12 an 4 Wochentagen am Besuch der letzten Stunde Vormittags verhindert waren, mit dem 7. März der Unterricht ebenfalls um 7 Uhr begonnen. Der Unterricht wurde jedesmal durch eine gemeinsame Morgenandacht aller Klassen eröffnet.

Die Straflection, in welcher die fehlenden oder mangelhaften Arbeiten der betr. Schüler aller Klassen unter Aufsicht eines Lehrers nachgeholt werden, wurden täglich nach der letzten Vormittagsstunde gehalten.

6. Zur Anfertigung der häuslichen Arbeiten, welche in den unteren Klassen auf eine Zeit von etwa 2 bis 2½ Stunden berechnet sind, war eine nach der Jahreszeit wechselnde, bestimmte Arbeitszeit festgesetzt und das Ausgehn nach derselben ohne dringende Veranlassung untersagt. Die einheimischen Schüler wurden wenigstens einmal in jedem Vierteljahre, die auswärtigen in jedem Monate einmal von ihren Ordinarien besucht.

Dem sonntäglichen Haupt-Gottesdienste in der größeren Kirche wohnten sämmtliche evangelische Schüler unter Theilnahme der Lehrer regelmäßig bei.

7. Die gymnastischen Uebungen fanden wie bisher an dem von des Herrn Fürsten von Bentheim-Steinfurt Durchlaucht der Anstalt überwiesenen Platze im fürstlichen Park zweimal in der Woche an den schulfreien Nachmittagen Statt. Den Turnunterricht und die militärischen Uebungen, die ab und zu angestellt wurden, leitete Dr. Kleine. Zur Aufsicht war abwechselnd einer der Lehrer gegenwärtig.

An den Tagen, an welchen nicht geturnt wurde, trat im Sommer an dessen Stelle das Baden und Schwimmen an einem in der Aa oberhalb der Stadt gelegenen von Sr. Durchlaucht dem Herrn Fürsten der Anstalt zu ausschließlicher Benutzung huldreichst überlassenen Platze. Abwechselnd führte einer der Lehrer die Aufsicht, die Oberaufsicht führte G.-Lehrer Klostermann. Anleitung im Schwimmen wurde von dem Schuldiener ertheilt.

8. Die Feier des 18. Juli zur Erinnerung an den Stifter des Gymnasiums, den Grafen Arnold IV. v. Bentheim, und des 15. Octobers zur Feier des Geburts-

tages Sr. Majestät des Königs wurden wie früher durch Declamationen, Festrede und mehrstimmige Gesänge gefeiert, und zwar beide Male in dem von Sr. Durchlaucht dem Fürsten zur Benutzung gewährten Saale des Kiosk im fürstlichen Park. Auch wohnten am 15. October sämmtliche Schüler dem Morgengottesdienste in der kleineren evangelischen Kirche bei.

Am Arnoldtage sprach der Unterzeichnete, nachdem er des erlauchten Stifters des Gymnasiums und der seit seiner Wiedereröffnung erreichten Resultate, besonders der erfolgreichen Wirksamkeit ihres frühverewigten Directors in ehrender Weise gedacht hatte, über die Erziehung bei den Römern; am Königsgeburtstage der G.-L. Orth über die Fortschritte in den Naturwissenschaften, besonders in der Meteorologie. Es declamirten am letzteren Tage folgende Schüler: K. Prümers und F. Hilgemann aus VI., W. Tew und H. Prümers aus V., Fr. Brabänder aus IV., M. Möller und J. Nyhoff aus R.-III., Fr. Schlüter und A. Bruns aus G.-III., K. Kisker aus R.-II., O. Smend und L. Althoff aus G.-II.

9. Die jährlichen Klassenprüfungen, zu denen die Angehörigen der Schüler und die mit dem Gymnasium in amtlichen Beziehungen stehenden Personen der Stadt eingeladen waren, wurden an 7 verschiedenen Tagen abgehalten. VI. wurde am 28. Januar, V. am 11. Februar, IV. am 22. Februar, R.-III. am 10. März, G.-III. am 24. März, R.-II. am 30. März, G.-II. am 8. April geprüft. Die Prüfungsgegenstände waren in VI. Religion, Lateinisch, Deutsch, Rechnen und Geographie; in V. Religion, Lateinisch, Französisch, Rechnen und Geographie; in IV. Religion, Lateinisch, Deutsch, Mathematik und Geschichte; in R.-III. Lateinisch, Französisch, Englisch, Mathematik und Geschichte; in G.-III. Lateinisch, Griechisch, Mathematik, Französisch; in R.-II. Lateinisch, Französisch, Englisch, Mathematik und Physik; in G.-II. Lateinisch, Griechisch, Mathematik und Geschichte. Nach der Prüfung wurden die Leistungen der Schüler von der Conferenz besprochen und das Urtheil den betr. Schülern mitgetheilt.

10. In den Tagen vom 24. bis zum 30. October unterzog der Herr Provinzial-Schulrath Dr. Suffrian das Gymnasium einer umfassenden Revision, deren Resultate später dem Lehrer-Collegium durch den Berichterstatter in der Conferenz mitgetheilt wurden. (S. I. B. 14.)

III. Statistische Nachrichten.

A. **Das Lehrer-Collegium** bestand aus folgenden Mitgliedern:

1) Director Rohdewald.
2) 2. Oberlehrer Heuermann.
3) 3. Oberlehrer Kysäus.
4) 1. Gymnasiallehrer Dr. Wilms.
5) 2. Gymnasiallehrer Klostermann.
6) 3. Gymnasiallehrer Orth.
7) 5. Gymnasiallehrer Dr. Kleine.
8) Gymnasial-Elementarlehrer Lefholz.
9) Religionslehrer Pastor Schimmel.

Heinrich Karl Orth, geboren in Siegen 1830, besuchte die Realschule daselbst und verließ dieselbe 1850 mit dem Zeugniß der Reife; hierauf besuchte er das Gymnasium zu Herford und bezog nach bestandenem Abiturienten-Examen die Universitäten Bonn und Berlin, wo er Mathematik und Naturwissenschaften studirte. 1856 bestand er in Bonn das Examen pro facultate docendi, und trat im Herbst 1856 zur Abhaltung des Probejahres bei hiesiger Anstalt ein, an der er bis zu seiner am 8. November 1858 erfolgten definitiven Anstellung als wissenschaftlicher Hülfslehrer thätig war.

Heinrich Adolph Kleine, Dr. phil., geboren in Herford den 14. August 1835, besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt und bezog 1853 die Universität Bonn, um sich dem Studium der Philologie zu widmen. Nach einem Jahre vertauschte er diese Universität mit der zu Göttingen, wo er 1 Jahr lang als ordentliches Mitglied an den Uebungen des unter K. F. Hermann, Schneidewin und v. Leutsch blühenden philologischen Seminars Theil nahm. Ostern 1856 begab er sich nach Halle a. d. S., genügte daselbst durch einjährigen Dienst seiner Militairpflicht und erwarb sich im Sommer 1857 bei der dortigen philosophischen Facultät den Doctorgrad. Nachdem er ebenfalls im October desselben Jahres das Examen pro fac. doc. bestanden hatte, wurde er dem Gymnasium Arnoldinum als Cand. prob. überwiesen und an demselben am 9. Nov. als ordentlicher Lehrer angestellt.

B. **Die Schülerzahl** betrug im Anfange des Sommersemesters 88, im Anfange des Wintersemesters 90, am Schlusse des Schuljahres 83; im Ganzen 95 Schüler. Unter diesen waren 81 evangelischer, 6 katholischer Confession, 8 mosaischen Glaubens, und 42 auswärtige Schüler. Abgegangen sind im Laufe und bis zum Schluß des

Schuljahres die Quartaner Coers, Ferd. Schulz und Rud. Degener, die Real-Tertianer Nyhoff und Blumenfeld, die Gymn.-Tertianer W. Brabänder und Slingenberg, die Real-Secundaner Meyer, Hasse, Femmer und Musgrove, der Gymn.-Secundaner C. Brabänder. Von diesen Schülern traten Coers, Degener, W. Brabänder, Femmer, Meyer, Nyhoff und Schulz in das bürgerliche Leben, Blumenfeld, Hasse, Musgrove, Slingenberg und C. Brabänder gingen auf andere Anstalten.

Von den dem hiesigen Magistrate zur Verfügung gestellten Freistellen waren 4 ganze und 2 halbe vertheilt; 3 Schüler waren Königliche Freischüler; 2 genossen als Söhne evangelischer Elementarlehrer hiesiger Stadt Befreiung vom Schulgelde.

C. **Stand des Lehrapparates.** Die Anschaffungen für den physikalischen Apparat wurden fortgesetzt. Es wurden angeschafft: Eine Elektrisirmaschine nach Winter's Construction; ein Glockenspiel mit 3 Glocken und hängenden Klöpfeln; ein gewöhnlicher Auslader; ein Paar Grovesche Elemente; ein Galvanometer; ein Henley'scher allgemeiner Auslader; ein Bennet'sches Goldblattelectroscop; ein Paar Bunsen'sche Elemente. Der Hr. Hofrath Dr. Hofmann schenkte einen Inductions-Apparat; der Hr. Apotheker König einen gläsernen Heber.

Die naturhistorischen Sammlungen erhielten durch Schenkungen mehrfachen Zuwachs: Hr. Provinzial-Schulrath Dr. Suffrian schenkte einen Steinsalzwürfel, ein Stück Bernstein mit Insecteneinschluß, ferner Sphinx atropos, Mantis precaria; Hr. Apotheker König ein Stück Wirbelsäule vom Haifisch und Petrefacten von Ochtrup; Hr. Dr. Rüssel schenkte Falco buteo, der ausgestopft wurde und Gallinula chloropus; Hr. Herlitzius einige Menschenschädel, ein Skelett und einige anatomische Präparate; der Tertianer Jäger einen Schädel von Erinaceus Europaeus; der Tertianer Denhard einen Schädel von Talpa Europaea. Außerdem schenkte der Quartaner Hugo Brabänder ausgestopfte Exemplare von Sciurus vulgaris, Columba livea, Larus canus; der Quintaner Al. v. Bentheim einen Goldfisch. — Das Herbarium der in der Provinz und besonders in der hiesigen Gegend wildwachsenden Pflanzen wurde durch fortwährende Sammlungen vergrößert.

Die Lehrerbibliothek erhielt:

1) Durch Schenkung

a) von den vorgesetzten Behörden: Niebuhr, Geschichte Assur's und Babel's seit Phul; Hesychius ed. M. Schmidt Vol. I., 3—7.; Kosegarten Geschichte der Universität Greifswald; Leben und Schriften der Väter der reformirten Kirche; Eichwald, Beiträge zur Geologie und Paläontologie Rußlands; desselben Lethaea rossica Vol. I. mit Atlas; Loers, P. Ovidii Nasonis Tristium L. V.; Philologus, 12. und 13. Jahrgang.

b) von dem Herrn Provinzial-Schulrath Dr. Suffrian: Peters, Aristophanis judicium de summis suae aetatis tragicis; Hesteil, de Infinitivi natura et ap. Horatium usu; Prill, de Senatus Atheniensium epistatis et proedris; Schnorrbusch, de Carminibus Graecorum fatidicis; Verbeck, de Reinaldo II., comite Geldriae; Scherer, de Graec. ἄτης notione; Korioth, de Atticorum Jove Milichio. Verhandlungen des naturwissenschaftl Vereins 1857, 1—3.

c) vom hiesigen Lehrercollegium: Jahrbücher für Philologie von Fleckeisen und Dietsch; Stiehl, Centralblatt. Langensiepen, Originationes latinae vom O.-L. Kysäus.

2) Durch Ankauf:

Sophoclis tragoediae ed. Elmsley, Brunck, Schäfer. Euripidis trag. p. 1. ed. Porson. Wolf, Proleg. ad Homerum; Sallustii opp. ed. Kritz. Lucretius Carus, ed. Lachmann; Reisig, Vorlesungen über lateinische Sprachwiss. herausgegeben von Hase; Scheibert, das Wesen der höheren Bürgerschule; Livius, ed. Weissenborn Vol. VI. Pauly, Real-Encyclopädie; Drumann, Gesch. Rom's; Klotz, Cicero's Reden; Bredow, de dialecto Herodotea; Ahrens, de Graecae linguae dialectis; Schneider, Grammatik der lat. Sprache; G. T. A. Krüger, lat. Grammatik; Döderlein, Synonymen; Aeschyli tragoediae ed. G. Hermann; Plato, ed. Baiter, Orelli, Winckelmann; Bergk, Poetae lyrici; A. Böckh, Pindari opp.; Klotz, Handwörterb. der lat. Sprache; Höck, Röm. Gesch.; Herodot, ed. Bähr vol. II. Müller, Lehrbuch der Physik; Mendelssohn, das germanische Europa; Koch, Synopsis; Häusser, deutsche Geschichte; Döderlein, Horazens Episteln; Preller, Römische Mythologie; Jul. Schmidt, Gesch der deutschen Literatur seit Lessing; Ungewitter, die Preuß. Monarchie, 1. u. 2. Lieferung; Kopp, Gesch. der Chemie; Fix, Uebersichten zur äußeren Geschichte des Preußischen Staats. — Mützell, Zeitschrift für das Gymnasialwesen von 1858. Herrig, Archiv für das Studium der neueren Sprachen von 1858. Zarncke, Literar. Centralblatt.

Die Schülerbibliothek erhielt durch Ankauf:

Fritze, der kleine General; Hildebrandt, der Winter auf Spitzbergen; Franz Hoffmann, Erziehung und Leben; Nord und Süd; Toby und Maly; G. Nieritz, die Belagerung von Freiberg; Belisar; Betty und Thoms; Hans Egede der Grönlandsfahrer; Guttenberg und seine Erfindung; die Hunnenschlacht; der blinde Knabe; des Königs Leibwache; Georg Neumark; Rebau, die schönsten und lehrreichsten Märchen aus tausend und eine Nacht; G. H. v. Schubert, Erzählungen, 4 Bde; der neue Robinson, von demselben; Stöber, das Elmthäli; Winter,

die Deportirten; Salzmann, Joseph Schwarzmantel; Tschudi, das Thierleben der Alpenwelt.

Der geographische Apparat erhielt durch Ankauf:
Topische Wandcharte von Asien von Sydow; biblische Geschichtscharte von Hornung; Wandcharte des Preußischen Staats in 10 Blättern von Fix.

Das neue Schuljahr beginnt am Donnerstag den 5. Mai. Anmeldungen neuer Schüler nimmt d. U. in der ersten Woche nach Ostern in seiner Wohnung entgegen. Die Prüfung der neu aufzunehmenden Schüler findet am 4. Mai Vormittags v. 8 Uhr ab im Gymnasial-Gebäude Statt. Alle Angemeldeten müssen ein Zeugniß ihrer bisherigen Lehrer, Ausländer auch ein obrigkeitlich beglaubigtes Impfzeugniß mitbringen.

Schließlich sei bemerkt, daß auswärtige Schüler nur solche Kosthäuser beziehen dürfen, welche die Genehmigung des Directors erhalten haben.

Namen der Schüler des Gymnasiums,

zu Anfang des 4. Quartals (1. Januar 1859) in alphabetischer Ordnung.

Gymnasial-Secunda. a.

1. A. Althoff aus Lünen.
2. K. Brabänder aus Ohne bei Bentheim.
3. H. Gerdemann aus Gronau.
4. F. Hersmann von hier.
5. J. Möller aus Lübbecke.
6. H. Prümers von hier.
7. K. Prümers von hier.
8. H. Rehrs aus Ibbenbüren.
9. O. Smend aus Leeden.
10. A. Torhorst aus W. Cappeln.

Gymnasial-Secunda. b.

11. L. Althoff aus Lünen.
12. R. Sallandt von hier.
13. H. Wilderink aus Gronau.

Real-Secunda a.

14. A. Eschmann aus Ibbenbüren.
15. G. Hegelich von hier.
16. M. Heimann von hier.
17. K. Horstmann von hier.
18. M. Itzig von hier.

Real-Secunda b.

19. K. Kisker aus Halle in W.

Gymnasial-Tertia a.

20. L. Bruns von hier.
21. K. Habermann von hier.
22. F. Jäger aus Münster.
23. H. Meese aus Ibbenbüren.
24. W. Schlüter aus Recke.
25. A. Weddige von hier.

Gymnasial-Tertia b.

26. L. Degener von hier.
27. F. Funke aus Bochum.
28. H. v. Basse aus Südlohn.

Real-Tertia.

29. G. Bartling von hier.
30. A. Blumenfeld von hier.
31. E. Denhardt von hier.
32. Chr. Dreihus von hier.
33. B. Itzig von hier.
34. K. König von hier.
35. M. Möller aus Lübbecke.
36. J. Nyhoff aus Amsterdam.
37. H. Ohm aus Wieda im Hzgth. Braunschweig.
38. H. Prigge von hier.
39. F. Rotmann von hier.
40. Barthold de Schepper aus Enschede.

41. K. Schulz von hier.
42. K. Weber von hier.
43. K. Wertheim von hier.

Quarta.

44. Hugo Brabänder aus Ohne.
45. Fr. Brabänder desgl.
46. J. Brabänder desgl.
47. A. Brabänder desgl.
48. A. Döllinger von hier.
49. E. Ebmeier von hier.
50. K. Hengstenberg aus Bochum.
51. W. Holthausen von hier.
52. M. Josephson aus Unna.
53. Al. Lindemann von hier.
54. H. Prümers von hier.
55. H. Schulte aus Uemmingen bei Bochum.
56. H. Selvers von hier.
57. N. Severing von hier.
58. C. Vassoll aus Wesel.
59. H. Wilderink aus Münster.

Quinta.

60. E. v. Basse von hier.
61. H. Bartling von hier.
62. Al. Prinz von Bentheim von hier.
63. B. Kummer aus Münster.
64. G. Lörtzer von hier.
65. A. Prümers von hier.
66. H. Prümers von hier.
67. L. Siegmann von hier.
68. S. Schüssler von hier.
69. L. Stegemann aus Ohne.
70. W. Tew aus Neu-Orleans.
71. E. Ulrichs aus Herford.

Sexta.

72. K. Prinz von Bentheim von hier.
73. W. Berkemeyer von hier.
74. C. Busse aus Heerse im Fürstenth. Lippe.
75. K. Hegelich von hier.
76. L. Heimann von hier.
77. E. Hermes aus Elberfeld.
78. J. Heimann von hier.
79. Fr. Hilgemann von hier.
80. F. Holthausen von hier.
81. H. Holtmann von hier.
82. M. Ibershof von hier.
83. L. Koppelmann aus Ohne.
84. K. Prümers von hier.
85. J. Urias aus Hattingen.
86. A. Wilderinck aus Münster.

Rohdewald.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V006
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225126